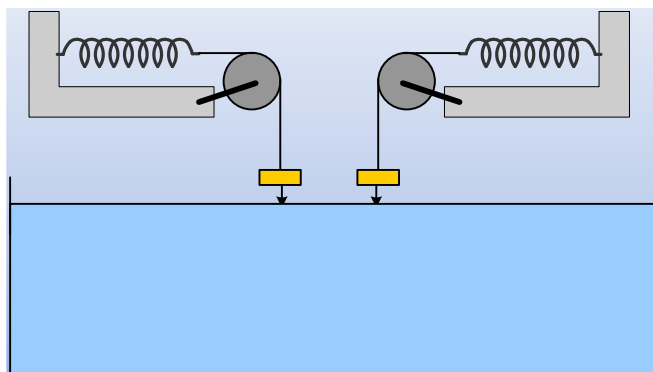


Ελατήρια, τροχαλίες, ακίδες και συμβολή...

Τα παρακάτω δύο συστήματα είναι πανομοιότυπα και αποτελούνται από:

Τροχαλία μάζας $M=8\text{Kg}$ σώμα μάζας $m=4\text{kg}$ που ισορροπεί με τη βοήθεια μη εκτατού νήματος και ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=32\text{N/m}$, αβαρής κατακόρυφη ακίδα κολλημένη στο κάτω μέρος του σώματος μάζας m που βρίσκεται μέσα σε ήρεμο υγρό όπου μπορούν να διαδοθούν επιφανειακά αρμονικά κύματα με ταχύτητα $u=1/\pi \text{ m/s}$.



Η αρχική οριζόντια απόσταση των δύο ακίδων όταν ισορροπούν είναι $d=2\text{m}$. Κάποια στιγμή που θεωρούμε $t=0$ δίνουμε στις ακίδες αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0=0,02\text{m/s}$ την μία ακίδα με φορά προς τα πάνω και την άλλη με φορά προς τα κάτω. Αν το νήμα δεν χαλαρώνει και δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία να βρεθούν:

- A) Η περίοδος της κατακόρυφης γ.α.τ. που θα εκτελέσει η κάθε ακίδα.
- B) Οι εξισώσεις των κυμάτων που θα δημιουργήσει η κάθε ακίδα.
- Γ) Να βρεθούν πόσα σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο ακίδες παραμένουν ακίνητα.

Να υποθεθεί ότι το πλάτος ταλάντωσης των ακίδων είναι και το πλάτος ταλάντωσης των κυμάτων που δημιουργούνται καθώς και ότι τα κύματα διαδίδονται χωρίς ελάττωση του πλάτους τους.

Δίνεται για την τροχαλία η ροπή αδράνειάς της $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m θα έχουμε $mg=T_1$ (1)

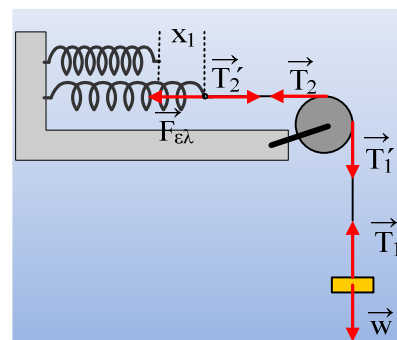
Για την ισορροπία της τροχαλίας θα έχουμε:

$$T_1R - T_2R = 0 \text{ άρα } T_1 = T_2 \text{ (2)}$$

Για την ισορροπία του άκρου του ελατηρίου με το νήμα θα έχουμε

$$T_2 = Kx_1 \text{ (3)}$$

Και από τις σχέσεις (1) (2) & (3) θα βρούμε $mg = Kx_1$ (4)



Απομακρύνουμε λίγο προς τα κάτω το σώμα και εφαρμόζουμε νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση του σώματος m και την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας

$$T_1 - mg = ma \quad (5) \quad T_2 R - T_1' R = 0,5MR^2 a_{\omega v} \quad \text{ή} \quad T_2' - T_1' = 0,5Ma \quad (6) \quad \text{ενώ} \quad T_2' = K(x_1 + x) \quad (7)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (5) και (7) στην σχέση (6) θα βρούμε $a = \frac{Kx}{0,5M + m}$

Θεωρώντας θετική φορά την φορά απομάκρυνσης για την συνισταμένη των δυνάμεων θα έχουμε

$$\Sigma F = mg - T_1 = mg - mg - ma = \frac{Kx}{0,5M + m} = -16x \quad \text{άρα το σύστημα κάνει γ.α.τ. με } D = 16\text{N/m} \quad \text{άρα και η ακίδα}$$

$$\text{με } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = \pi \text{ s.}$$

B) Η ταχύτητα u_0 είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης άρα $u_0 = \omega A$ άρα $A = 0,01\text{m}$.

Αρα η εξίσωση ταλάντωσης της κάθε πηγής θα είναι $\psi_1 = 0,01\sin 2t$ (SI) ενώ για την δεύτερη θα είναι $\psi_2 = 0,01\sin(2t + \pi)$ (SI) το μήκος κύματος θα δίνεται από το νόμο της κυματικής

$$\lambda = uT = 1\text{m.}$$

Έτσι η εξίσωση του κάθε κύματος θα δίνεται από τη σχέση

$$\psi_1 = 0,01\sin 2\pi(t/\pi - R_1) \quad (\text{SI}) \quad \& \quad \psi_2 = 0,01\sin\{2\pi(t/\pi - R_2) + \pi\} \quad (\text{SI})$$

Γ) Οποιοδήποτε σημείο πάνω στην επιφάνεια του υγρού μετά την έναρξη της συμβολής θα εκτελεί την συνισταμένη ταλάντωση που του προκαλούν τα δύο κύματα. Έτσι με την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε

$$\psi_{\text{ολ}} = \psi_1 + \psi_2 = 0,02\sin \frac{2\pi R_2 - 2\pi R_1 - \pi}{2} \cdot \sin \left(2t - \left(\pi R_1 + \pi R_2 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (\text{SI})$$

Για να είναι κάποια σημεία ακίνητα θα πρέπει το πλάτος του να είναι μηδέν δηλαδή

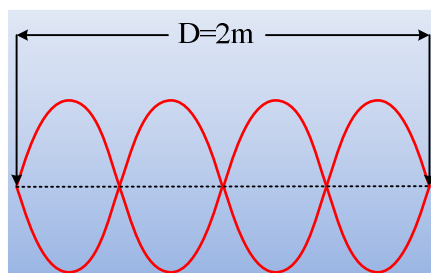
$$\sin(2\pi R_2 - 2\pi R_1 - \pi)/2 = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad R_2 - R_1 = k + 1 \quad (8) \quad \text{όπου } k \text{ ακέραιος}$$

Για τα σημεία όμως που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις ακίδες θα έχουμε και την σχέση $R_1 + R_2 = 2$ (9) και με πρόσθεση κατά μέλη $2R_2 = k + 3$ (10)

Όμως $0 < R_2 < 2$ άρα $-3 < k < 1$ άρα υπάρχουν τρία σημεία που μένουν ακίνητα.

Αιρετικά θα μπορούσαμε να λύσουμε και το Γ ερώτημα και με την βοήθεια του στάσιμου κύματος.

Επειδή οι δύο πηγές ταλαντώνονται με αντίθετη φάση στο μέσο της απόστασης των δύο ακίδων θα σχηματιστεί δεσμός και όλη η περιοχή του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δύο ακίδες θα έχει ιδιότητες στάσιμου κύματος. Έτσι θα μπορούσαμε να φανταστούμε την παρακάτω γραφική παράσταση



Παρατηρούμε ότι στο ευθύγραμμο τμήμα των δύο ακίδων υπάρχουν τρία σημεία ακίνητα

xristoselef@gmail.com