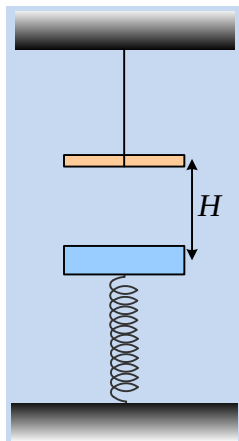


Πλαστική κρούση ράβδου-δίσκου και ταλάντωση.



Λεπτή ράβδος έχει μάζα $M_1=2\text{Kg}$ μήκος $L=0,6\text{m}$ και έχει μικρή στο κέντρο μάζας της ενώ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι περασμένο από την οπή της ράβδου. Στην ίδια κατακόρυφη με το νήμα και σε απόσταση $H=0,6\text{m}$ ισορροπεί με την βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$ λεπτός δίσκος μάζας $M_2=2\text{Kg}$ και ακτίνας $R=L/2$ που και αυτός έχει μικρή οπή από την οποία έχει περάσει το ένα άκρο του ελατηρίου. Την χρονική στιγμή $t=0$ δίνουμε στη ράβδο αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα ω_1 που έχει την κατεύθυνση του νήματος ενώ ταυτόχρονα δίνουμε κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα ω_2 στον δίσκο.

Η περιστροφή των δύο στερεών γίνεται χωρίς τριβές γύρω από τους άξονές τους.

Την χρονική στιγμή $t=1\text{s}$ κόβεται το κατακόρυφο νήμα και μετά από λίγο τα δύο στερεά συγκρούονται πλαστικά. Αν την στιγμή που το ελατήριο έχει την μέγιστη δυναμική του ενέργεια για πρώτη φορά το σύστημα παύει να περιστρέφεται ενώ η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο στερεών μετά την πλαστική τους κρούση έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου πριν την κρούση των δύο στερεών να βρεθούν:

- Το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας της ράβδου.
- Η συνολική απώλεια ενέργειας σε όλη την διάρκεια του φαινομένου.
- Το μέτρο της μέσης τιμής του μέτρου της ροπής της τριβής που ασκήθηκε στη ράβδο.
- Η ποιοτική γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αν θετική φορά θεωρηθεί η φορά προς τα πάνω.

$$I_{\text{cmραβ}}=1/12ML^2 \text{ και } I_{\text{cmδίσκ}}=1/2MR^2 \quad g=10\text{m/s}^2 \quad \sqrt{0,12}\approx 0,35.$$

Η πλαστική κρούση των δύο στερεών γίνεται ακαριαία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α)Μετά την πλαστική κρούση το κέντρο μάζας του συστήματος εκτελεί γ.α.τ. με γωνιακή συχνότητα $\omega=\sqrt{K/m_{\text{ολ}}}=5\text{r/s}$. Από τα δεδομένα του προβλήματος η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης έχει μέτρο ίδιο με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου έτσι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου πριν την κρούση θα είναι $\omega_{\text{δίσκου}}=5\text{r/s}$.

Για να σταματήσει να περιστρέφεται το σύστημα δίσκος-ράβδος θα πρέπει οι αρχικές τους στροφορμές να είναι αντίθετες μιας και η ολική στροφορμή του συστήματος τελικά είναι 0. Με την βοήθεια της ΑΔΣ θα έχουμε

$$\mathbf{L}_{\text{αρχ}}=\mathbf{L}_{\text{τελ}} \quad I_p\omega_{\text{ράβ}}-I_{\text{δίσκ}}\omega_{\text{δίσκ}}=0 \quad \text{άρα } \omega_{\text{ραβ}}=7,5\text{r/s}.$$

Β)Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της ράβδου θα έχουμε

$$MgH + K_{\text{περ}} = 1/2Mu_{\text{cm}}^2 + K_{\text{περ}}$$

θα βρούμε $u_{\text{cm}}=\sqrt{12}\text{m/s}$ ενώ η $K_{\text{περ}}$ δεν μπορεί να μεταβληθεί μιας και κατά την πτώση της ράβδου η μοναδική δύναμη που δρα είναι το βάρος της ράβδου που δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή.

Με την βοήθεια της ΑΔΟ για την κρούση των δύο στερεών θα έχουμε

$$M_1 u_{cm} = (M_1 + M_2) u_{cm}'$$

άρα μετά από τις πράξεις $u_{cm}' = \sqrt{3} \text{ m/s}$.

Όταν το σύστημα θα επιστρέψει στη θέση της κρούσης δεν θα περιστρέφεται πια. Έτσι με την βοήθεια μιας ΑΔΕ από την στιγμή λίγο πριν την κρούση στην θέση της κρούσης και την στιγμή που το σύστημα θα έχει επιστρέψει στην θέση της κρούσης θα έχουμε

$$\frac{1}{2} M_1 u_{cm}'^2 + \frac{1}{2} I_p \omega_{\rho\alpha\beta}^2 + \frac{1}{2} I_{\delta\sigma} \omega_{\delta\sigma}^2 = \frac{1}{2} M_{\text{ολ}} u_{cm}'^2 + Q_{\text{ολ}}$$

Και μετά τις πράξεις θα βρούμε $Q_{\text{ολ}} = 8,8125 \text{ J}$

Γ) Η ράβδος σταμάτησε να περιστρέφεται την στιγμή που το ελατήριο έχει την μέγιστη δυναμική του ενέργεια για πρώτη φορά. Αυτό θα συμβεί όταν το σύστημα φτάσει στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσής του. Για να υπολογίσουμε τη μέση ροπή της τριβής για την κίνηση της ράβδου θα πρέπει να βρούμε το χρονικό διάστημα που θα φτάσει το σύστημα των δύο στερεών στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης του.

Από την αρχική ισορροπία θα έχουμε $M_2 g = K x_1$ άρα $x_1 = 0,2 \text{ m}$. Για την τελική ισορροπία $M_{\text{ολ}} g = K x_2$ άρα $x_2 = 0,4 \text{ m}$. Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για την γ.α.τ. θα έχουμε

$$\frac{1}{2} M_{\text{ολ}} u_{cm}'^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} K A^2 \text{ θα βρούμε } A = 0,4 \text{ m.}$$

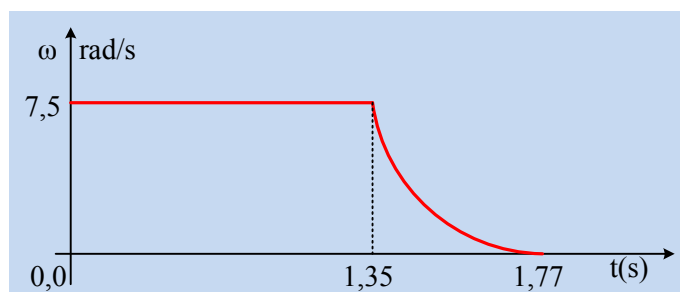
Έτσι το σύστημα βρίσκεται στη θέση $x = x_2 - x_1 = A/2$ με αρνητική ταχύτητα και θα πάει στην θέση $x = -A$.

Αρα ο χρόνος μετάβασης θα είναι $\Delta t_1 = T/4 + T/12 = 2\pi/15 \text{ s}$.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της ράβδου θα έχουμε

$$\tau_{\text{μέση}} = |\Delta L| / \Delta t \text{ και μετά τις πράξεις } \tau_{\text{μέση}} \approx 1 \text{ N.m}$$

δ) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι σταθερή μέχρι να κοπεί το νήμα μιας και οι δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο είναι η τάση του νήματος και βάρος που δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή μιας και ασκούνται στο κέντρο μάζας της ράβδου. Κατά την πτώση της ράβδου επίσης δεν μπορεί να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μιας και το βάρος της δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή. Η πτώση της ράβδου θα διαρκέσει χρόνο που θα βρεθεί από το νόμο του διαστήματος για την ελεύθερη πτώση του κέντρου μάζας της ράβδου $H = 1/2 g \Delta t_2^2$ άρα $\Delta t_2 = 0,35 \text{ s}$. Μετά την κρούση της ράβδου με τον δίσκο αρχίζει η επιβραδυνόμενη μη ομαλά στροφική κίνηση της ράβδου και τελικά η ράβδος θα σταματήσει μετά από χρόνο $\Delta t_1 = 2\pi/15 \text{ s} \approx 0,42 \text{ s}$. Έτσι η ποιοτική γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου με το χρόνο θα έχει την παρακάτω μορφή.



xristoselef@gmail.com