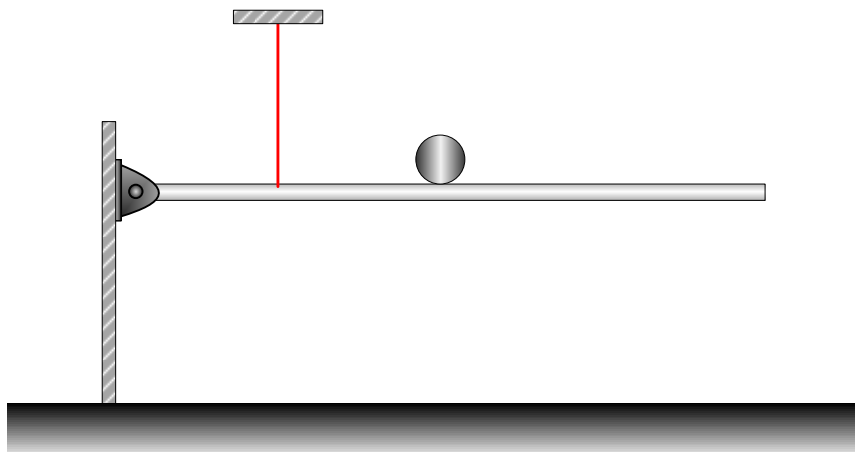


Ράβδος και σφαίρα χάσιμο επαφής.

Η λεπτή και άκαμπτη ράβδος του παρακάτω σχήματος έχει μήκος $L=1,6\text{m}$ και μάζα $M=2\text{Kg}$. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που έχει όριο θραύσης $T_{\theta}=80\text{N}$ και είναι δεμένο σε απόσταση $L/4$ από το οριζόντιο καρφί Α που απέχει από το έδαφος ύψος $H=0,8\text{m}$. Στο μέσο Μ της ράβδου ισορροπεί σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ και ακτίνας $r=0,1\text{m}$.

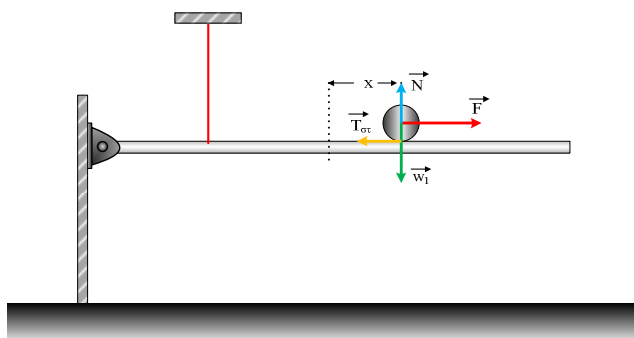


Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκείται στο κέντρο της σφαίρας σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=2,24\text{N}$ έτσι ώστε η σφαίρα να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην ράβδο. Να βρεθούν:

- Η χρονική στιγμή που θα κοπεί το νήμα
- Η κινητική ενέργεια της σφαίρας την στιγμή που θα χτυπήσει για πρώτη φορά στο έδαφος.
- Οι περιστροφές που θα εκτελέσει η σφαίρα μέχρι να χτυπήσει στο έδαφος.
- Ποιο σώμα θα χτυπήσει πρώτο στο έδαφος;

$$I_{\rho A} = \frac{1}{3}ML^2, \quad I_{\text{cm}} = 0,4mr^2, \quad g = 10\text{m/s}^2 \quad \& \quad \sqrt{3} = 1,7$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α) Για μία τυχαία θέση της σφαίρας και για το όριο θραύσης της τάσης του νήματος θα έχουμε

$-mg(L/2 + x) - MgL/2 + T_\theta L/4 = 0$ θα βρούμε $x = 0,8\text{m}$. Δηλαδή το νήμα θα κοπεί ακριβώς την στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο άκρο Γ της ράβδου.

β) Εκείνη τη στιγμή δεν ξέρουμε αν θα χαθεί η επαφή της σφαίρας με το άκρο της ράβδου. Αν υποθέσουμε ότι χάθηκε η επαφή για την ράβδο θα ισχύει

$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα $MgL/2 = 1/3 ML^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 9,375\text{r/s}^2$ άρα η γραμμική επιτάχυνση του άκρου της ράβδου θα είναι $a = a_{\gamma\omega\nu} \cdot L = 15\text{m/s}^2$ που είναι μεγαλύτερη της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Έτσι θα χαθεί η επαφή της σφαίρας με την ράβδο την στιγμή που θα κοπεί το νήμα.

Για την κίνηση της σφαίρας πάνω στη ράβδο θα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα για την στροφική και την μεταφορική κίνηση

$F - T_{\sigma\tau} = ma$ (1) $T_{\sigma\tau} R = 0,4mR^2 a_{\gamma\omega\nu}$ (2) και με την επίλυση των (1) και (2) θα βρούμε $a = 1,6\text{m/s}^2$.

Την στιγμή που θα χαθεί η επαφή η σφαίρα έχει διανύσει διάστημα $L/2$ και από το νόμο του διαστήματος στην επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα έχουμε $L/2 = 1/2 at^2$ θα βρούμε $t = 1\text{s}$. Εκείνη τη στιγμή το κέντρο μάζας έχει ταχύτητα $u_{cm} = at = 1,6\text{m/s}$.

Μετά την χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$ η σφαίρα είναι στο αέρα και εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση εξαιτίας της δύναμης F στον οριζόντιο άξονα $x x'$ ενώ στον κατακόρυφο άξονα $\psi \psi'$ εκτελεί ελεύθερη πτώση. Σε όλο το παραπάνω διάστημα η σφαίρα συνεχίζει να έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = u_{cm}/r = 16\text{r/s}$ που την απέκτησε λόγω της στατικής τριβής στην κύλιση πάνω στην ράβδο.

Η σφαίρα θα φτάσει στο έδαφος μετά από χρόνο που θα βρεθεί από το νόμο της ελεύθερης πτώσης $H = 1/2 gt'^2$ άρα $t' = 0,4\text{s}$

Στον άξονα $x x'$ $F = ma'$ άρα $a' = 2,24\text{m/s}^2$ άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας την στιγμή της πτώσης στο δάπεδο θα είναι $U_{cmxx'} = u_{cm} + a' t' = 2,496\text{m/s}$ ενώ η $U_{cm\psi\psi'} = gt = 4\text{m/s}$.

Άρα $U_{cm} \approx 4,77\text{m/s}$.

Έτσι η συνολική κινητική ενέργεια της σφαίρας θα είναι $K = 1/2 m U_{cm}^2 + 1/2 I \omega^2 \approx 11,89\text{J}$

γ) Η σφαίρα εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση όταν είναι πάνω στην ράβδο ενώ εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση όταν είναι στον αέρα. Για την πρώτη κίνηση εκτελεί $N_1 = L/2/2\pi r = 4/\pi$ περιστροφές ενώ για χρόνο $t' = 0,4\text{s}$ $N_2 = \omega t' / 2\pi = 3,2/\pi$ περιστροφές.

Άρα συνολικά εκτέλεσε $N_{\text{ολ}} = 7,2/\pi$ περιστροφές.

δ) Η σφαίρα έκανε χρόνο $t' = 0,4\text{s}$ για να φτάσει στο έδαφος.

Η ράβδος θα χτυπήσει στο έδαφος όταν έχει καλύψει γωνία $\theta=30^\circ$ μιας και το $\eta\mu\theta=H/L=0,5$.

Αν η ράβδος είχε την αρχική μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu\max}=9,375 \text{ r/s}^2$ θα χρειαζόταν ελάχιστο χρόνο που θα βρισκόταν από την σχέση $\theta=1/2\alpha_{\gamma\omega\nu\max}t_{\min}^2$ από την σχέση αυτή θα βρούμε $t_{\min}\approx 0,33\text{s}$.

Όταν η ράβδος έχει διαγράψει την γωνία $\pi/6$ έχει εκείνη την στιγμή την μικρότερη γωνιακή της επιτάχυνση που θα βρεθεί από την σχέση $\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu\min}$ ή $Mg\sin 30^\circ L/2=1/3ML^2\alpha_{\gamma\omega\nu\min}$ και μετά από πράξεις $\alpha_{\gamma\omega\nu\min}\approx 7,97\text{r/s}^2$.

Αν η ράβδος είχε την τελική ελάχιστη γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu\min}=7,97 \text{ r/s}^2$ θα χρειαζόταν μέγιστο χρόνο που θα βρισκόταν από την σχέση $\theta=1/2\alpha_{\gamma\omega\nu\min}t_{\max}^2$ από την σχέση αυτή θα βρούμε $t_{\max}\approx 0,36\text{s}$. Έτσι ο χρόνος πτώσης της ράβδου είναι από $0,33 < t_{\text{ράβδου}} < 0,36 \text{ (SI)}$

Έτσι πρώτη θα χτυπήσει η ράβδος στο έδαφος.

xristoselef@gmail.com