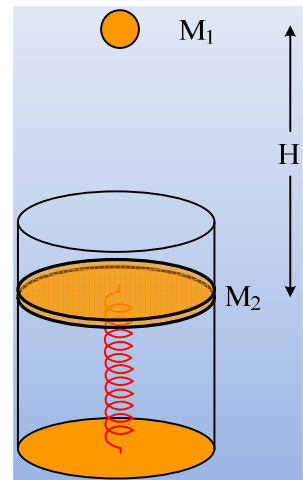


Ταλάντωση με αέριο.

Ο κατακόρυφος κύλινδρος του διπλανού σχήματος περιέχει ποσότητα $n=1/R$ mol ιδανικού αερίου θερμοκρασίας $T=300K$ και πίεσης $P=10^5 N/m^2$. Ο κύλινδρος κλείνεται με ευκίνητο έμβολο μάζας $M_2=10Kg$ που ισορροπεί και με την βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=1000N/m$ και φυσικού μήκους $L_0=1,1m$ που είναι δεμένο και με το έμβολο αλλά και με το κάτω μέρος του δοχείου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από ύψος $H=0,05m$ πάνω από το κέντρο του ελαστικού εμβόλου αφήνεται ελεύθερο σημειακό σώμα μάζας $M_1=2,5Kg$ και τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση το σημειακό σώμα αφαιρείται από το σύστημα. Αν υποθεθεί ότι όλο το σύστημα βρίσκεται μέσα σε λουτρό σταθερής θερμοκρασίας $T=300K$ και το ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος του ελατηρίου στην κατάσταση ισορροπίας να βρεθούν:

- Η αρχική συσπείρωση του ελατηρίου και το εμβαδό του εμβόλου
- Η περίοδος της κίνησης του εμβόλου
- Το πλάτος ταλάντωσης του εμβόλου.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $P_{atm}=10^5 N/m^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$ $(130)^{1/2}=11,4$

Το έμβολο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για την ισορροπία του εμβόλου θα έχουμε

$$P_{atm}A + mg = PA + Kx_1 \text{ άρα } x_1 = 0,1m$$

Με την βοήθεια της ΚΕΙΑ για το ιδανικό αέριο μέσα στο δοχείο θα έχουμε:

$$PV = nRT$$

και με αντικατάσταση του όγκου του δοχείου $10^5 \cdot A(L_0 - x_1) = \frac{1}{R} \cdot R \cdot 300$ μετά από τις πράξεις θα

βρούμε:

$$A = 3 \cdot 10^{-3} m^2.$$

β) Επειδή το αέριο βρίσκεται μέσα σε λουτρό σταθερής θερμοκρασίας θα εκτελεί ισόθερμη μεταβολή.

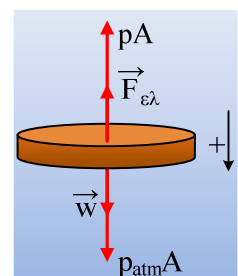
Από τον νόμο του Μπόιλ για την ισόθερμη μεταβολή θα ισχύει για την πίεση και τον όγκο:

$$PV_{αρχ} = P_{τελ} \cdot V_{τελ} \text{ ή } PA(L_0 - x_1) = P_{τελ}A(L_0 - x_1 - x) \text{ άρα } P_{τελ} = p \frac{L_0 - x_1}{L_0 - x_1 - x} \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε θετική φορά τη φορά προς τα κάτω η συνισταμένη των δυνάμεων για μία τυχαία θετική θέση θα είναι

$$\Sigma F = M_2g + P_{ατμ}A - K(x_1 + x) - P_{τελ}A \rightarrow$$

$$\Sigma F = -Kx + P_{ατμ}A - pA \frac{L_0 - x_1}{L_0 - x_1 - x} = -Kx + pA \frac{-x_1}{L_0 - x_1 - x} \quad (2)$$



αλλά από την υπόθεση της άσκησης ότι το x είναι πολύ μικρό σε σχέση με το $L_0 - x_1$ μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της εξίσωσης ότι το x του παρονομαστή της σχέσης (2) τείνει στο 0 οπότε η εξίσωση (2) θα πάρει μορφή γνωρίζοντας και ότι $P = P_{\text{atm}}$ θα καταλήξουμε

$$\Sigma F = - \left(K + \frac{pA}{L_0 - x_1} \right) x = -1.300x = -1300x \text{ (SI)}$$

$$\text{Αρα η περίοδος της γ.α.τ. θα είναι } T = 2\pi \sqrt{\frac{M_2}{D}} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{130}} \text{ s} \approx 0,55 \text{ s}.$$

γ) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση του σημειακού σώματος θα έχουμε:

$$M_1 g H = \frac{1}{2} M_1 u_1^2 \text{ θα βρούμε } u_1 = 1 \text{ m/s.}$$

Με την βοήθεια του τύπου των ελαστικών κρούσεων θα έχουμε

$$v_2' = \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2} = 0,4 \text{ m/s}$$

η οποία είναι και η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης

$$\text{Έτσι } v_2' = \omega A \text{ άρα } A = \frac{0,4}{\sqrt{130}} \text{ m} = 0,035 \text{ m}$$

xristoselef@gmail.com