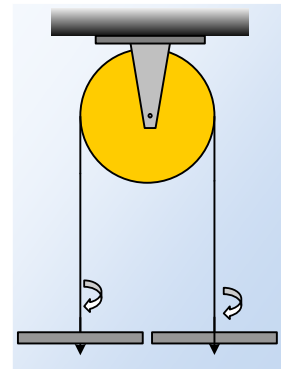


Τροχαλία και ράβδοι σε περιστροφή

Η τροχαλία του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M=6\text{Kg}$ και ακτίνα $R=0,5\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα O . Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές σκοινί που οι άκρες του καταλήγουν σε αβαρές λείο σύρμα. Δύο λεπτοί ομογενείς ράβδοι με μήκος $L=2R$ με μια μικρή σπή στο κέντρο μάζας τους έχουν μάζες $m_1=4\text{Kg}$ και $m_2=3\text{Kg}$ κρατιούνται οριζόντιες έχοντας περασμένο το σύρμα από το κέντρο μάζας τους ενώ τα κέντρα μάζας των δύο ράβδων είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Ο Αλέξανδρος, που σκέφτηκε την άσκηση και φυσικά του την αφιερώνω, δίνει ακαριαία στις δύο ράβδους αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 2 \text{ r/s}$ και φοράς αυτή που φαίνεται στο σχήμα ενώ ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνει ελεύθερες τις ράβδους. Η απόληξη του κάθε σκοινιού που έχει το σύρμα ουσιαστικά είναι και άξονας περιστροφής της κάθε ράβδου. Στο κάθε σύρμα έχουν δημιουργηθεί ειδικά «χείλια» για να μην μπορεί η ράβδος να ξεφύγει από το κάθε σκοινί. Να βρεθούν:

- A) Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.

- B) Η κινητική ενέργεια του συστήματος την χρονική στιγμή που τα κέντρα μάζας των δύο ράβδων απέχουν $d=\sqrt{2}$ m.

- Γ) Η εξίσωση του μέτρου της ταχύτητας του κάθε άκρου της κάθε ράβδου.

$$I_{\text{cmράβδου}} = 1/12 ML^2 \quad \& \quad I_{\text{cmτροχαλίας}} = 1/2 MR^2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Α) Από τους νόμους της μεταφορικής κίνησης για τις ράβδους και για την στροφική κίνηση της τροχαλίας θα έχουμε

$$m_1g - T_1 = m_1a \quad (1) \quad T_2 - m_2g = m_2a \quad (2) \quad \& \quad T_1R - T_2R = 1/2MR^2\alpha_{\text{cyl}} \quad (3)$$

μετά την λύση των εξισώσεων θα βρούμε $a=1\text{m/s}^2$. Επειδή το σχοινί δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της επιφάνειας της τροχαλίας θα είναι ίση με την επιτάχυνση των κέντρων μάζας των δύο ράβδων. Έτσι $a=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ άρα $\alpha_{\gamma\omega\nu}=2r/s^2$.

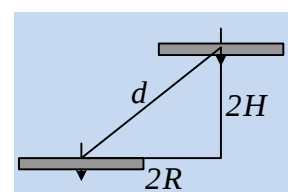
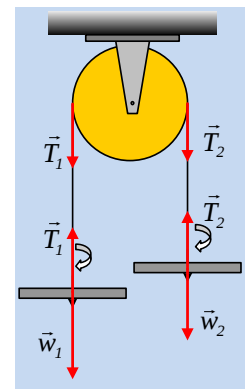
- Β) Όσο ανεβαίνει το κέντρο μάζας την μίας ράβδου τόσο κατεβαίνει το κέντρο μάζας της άλλης ράβδου.

Έτσι με τη βοήθεια του σχήματος θα βρούμε την κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας της κάθε ράβδου:

$$d^2 = (2R)^2 + (2H)^2 \quad \text{άρα θα βρούμε } H = 0,5\text{m.}$$

Από το νόμο του διαστήματος για την επιταχυνόμενη κίνηση θα βρούμε:

$$H = \frac{1}{2}at^2 \text{ άρα } t = 1\text{s.}$$



Η κάθε ράβδος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση μιας και οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτές δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή(βάρος και τάση νήματος) . Έτσι η κάθε ράβδος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση ενώ ταυτόχρονα επιταχύνεται μεταφορικά ενώ η τροχαλία επιταχύνεται στροφικά. Μετά από $t=1\text{s}$ το κέντρο μάζας της κάθε ράβδου θα έχει ταχύτητα $u_{\text{cm}}=at=1\text{m/s}$ ενώ η τροχαλία θα έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega=\alpha_{\text{γων}}t=2\text{r/s}$.

Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι

$$K_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} I_{\text{tp}} \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 u_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_2 u_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_0^2$$

και μετά από πράξεις $K_{\text{ολ}}=37/6 \text{ J}$

Γ)Το κάθε άκρο της ράβδου έχει πάντα δύο ταχύτητες. Μία εξαιτίας της περιστροφής με μέτρο $u_{\text{περ}}=\omega_0 L/2=1\text{m/s}$ και μία εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης της ράβδου η οποία είναι φυσικά ίση με την $u_{\text{cm}}=at=t \text{ (S.I.)}$ Οι δύο αυτές ταχύτητες είναι συνεχώς κάθετες μεταξύ τους άρα το μέτρο της συνολικής ταχύτητας της κάθε ράβδου θα δίνεται συνεχώς από τη σχέση

$$v_{\text{ολακρου}} = \sqrt{1+t^2} \quad (\text{SI})$$

xristoselef@gmail.com