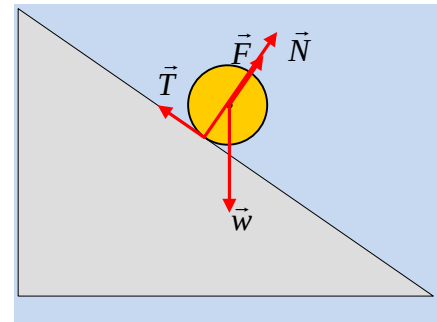


Χρονική συνάρτηση και κύλιση

Μία σφαίρα μάζας $M=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ αφήνεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από το κορυφή κεκλιμένου επιπέδου μεγάλου μήκους με $\eta\mu\phi=0,6$. Ταυτόχρονα ασκούμε στο κέντρο μάζας της σφαίρας δύναμη $F=2t$ (SI) κάθετη προς το κεκλιμένο επίπεδο με φορά προς τα πάνω. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σφαίρας και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu=0,4$ να βρεθούν:



Α) Ποια χρονική στιγμή θα σταματήσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση της σφαίρας

Β) Η χρονική στιγμή που θα χαθεί η επαφή με το δάπεδο

Γ) Την ταχύτητα του κέντρου μάζας την στιγμή της απογείωσης

Δ) Την γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας την στιγμή της απογείωσης

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I_{\text{cm}}=0,4MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Η μέγιστη στατική τριβή να θεωρηθεί ίση με την τριβή ολίσθησης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν υποθέσουμε ότι αρχικά η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει από τους νόμους του Νεύτωνα για την στροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$Mg\eta\mu\phi - T_{\sigma\tau} = ma \quad (1) \quad T_{\sigma\tau}R = 0,4MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \quad (2) \quad \text{θα βρούμε } a=30/7\text{m/s}^2 \text{ και } T_{\sigma\tau}=12/7 \text{ N}$$

Για να υπάρχει αρχικά κύλιση θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης δηλαδή

$$T_{\sigma\tau} < T_{\text{ολ}}$$

και για $t=0$ θα έχουμε $12/7 < \mu mg \sin\phi$ άρα $12/7 < 3,2$ που ισχύει άρα αρχικά η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Αν κάποτε άρχιζε η ολίσθηση η τριβή ολίσθησης θα ήταν συνάρτηση του χρόνου με εξίσωση

$$T_{\text{ολ}} = \mu(mg \sin\phi - F) = 3,2 - 0,8t \text{ (SI)} \quad (1)$$

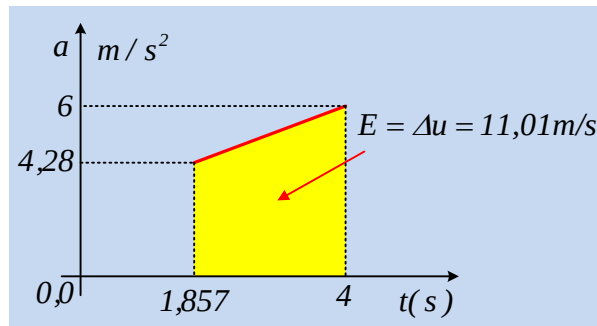
Η κύλιση θα σταματήσει όταν αρχίσει η ολίσθηση όταν δηλαδή κάποια στιγμή θα σπάσει η συνθήκη κύλισης. Αυτό θα συμβεί οριακά όταν $T_{\sigma\tau} = T_{\text{ολ}}$ άρα $12/7 = 3,2 - 0,8t$ άρα $t \approx 1,857\text{s}$

Β) Η επαφή με το δάπεδο θα χαθεί όταν μηδενιστεί η κάθετη δύναμη από το δάπεδο δηλαδή όταν η τριβή ολίσθησης θα μηδενιστεί. Από την εξίσωση (1) θα έχουμε $0 = 3,2 - 0,8t$ άρα $t = 4\text{s}$.

Γ) Την στιγμή που αρχίζει η ολίσθηση η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $u_{\text{cm}} = at = 7,96\text{m/s}$

Με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας θα έχουμε $mg\eta\mu\phi - T_{\text{ολ}} = ma_{\text{cm}}$ άρα $a_{\text{cm}} = 2,8 + 0,8t$ $1,857 \leq t \leq 4$ (SI)

Κάνοντας τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης με το χρόνο θα βρούμε με τη βοήθεια του εμβαδού την αύξηση της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας.



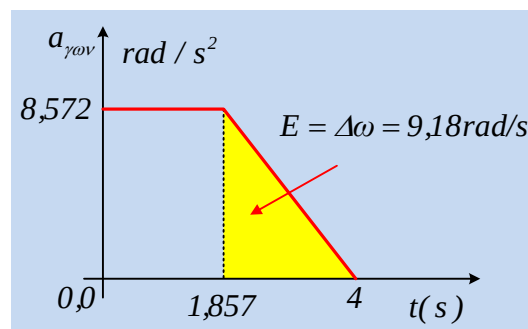
Έτσι την χρονική στιγμή που η σφαίρα θα απογειωθεί το κέντρο μάζας της θα έχει ταχύτητα μέτρου $u_{\text{απογ}} = 18.97 \text{ m/s}$

Δ) Η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας ήταν $\alpha_{\gamma\omega\nu} = a/R = 60/7 \text{ r/s}^2$. Όταν αρχίζει η ολίσθηση η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t \approx 15.92 \text{ r/s}$.

Με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της σφαίρας θα έχουμε

$$T_{\text{ολ}} R = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{άρα} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 16 - 4t \quad 1.857 \leq t \leq 4 \text{ (SI)}$$

Κάνοντας τη γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης με το χρόνο θα βρούμε με τη βοήθεια του εμβαδού την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας.



Έτσι την χρονική στιγμή που η σφαίρα θα απογειωθεί θα έχει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_{\text{απογ}} = 25.1 \text{ r/s}$.

xristoselef@gmail.com