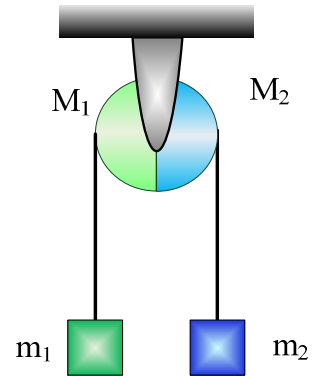


Μία τρέντυ τροχαλία

Η άσκηση αφιερώνεται στο Δάσκαλο Αντρέα Ιωάννου Κασσέτα μιας και η παρακάτω άσκηση «πηγάζει» από την δικιά του [Το μισό καρπούζι](#)

Δύο λεπτοί δίσκοι έχουν μάζες $M'_1 = 2\pi^2 \text{ kg}$ και $M'_2 = 8\pi^2 \text{ kg}$ είναι φτιαγμένοι από διαφορετικό υλικό ενώ έχουν την ίδια ακτίνα $R = 1 \text{ m}$. Κόβουμε τους δίσκους στην μέση και συγκολλάμε τα δύο διαφορετικά κομμάτια δημιουργώντας ένα νέο δίσκο. Τον δίσκο τον μετατρέπουμε σε τροχαλία δημιουργώντας μία μικρή οπή στο κέντρο του. Κρεμάμε δύο σημειακές μάζες $m_1 = 9 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ σε ένα σκοινί που έχουμε περάσει στην τροχαλία ενώ τα σώματα m_1 και m_2 κρατιούνται



στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και ενώ η τροχαλία έχει την διάμετρό συγκόλλησης των δύο δίσκων κατακόρυφη όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και το σύστημα ισορροπεί με τη βοήθεια εξωτερικής ροπής. Κάποια στιγμή καταργούμε την εξωτερική ροπή και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να περιστραφεί. Να βρεθούν:

α. Η φορά κίνησης του σώματος m_1 .

β. Η κινητική ενέργεια του συστήματος όταν η απόσταση των δύο σωμάτων γίνει $d = \sqrt{4 + \pi^2} \text{ m}$

γ. Η γωνία που έχει στραφεί η τροχαλία την στιγμή που το σύστημα έχει την μέγιστη κινητική του ενέργεια.

Δίνεται η ροπή αδράνειας δίσκου: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$, το κέντρο μάζας κάθε ημικυκλίου απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση $\ell = \frac{4R}{3\pi}$ και για τις πράξεις $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α. Για να βρούμε πως θα κινηθεί το σύστημα θα εξετάσουμε τις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων. Με τη βοήθεια του σχήματος έχουμε:

Για τις μάζες των ημικυκλίων ισχύει: $M_1 = \frac{M'_1}{2} = \pi^2 \text{ kg}$ και $M_2 = \frac{M'_2}{2} = 4\pi^2 \text{ kg}$

Η συνολική ροπή θα είναι (θεωρώντας θετική την αντίθετη φορά απ' αυτήν της κίνηση του ρολογιού):

$$\begin{aligned}\tau_{\text{ολ}} &= m_1 g R + M_1 g \ell - m_2 g R - M_2 g \ell = g(m_1 R + M_1 \frac{4R}{3\pi} - m_2 R - M_2 \frac{4R}{3\pi}) = \\ &= gR(m_1 + M_1 \frac{4}{3\pi} - m_2 - M_2 \frac{4}{3\pi}) = 10 \cdot 1(9 + \pi^2 \frac{4}{3\pi} - 1 - 4\pi^2 \frac{4}{3\pi}) = 10(8 - 4\pi) = -45,6 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Έτσι η φορά του συστήματος θα είναι η φορά του ρολογιού. Άρα το m_1 θα κινηθεί προς τα πάνω.

β. Η απόσταση των δύο σημειακών σωμάτων θα είναι d όταν το κάθε σώμα θα έχει μετακινηθεί κατά h .

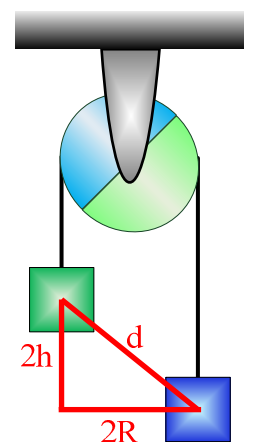
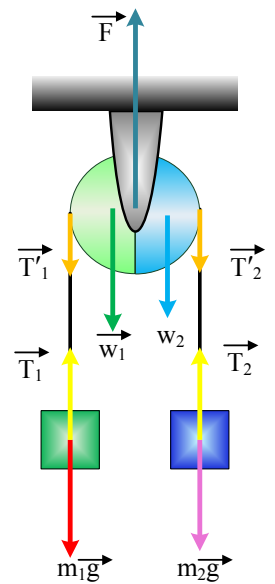
Με τη βοήθεια του ΠΘ θα έχουμε:

$$d^2 = (2R)^2 + (2h)^2 \Rightarrow 4 + \pi^2 = 4 + (2h)^2 \Rightarrow h = \frac{\pi}{2} \text{ m}.$$

Με την βοήθεια της σχέσης $h = R\theta$ θα βρούμε $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα από την αρχική θέση και μέχρι να υπάρξει στροφή $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ θα

έχουμε και με τη βοήθεια του σχήματος.

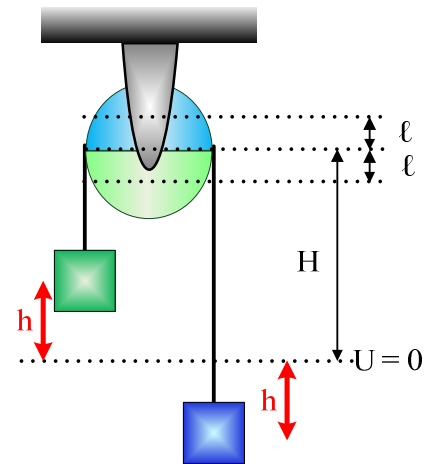


$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$M_2 g H + M_2 g H = m_1 g h - m_2 g h + M_1 g (H + \ell) + M_2 g (H - \ell) + K_{\sigma\sigma} \Rightarrow$$

$$K_{\sigma\sigma} = -m_1 g h + m_2 g h - M_1 g \ell + M_2 g \ell = -45\pi + 5\pi - \frac{40\pi}{3} + \frac{160\pi}{3} \Rightarrow$$

$$K_{\sigma\sigma} = 0$$



γ. Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο. Όταν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι θετική το σύστημα θα επιταχύνεται στροφικά με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος να αυξάνει. Κάποια χρονική στιγμή η συνισταμένη των ροπών θα γίνει 0 με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα να πάψει να αυξάνει. Αμέσως μετά η συνολική ροπή θα γίνει αρνητική οπότε η γωνιακή ταχύτητα θα αρχίσει να μειώνεται. Έτσι η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος θα συμβεί όταν στιγμιαία η συνισταμένη όλων των εξωτερικών ροπών του συστήματος θα γίνει ίση με μηδέν. Σε τυχαία θέση και με βάση το σχήμα θα πρέπει να ισχύει

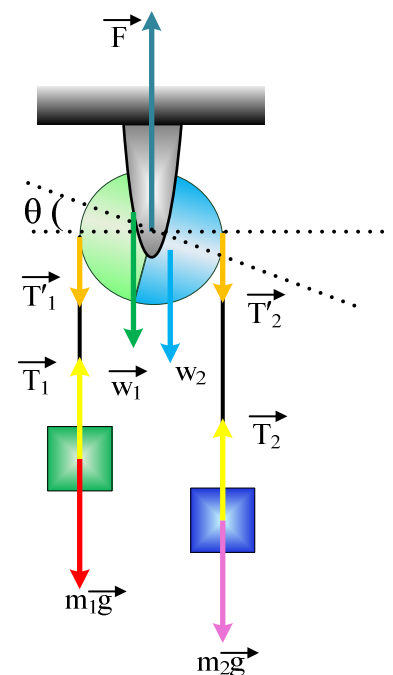
$$\tau_{\text{ολ}} = 0 \Rightarrow m_1 g R + M_1 g \ell \sin \theta - m_2 g R - M_2 g \ell \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$g(m_1 R + M_1 \frac{4R}{3\pi} \sin \theta - m_2 R - M_2 \frac{4R}{3\pi} \sin \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$gR(m_1 + M_1 \frac{4}{3\pi} \sin \theta - m_2 - M_2 \frac{4}{3\pi} \sin \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$10 \cdot 1(9 + \pi^2 \frac{4}{3\pi} \sin \theta - 1 - 4\pi^2 \frac{4}{3\pi} \sin \theta) = 10(8 - 4\pi \sin \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \theta \approx 50^\circ$$



xristoselef@gmail.com