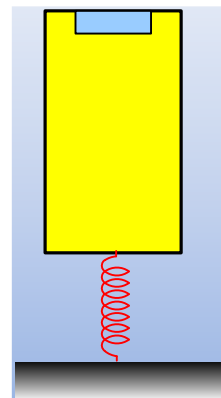


Ανάποδη επαφή.

Στο ανώτερο σημείο κυλινδρικού κουτιού μάζας $M=4\text{Kg}$ κρατάμε χωρίς να είναι κολημένο ένα δεύτερο σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ και αμελητέου πάχους. Το κατώτερο σημείο του κυλινδρικού κουτιού είναι δεμένο στο πάνω μέρος κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$. Ανυψώνουμε το σύστημα ώστε το ελατήριο να έχει επιμήκυνθεί κατά x_1 αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Κάποια στιγμή το δεύτερο σώμα χάνει την επαφή του με το κουτί έχοντας ταχύτητα $v=2(3)^{1/2}\text{m/s}$ και στην συνέχεια σώματα συγκρούονται εντελώς πλαστικά την στιγμή που το κουτί σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά.



- Α) Σε ποια θέση χάθηκε η επαφή των δύο σωμάτων;
- Β) Πόση είναι η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου;
- Γ) Ποιο το εσωτερικό ύψος του κυλινδρικού κουτιού;
- Δ) Ποιο το νέο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος;

Απάντηση:

Α) Για την κάθοδο του σώματος και αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε $-N - mg = m(-\omega^2\psi)$ άρα $N = m\omega^2\psi - mg$. Η επαφή θα χαθεί όταν $N=0$ άρα όταν $\psi = g/\omega^2$, $\psi = (M+m)g/K$ δηλαδή στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Β) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την κάθοδο του συστήματος μέχρι την στιγμή που θα χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων θα έχουμε

$$(M+m)gx_1 + \frac{1}{2}Kx_1^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 \text{ θα βρούμε } x_1 = 0,42\text{m}$$

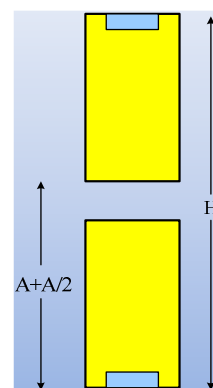
Γ) Μόλις χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων η θέση ισορροπίας του κουτιού θα βρίσκεται στην θέση $x_2 = Mg/K = 0,4\text{m}$. Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για το κουτί θα έχουμε

$$\frac{1}{2}Kx_2^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}KA^2 \text{ και μετά από πράξεις } A = 0,8\text{m}.$$

Το κουτί τη στιγμή της αποχώρησης του σώματος μάζας m βρίσκεται στην θέση $+A/2$ και η σύγκρουση θα γίνει στην θέση $-A$.

Με την βοήθεια της εξίσωσης $A/2 = A\eta\mu\omega t$ θα βρούμε $t = T/12$. Έτσι ο χρόνος μετάβασης του κουτιού αλλά και του σώματος από την αρχική θέση στην θέση $-A$ θα είναι $t = T/12 + T/4 = T/3 = 2\pi/15 = 0,42\text{s}$

Το σώμα μάζας m θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση άρα η κατακόρυφη απομάκρυνσή του θα δοθεί από τη σχέση $H = vt + \frac{1}{2}gt^2$ και μετά από πράξεις $H = 2,33\text{m}$. Με τη βοήθεια του σχήματος



$$L_{\text{κουτιού}} = H - 3A/2 = 1,13\text{m}$$

Δ) Η ταχύτητα του σώματος μάζας m την στιγμή της κρούσης θα είναι $v_2 = v + gt = 7,66\text{m/s}$

Η θέση ισορροπίας του συστήματος θα μεταφερθεί σε απόσταση από το φυσικό μήκος του ελατηρίου στην θέση $x_3 = (M+m)g/K = 0,5\text{m}$.

Για την κρούση και με τη βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε $mv_2 = (M+m)v_k$ άρα $v_k = 1,53\text{m/s}$

Φορτίο και κύλιση



Οι δύο ακίνητες μεταλλικές φορτισμένες σφαίρες με ακτίνες $R_1=R_2=0,1\text{m}$ του παραπάνω σχήματος έχουν μάζες $m_1=1\text{Kg}$ και $m_2=4\text{Kg}$ και φορτία $Q_1=10\mu\text{C}$ και $Q_2=560\mu\text{C}$ αντίστοιχα βρίσκονται σε άπειρη μεταξύ τους αρχική απόσταση πάνω σε μονωτικό και άπειρο οριζόντιο επίπεδο. Εκτοξεύουμε την πρώτη σφαίρα με αρχική οριζόντια ταχύτητα $u_0=10\text{m/sec}$ και κατάλληλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε η σφαίρα να αρχίσει αμέσως να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο πλησιάζοντας τη δεύτερη σφαίρα η οποία μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει συνεχώς. Να βρεθούν:

Α) Η απόσταση των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών τη στιγμή που το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής την κάθε σφαίρας θα γίνει μέγιστο αν υποθεθεί ότι το φορτίο τους είναι συνεχώς ισοκατανεμημένο στις εξωτερικές επιφάνειες των δύο σφαιρών.

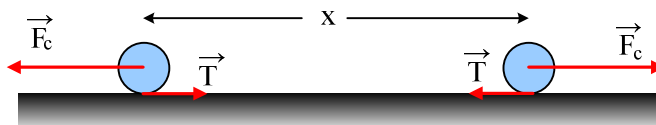
Β) Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των δύο σφαιρών όταν ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης της πρώτης σφαίρας γίνει ίσος με το 0.

Να υποθεθεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από κάθε σφαίρα είναι περίπου ηλεκτροστατικό και έχει την μορφή ενός πεδίου Coulomb.

Για τις σφαίρες $I_{cm}=2/5 \cdot M \cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Μόλις η πρώτη σφαίρα μπει στο ηλεκτρικό πεδίο της δεύτερης σφαίρας θα ασκηθεί πάνω της απωστική δύναμη. Η δύναμη αυτή θα αναγκάσει τη πρώτη σφαίρα να εκτελέσει επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση. Έτσι θα αναπτυχθεί και στατική τριβή με φορά προς τα εμπρός που θα επιβραδύνει μέσω της ροπής της στατικής τριβής την στροφορμή κίνησης. Την ίδια στιγμή θα αναπτυχθεί και στο δεύτερο φορτίο η απωστική δύναμη που θα επιταχύνει το δεύτερο φορτίο αλλά και δύναμη στατικής τριβής με φορά προς τα πίσω που θα επιταχύνει μέσω της ροπής της την στροφορμή κίνησης της δεύτερης σφαίρας. Από τους νόμους της μεταφορικής και της περιστροφικής κίνησης θα έχουμε



$$F \cdot T_{\text{στ}} = M \cdot \alpha \quad \& \quad T_{\text{στ}} \cdot R = 2MR^2 \alpha_{\text{γων}}/5 \quad \text{κάνοντας πράξεις } T = 2F/7 = 2KQ_1Q_2/7x^2$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής για την κάθε σφαίρα είναι

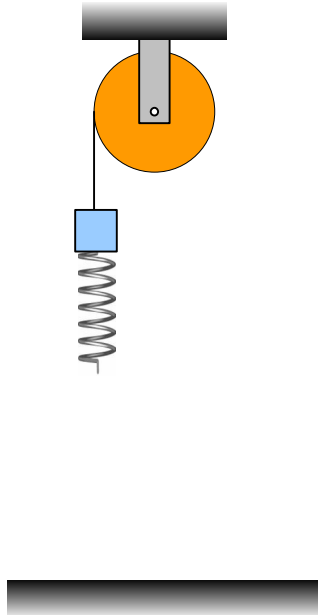
$\Delta L/\Delta t = T \cdot R = 2KQ_1Q_2R/7x^2$ θα είναι μέγιστο την στιγμή που απόσταση των δύο κέντρων των σφαιρών θα είναι ελάχιστο. Αυτό θα συμβεί όταν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας της κάθε σφαίρας γίνουν ίσες μεταξύ τους. Επειδή οι δυνάμεις προκαλούν τις ίδιες ωθήσεις στις δύο σφαίρες μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΟ για τις δύο σφαίρες $M_1U_0 = (M_1 + M_2)U_{\text{συσ}}$ άρα $U_{\text{συσ}} = 2\text{m/sec}$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ

$$1/2 M_1 U_0^2 + 1/2 I_1 \omega_0^2 = 1/2 M_1 U_{\text{συσ}}^2 + 1/2 I_1 \omega_2^2 + 1/2 M_2 U_{\text{συσ}}^2 + 1/2 I_2 \omega_2^2 + KQ_1 \cdot Q_2 / x_{\text{min}} \quad \text{άρα } x_{\text{min}} = 0,9\text{m}.$$

Β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης για την πρώτη σφαίρα θα δίνεται από τη σχέση $\Delta K/\Delta t = \Sigma F \cdot U$ άρα για να γίνει 0 θα πρέπει το σώμα να σταματήσει. Με την βοήθεια και πάλι της ΑΔΟ για το σύστημα το δύο σφαιρών $M_1U_0 = M_2 \cdot U_3$ θα βρεθεί $U_3 = 2,5\text{m/sec}$. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$1/2 M_1 U_0^2 + 1/2 I_1 \omega_0^2 = 1/2 M_2 U_3^2 + 1/2 I_2 \omega_3^2 + U \quad \text{θα βρούμε } U = 57,5\text{J}$$

Σώμα μάζας $m=1\text{ kg}$ που έχει στερεωμένο στο κάτω μέρος του αβαρές ελατήριο σταθεράς $K=75\text{ N/m}$ και φυσικού μήκους $l_0=0,5\text{ m}$ αφήνεται ελεύθερο από ύψος $H=1,5\text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Το πάνω μέρος του σώματος είναι δεμένο με αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους που είναι τυλιγμένο σε μία τροχαλία μάζας $M=8\text{ Kg}$.



Στο κάτω μέρος του ελατηρίου υπάρχει καρφί που μόλις έρθει σε επαφή με το έδαφος στερεώνει το ελατήριο στο έδαφος και το διατηρεί κατακόρυφο χωρίς απώλειες ενέργειας. Την στιγμή που το ελατήριο κολλάει στο έδαφος το νήμα κόβεται.

- A) Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια της τροχαλίας
- B) Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος m .
- Γ) Να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω.
- Δ) Να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Δίνεται για την τροχαλία το $I_{cm}=0,5M.R^2$. Δίνεται το $g=10\text{ m/sec}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για την κίνηση του σώματος m και της τροχαλίας θα έχουμε από τους νόμους του Νεύτωνα $m.g-T=m.a$ (1) και $T.R=0,5M.R^2.\alpha$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) θα βρούμε $a=2\text{ m/sec}^2$. Η κίνηση του σώματος m είναι ομαλά επιταχυνόμενη

μέχρι την στιγμή που το ελατήριο θα ακουμπήσει στο έδαφος. Εκείνη την στιγμή η τροχαλία θα έχει την μέγιστη κινητική της ενέργεια γιατί εκείνη την στιγμή το νήμα κόβεται άρα η τάση του νήματος καταργείται.

Από το νόμο του διαστήματος για την επιταχυνόμενη κίνηση θα πάρουμε:

$$H-l_0 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \text{θα βρούμε } t = 1 \text{ sec.}$$

$$H \cdot K_{\text{τρ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} \cdot M \cdot (a \cdot t)^2 = 8 \text{ J.}$$

Β) Μετά την επαφή του ελατηρίου με το έδαφος το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ γύρω από την θέση ισορροπίας για την οποία θα ισχύει $F_{\text{ελ}} = m \cdot g$ άρα $K \cdot x_{\text{ελ}} = m \cdot g$ άρα $x_{\text{ελ}} = \frac{2}{15} m$. Το σώμα την στιγμή της επαφής με το έδαφος έχει ταχύτητα $v = a \cdot t = 2 \text{ m/sec.}$

Μετά την έναρξη της α.α.τ. θα εφαρμόσουμε ΑΔΕΤ για την ταλάντωση

$$\frac{1}{2} K x_{\text{ελ}}^2 + \frac{1}{2} m \cdot U^2 = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

$$\text{άρα } A = \frac{4}{15} m \quad \omega = \sqrt{K/m} = 5\sqrt{3} \text{ rad/sec.}$$

$$\text{Άρα } U_{\text{max}} = \omega \cdot A = 4\sqrt{3}/3 \text{ m/sec} \quad \text{άρα } K_{\text{max}} = 8/3 \text{ J}$$

Γ) Αν υποθέσουμε ότι την στιγμή $t=0$ ξεκινάει η α.α.τ. με την επαφή του ελατηρίου στο έδαφος από την εξίσωση απομάκρυνσης θα έχουμε $\frac{2}{15} = \frac{4}{15} \eta \mu(\omega \cdot 0 + \phi_0)$ άρα $\eta \mu \phi_0 = \frac{1}{2}$ άρα $\phi_0 = 5\pi/6$ επειδή η ταχύτητα του σώματος είναι αρνητική την στιγμή $t=0$.

Έτσι η εξίσωση θα έχει την μορφή :

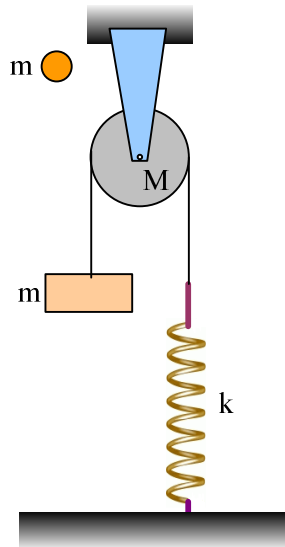
$$\psi = \frac{4}{15} \eta \mu(5\sqrt{3} \cdot t + 5\pi/6) \text{ (S.I.)}$$

Δ) Το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία στη ΘΕΑ άρα το ελατήριο θα έχει συσπειρωθεί συνολικά κατά $x_{\text{ελmax}} = A + x_{\text{ελ}} = 6/15 = 0,4 \text{ m}$. Το ίδιο θα μπορούσε να προκύψει με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική κατάσταση

$$m \cdot g \cdot (H - l_0 + x_{\text{ελmax}}) = K_{\text{τρ}} + \frac{1}{2} K \cdot x_{\text{ελmax}}^2 \quad \text{άρα } x_{\text{ελmax}} = 0,4 \text{ m.}$$

Τροχαλία και ελατήριο

Τροχαλία μάζας $M=4\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ ισορροπεί όπως στο παρακάτω σχήμα την βοήθεια ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$ που συνδέεται με μη εκτατό σχοινί με σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$.



Από ύψος $H=0,8\text{m}$ πάνω στην ίδια κατακόρυφο με το σώμα m αφήνουμε δεύτερο σώμα επίσης μάζας m που συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m . Να βρεθούν:

α) Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου

β) Η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος $2m$ κατά την κάθοδό του.

Το $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Για την πτώση του σώματος και από την ΑΔΕ θα έχουμε:

$$M \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad \text{άρα } v = 4\text{m/sec.}$$

Για την κρούση των σωμάτων θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$$

$$\text{άρα } m \cdot v \cdot R = I\omega + 2m \cdot v' \cdot R \quad \text{άρα } v' = 1\text{m/sec.}$$

Αρχικά το σύστημα ισορροπούσε με:

$$T = m \cdot g \quad \text{και } T = F_{\text{ελ}} \quad \text{άρα } x_{\text{ελαρ}} = 0,1\text{m.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ και μέχρι να σταματήσει το σύστημα να κινείται θα πάρουμε

$$\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v'^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 + 2mgx_{\text{max}} + \frac{1}{2} K x_{\text{αρχ}}^2 = \frac{1}{2} K (x_{\text{max}} + x_{\text{αρχ}})^2$$

$$\text{Άρα } x_{\text{max}} \approx 0,32\text{m.} \quad \text{Άρα } x_{\text{ελmax}} \approx 0,42\text{m.}$$

Β)Μετά την κρούση για τις κινήσεις των σωμάτων και της τροχαλίας θα πάρουμε από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση

$$2mg-T_1=2ma \quad (1)$$

$$T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = 0,5MR^2 \cdot \alpha_{γων} \quad (2)$$

$$T_2 = F_{ελ} = K(x + x_{ελαρχ}) \quad (3)$$

Από τις (1),(2) και (3) θα πάρουμε $a = 2,5 - 25x$ (S.I.) όπου x το διάστημα που διανύει το σύστημα 2m.

Παρατηρώ ότι η επιτάχυνση των σωμάτων μειώνεται και κάποια στιγμή θα γίνει αρνητική. Όταν το σώμα έχει $a > 0$ επιταχύνει και όταν έχει $a < 0$ επιβραδύνει. Έτσι την μέγιστη ταχύτητα θα την έχει το σύστημα όταν $a = 0$ άρα στην θέση $x = 0,1m$.

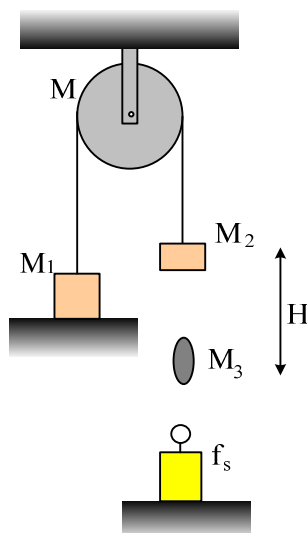
Εφαρμόζοντας ΑΔΕ για το σύστημα σωμάτων θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 2m \cdot v'^2 + 2mg \cdot x + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} K x_{αρχ}^2 = \\ = \frac{1}{2} 2m \cdot v_{max}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{max}^2 + \frac{1}{2} K (x + x_{ελ})^2 \end{aligned}$$

$$v_{max} = \sqrt{5/2} \text{ m/sec.}$$

Τροχαλία και φαινόμενο Doppler

Στο παρακάτω σχήμα η τροχαλία έχει μάζα $M=4\text{kg}$ και τα σώματα έχουν μάζες $M_1=2\text{kg}$ και $M_2=0,5\text{kg}$. Το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα.



Σώμα μάζας $M_3=0,5\text{kg}$ την χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $U=20\text{m/sec}$ και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας M_2 αφού διανύσει κατακόρυφη απόσταση $H=15\text{m}$. Στην ίδια κατακόρυφο με τα σώματα M_2 και M_3 υπάρχει ακίνητη πηγή παραγωγής αρμονικών ήχων με συχνότητα εκπομπής $f_s=680\text{Hz}$.

Να παρασταθεί γραφικά η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ανιχνευτής που είναι προσαρμοσμένος πάνω στο σώμα μάζας M_3 αν υποτεθεί ότι δεν καταστρέφεται στην διάρκεια της πλαστικής κρούσης. Η γραφική παράσταση να δοθεί από την στιγμή $t=0$ μέχρι την στιγμή που το σώμα M_3 θα σταματήσει στιγμιαία για δεύτερη φορά.

Το $I_{cm}=0,5M \cdot R^2$ και $U_{\eta\chi}=340\text{m/sec}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σώματος M_3 θα έχουμε:

$$K_1 = K_2 + UW$$

$$\text{άρα } U_3=10\text{m/sec}$$

και από το νόμο της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα πάνω θα βρούμε το χρόνο μέχρι την κρούση:

$$U_3=U-g \cdot t_1 \quad \text{άρα } t_1=1\text{sec.}$$

ΑΔΟ για την πλαστική κρούση:

$$M_3 \cdot U_3=(M_2+M_3)U_{\sigma} \quad \text{άρα}$$

$$U_{\sigma}=5\text{m/sec.}$$

Αν υποθέσουμε ότι το νήμα αμέσως μετά την κρούση είναι πλέον χαλαρό το σύστημα των σωμάτων M_2-M_3 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα πάνω με την επίδραση μόνο του βάρους των δύο σωμάτων. Έτσι και πάλι με την βοήθεια του νόμου της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε μέχρι το σύστημα των σωμάτων να σταματήσει $0=5-10t_2$ άρα $t_2=0,5\text{sec}$. Στην συνέχεια έχουμε ελεύθερη πτώση των δύο σωμάτων μέχρι να έρθει η στιγμή για να τεντωθεί και πάλι το νήμα. Ο χρόνος ανόδου είναι ίσος με τον χρόνο καθόδου έτσι σε χρόνο $t_3=0,5\text{sec}$ το νήμα θα είναι έτοιμο να τεντωθεί.

Για το τέντωμα του νήματος θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ έτσι

$$(M_2+M_3) \cdot U_{\sigma} \cdot R=(M_2+M_3+M_1) \cdot U_{\text{κοιν}} \cdot R +I \cdot \omega$$

$$1.5 \cdot R=3 \cdot U_{\text{κοιν}} \cdot R+0,5 \cdot 4 \cdot U_{\text{κοιν}} \cdot R \quad \text{άρα } U_{\text{κοιν}}=1\text{m/sec.}$$

Το σύστημα $M_1-M_2-M_3$ -τροχαλίας θα εκτελέσει επιβραδυνόμενη κίνηση γιατί η εξωτερική ροπή του βάρους του σώματος M_1 είναι μεγαλύτερη από την εξωτερική ροπή του βάρους του συστήματος M_2-M_3 . Από τους νόμους κίνησης των σωμάτων και της τροχαλίας θα έχουμε

$$M_1 \cdot g-T_1=M_1 \cdot a \quad (1) \quad T_2-(M_2+M_3) \cdot g=(M_2+M_3) \cdot a \quad (2)$$

$$T_1 \cdot R-T_2 \cdot R=0,5 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Μετά από πράξεις $a=2\text{m/sec}^2$.

Αρα με τον νόμο της επιβραδυνόμενης κίνησης για το σύστημα M_2-M_3
και μέχρι το σύστημα να σταματήσει από τον νόμο της ταχύτητα
 $U=U_{\text{κοιν}}-a.t_4$ θα βρούμε $t_4=0,5\text{sec}$.

Για την πρώτη κίνηση του σώματος M_3 η εξίσωση της συχνότητας που καταγράφει ο ανιχνευτής θα είναι

$$F_1=\{340-(20-10t)\}.680/340=640+20t \quad 0<t<1 \quad (\text{S.I})$$

Μετά την πλαστική κρούση και για την άνοδο του συστήματος M_2-M_3

$$F_2=\{340-(5-10t')\}.680/340=670+20t' \quad 0<t'<0,5 \quad (\text{S.I}) \quad \text{με } t'=t-1 \quad (\text{S.I})$$

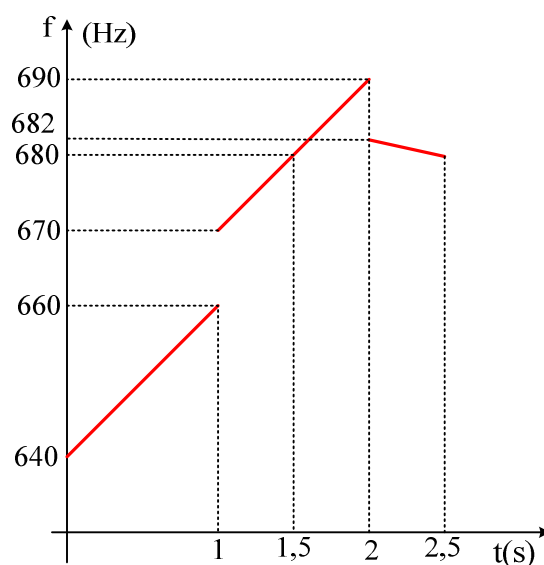
Για την κάθοδο του συστήματος M_2-M_3 και μέχρι το τέντωμα του νήματος

$$F_3=\{340+10t''\}.680/340=680+20t'' \quad 0<t''<0,5 \quad (\text{S.I}) \quad \text{με } t''=t-1,5 \quad (\text{S.I.})$$

Μετά το τέντωμα του νήματος και μέχρι να σταματήσει στιγμιαία το σύστημα

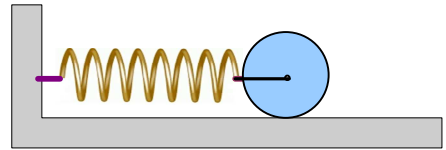
$$F_4=\{340+(1-2t''')\}.680/340=682-4t''' \quad 0<t'''<0,5 \quad (\text{S.I}) \quad \text{με } t'''=t-2 \quad (\text{S.I.})$$

Ετσι η γραφική παράσταση θα είναι η παρακάτω



Τρία στερεά σε δύο ταλαντώσεις

Τρία ίδιας μάζας $M=3/4 \text{ Kg}$ και ίδιας ακτίνας στερεά σώματα, ένας λεπτός δίσκος, μία σφαίρα και ένα δαχτυλίδι μπορούν να κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το καθένα από τα παραπάνω σώματα δένεται με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς



$K=120 \text{ N/m}$ με το κέντρο του κάθε στερεού ενώ η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι μόνιμα στερεωμένη. Το κάθε στερεό ισορροπεί και στο καθένα από αυτά και την στιγμή $t=0$ ασκούμε στο κέντρο του σταθερή οριζόντια δύναμη $F=60 \text{ N}$ έτσι ώστε το κάθε ελατήριο να μπορεί να επιμηκύνεται.

- Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. καθώς και να βρεθεί πόσο θα είναι τότε το πλάτος ταλάντωσης του κέντρου μάζας του κάθε στερεού;
- Μετά από πόσο χρόνο πρέπει να καταργηθεί η δύναμη στο καθένα από τα παραπάνω στερεά έτσι ώστε να σταματήσει η περιοδική κίνηση του κάθε στερεού. Ποιο κέντρο μάζας κάποιου από τα παραπάνω στερεά θα μπορούσε να σταματήσει πρώτο; Σε πόσο χρόνο;
- Αν καταργηθεί η εξωτερική δύναμη θα συνεχίσει το κέντρο μάζας του κάθε στερεού να εκτελεί γ.α.τ. Σε ποια θέση σε σχέση με το φυσικό μήκος του κάθε ελατηρίου θα πρέπει να καταργηθεί η κάθε δύναμη για ταλαντώνεται το σύστημα με την μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης;

Δίνονται ο ροπές αδράνειας $I_{\text{δίσκ}}=MR^2$ $I_{\text{δίσκ}}=0,5MR^2$ και $I_{\text{σφ}}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για τη θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας θα ισχύει:

$$F=kx_1 \quad (1)$$

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του κάθε στερεού ισχύει

$\Sigma F=Ma_{\text{cm}}$ και για μία τυχαία θετική απομάκρυνση:

$$k(x+x_1)-F-T=Ma_{\text{cm}} \quad (2)$$

Για την στροφική κίνηση του κάθε στερεού ισχύει

$$\Sigma \tau=I_{\gamma_{\text{ων}}} \alpha_{\gamma_{\text{ων}}} \text{ άρα } TR=\lambda MR^2 \alpha_{\gamma_{\text{ων}}} \text{ άρα } T=\lambda Ma_{\text{cm}} \quad (3)$$

$$\text{Από (1),(2) \& (3) } T=\lambda kx/(1+\lambda) \quad (5)$$

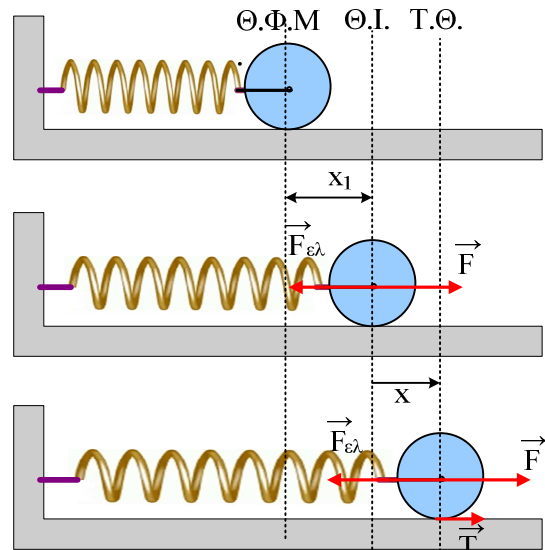
Για την ταλάντωση και για μία θετική απομάκρυνση με τη βοήθεια της σχέσης (5) θα έχουμε:

$$\Sigma F=F+T-F_{\text{ελ}}=-kx/(\lambda+1)$$

Άρα το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. με $D=k/(\lambda+1)$

Το κάθε στερεό την στιγμή $t=0$ ήταν ακίνητο άρα το κέντρο μάζας του βρισκόταν στην θέση $x=-A$. Η θέση ισορροπίας για κάθε στερεό βρισκόταν στην θέση $\Sigma F=0$ άρα $F=F_{\text{ελ}}$ άρα $60=120x_1$ άρα $x_1=A=0,5 \text{ m}$.

β) Αν καταργηθεί η εξωτερική δύναμη F τότε για να σταματήσει την περιοδική κίνησή το κέντρο μάζας του κάθε στερεού θα πρέπει να ισορροπεί. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το εκτελεί ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει για το χρόνο εφαρμογής της δύναμης



$$t = t = NT = N \cdot 2\pi \sqrt{\frac{M(1+\lambda)}{k}} \quad \text{με } N \text{ να ανήκει στους ακεραίους.}$$

Ο μικρότερος χρόνος φυσικά αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση και στην μικρότερη τιμή του λ . Άρα το κέντρο μάζας της σφαίρας θα μπορούσε να σταματήσει πρώτο σε χρόνο $t = \pi/10 \text{ sec}$.

γ) Μετά την κατάργηση της εξωτερικής δύναμης η θέση ισορροπίας του κάθε συστήματος μεταφέρεται στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του κάθε στερεού ισχύει

$$\Sigma F = Ma_{\text{cm}} \quad \text{και για μία τυχαία θετική απομάκρυνση } kx - T = Ma_{\text{cm}} \quad (6)$$

Για την στροφική κίνηση του κάθε στερεού ισχύει

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\text{γων}} \quad \text{άρα } TR = \lambda MR^2 \alpha_{\text{γων}} \quad \text{άρα } T = \lambda Ma_{\text{cm}} \quad (7)$$

$$\text{Από (6) \& (7) } T = \lambda kx / (1 + \lambda) \quad (8)$$

Για την ταλάντωση και για μία θετική απομάκρυνση με τη βοήθεια της σχέσης (8) θα έχουμε

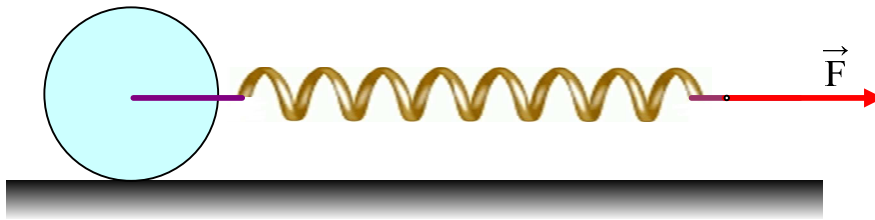
$$\Sigma F = T - F_{\text{ελ}} = -kx / (\lambda + 1)$$

Άρα και πάλι το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. με $D = k / (\lambda + 1)$

Η ενέργεια ταλάντωσης ισοδυναμεί με το έργο της εξωτερικής δύναμης F . Το έργο αυτό θα είναι μέγιστο όταν η μετατόπιση του σώματος είναι η μέγιστη και αυτό συμβαίνει μέχρι το κάθε στερεό να φτάσει στην μέγιστη θέση απομάκρυνσης. Άρα όταν το ελατήριο έχει την μέγιστη δυνατή του απομάκρυνση δηλαδή $x_{\text{max}} = 2A = 1\text{m}$.

Τραβώντας μέσω ελατηρίου τον κύλινδρο τον θέτουμε σε κύλιση.

Ένα οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ είναι στερεωμένο στο κέντρο ενός κυλίνδρου μάζας $m=4\text{kg}$ που ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Την στιγμή $t=0$ και ενώ το ελατήριο έχει αρχική επιμήκυνση $0,3\text{m}$ (και ο κύλινδρος συγκρατείται ακίνητος), ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου οριζόντια μεταβλητή δύναμη $F=30+10x$ (S.I.) όπου x η οριζόντια μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης και την στιγμή $t=0$ βρισκόταν στην θέση $x=0$. Ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Να βρεθούν:

- A) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου σε συνάρτηση με την μετατόπιση x του σημείου εφαρμογής της δύναμης και να αποδοθεί γραφικά η σχέση $a_{cm}=f(x)$.
- B) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F είναι $x=6\text{m}$.
- Γ) Τι ποσοστό του έργου της δύναμης έχει αποθηκευτεί σε μορφή δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου από την στιγμή $t=0$ μέχρι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου να αποκτήσει ταχύτητα $U_{cm}=\sqrt{202,5}\text{ m/sec}$.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δίνεται από την σχέση $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η δύναμη F που ασκείται στο άκρο του ελατηρίου μεταφέρεται στο άλλο άκρο του ελατηρίου και για την $x=0$ $F=F_{ελ}$ αφού $F=30+10\cdot 0=30\text{N}$ και $F_{ελ}=Kx_{ελ}=100\cdot 0,3=30\text{N}$.

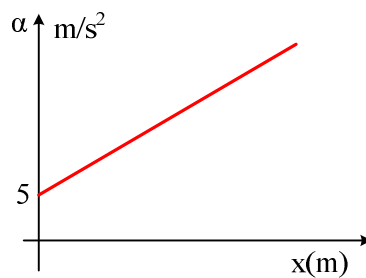
Από τους νόμους για την μεταφορική και την στροφική κίνηση θα έχουμε για τον κύλινδρο

$$F-T=m\cdot a_{cm} \quad \text{άρα} \quad 30+10x-T=4a_{cm} \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

$$T.R = I.a\gamma\omega \quad \text{άρα} \quad T = 0,5.4a\text{cm} = 2a\text{cm} \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \quad 30 + 10x = 6a\text{cm} \quad \text{άρα} \quad a\text{cm} = (30 + 10x)/6 \quad (\text{S.I.})$$

Η γραφική παράσταση θα είναι

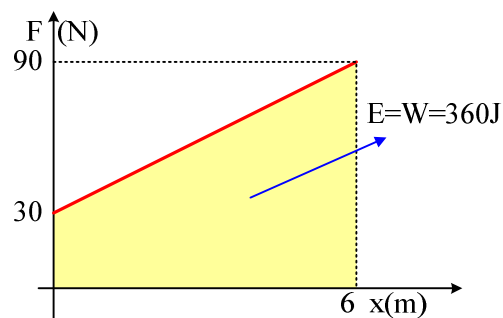


Β) Από την ΑΔΕ για την μετακίνηση κατά $x=6\text{m}$ θα έχουμε

$$U_{\text{ελαρχ}} + W_F = U_{\text{ελτελ}} + K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}}$$

$$\frac{1}{2}Kx_{\text{ελαρχ}}^2 + W_F = \frac{1}{2}Kx_{\text{ελτελ}}^2 + \frac{1}{2}MU_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3)$$

Η $F_{\text{ελ}} = 30 + 10x$ άρα $100x_{\text{ελ}} = 30 + 10x$ και για $x=6\text{m}$ θα
 $x_{\text{ελτελ}} = 0,9\text{m}$. Από την γραφική παράσταση της δύναμης με το x βρούμε



Από την (3) θα έχουμε $4,5 + 360 = 40,5 + 3U_{\text{cm}}^2$ άρα $U_{\text{cm}} = 6\sqrt{3}\text{m/sec}$.

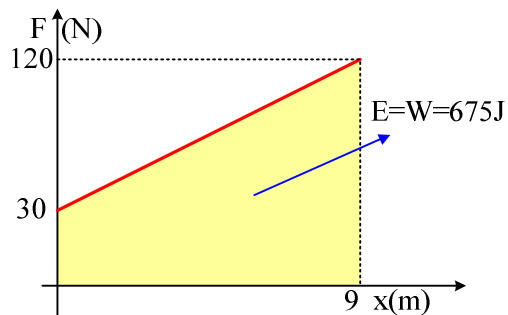
Γ) Από την ΑΔΕ για μετακίνηση του σημείο εφαρμογής της δύναμης κατά x θα έχουμε

$$U_{\text{ελαρχ}} + W_F = U_{\text{ελτελ}} + K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}}$$

$$1/2 K x_{\text{ελαρχ}}^2 + W_F = 1/2 K x_{\text{ελτελ}}^2 + 1/2 M U_{\text{cm}}^2 + 1/2 I \omega^2$$

$1/2 K x_{\text{ελαρχ}}^2 + (30+30+10x)x/2 = 1/2 K (0,3+0,1x)^2 + 1/2 M U_{\text{cm}}^2 + 1/2 I \omega^2$
 θα βρούμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $4,5x^2 + 27x - 607,5 = 0$ που έχει δεκτή λύση το $x = 9\text{m}$.

Το W_F πάλι από τη γραφική παράσταση θα βρεθεί

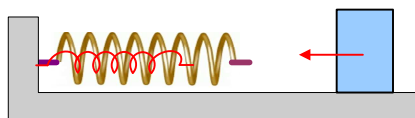


Το $x_{\text{ελτελ}} = 1,2\text{m}$ άρα η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου θα είναι $\Delta U_{\text{ελ}} = 72 - 4,5 = 67,5\text{J}$.

$$\text{Άρα το } \Pi = 67,5/675 \cdot 100\% = 10\%$$

Το σώμα πέφτει σε δύο ελατήρια

Δύο οριζόντια ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=100\text{N/m}$ και $K_2=300\text{N/m}$ και έχουν φυσικό μήκος $l_1=1\text{m}$ και $l_2=0,8\text{m}$. Το ένα ελατήριο βρίσκεται μέσα στο άλλο και το ένα άκρο τους είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχωμα. Ένα σώμα μάζας $m=4\text{Kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $u=2\text{m/s}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με κατεύθυνση προς τα δύο ελατήρια. Τη στιγμή $t=0$ το σώμα ακουμπά το πρώτο ελατήριο και συνδέεται με αυτό χωρίς απώλεια ενέργειας. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και μετά από λίγο μόλις το σώμα ακουμπήσει και το δεύτερο ελατήριο. Να βρεθούν:



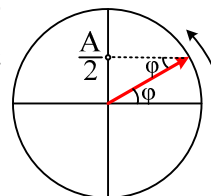
- A) Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα ακουμπήσει το δεύτερο ελατήριο;
 B) Αν το σύστημα θα εκτελέσει γ.α.τ. και αν εκτελεί γ.α.τ. , να βρεθεί η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσής του συστήματος
 Γ) Το πλάτος της τελικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα

Απάντηση:

- A) Αρχικά και μέχρι να γίνει η επαφή με το δεύτερο ελατήριο μόνο το ελατήριο με σταθερά K_1 είναι δεμένο με το σώμα μάζας m . Η αρχική ταχύτητα είναι η μέγιστη άρα και $u=\omega \cdot A$, όπου

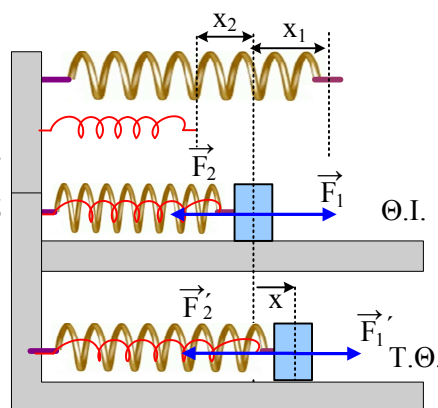
$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 5 \text{ rad / s} . \text{ Κατά συνέπεια } A = u/\omega = 0,4\text{m}.$$

Το σώμα εκτελεί μέρος γ.α.τ. και θα κάνει χρόνο t_1 μέχρι να συναντήσει το δεύτερο ελατήριο μιας και πάει από την ΘΙΤ στην θέση $A/2$. Με χρήση του κύκλου αναφοράς της ταλάντωσης βρίσκουμε $\varphi = \omega t$ όπου $\varphi = \pi/6$, οπότε:



$$t_1 = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi/6}{5} \text{ s} = \frac{\pi}{30} \text{ s}$$

- B) Μετά την συμπίεση των δύο ελατηρίων και την κίνηση του σώματος προς τα δεξιά, κάποια στιγμή το ελατήριο k_2 τεντώνεται, συνεπώς υπάρχουν δύο δυνάμεις από τα ελατήρια οι οποίες προσπαθούν να σπρώξουν το σώμα προς την ΘΦΜΕ του καθενός από αυτά. Κάπου λοιπόν ανάμεσα από αυτές τις δύο θέσεις θα υπάρχει η θέση ισορροπίας του συστήματος και για τα μέτρα των δύο δυνάμεων των ελατηρίων θα ισχύει $F_{ελ1}=F_{ελ2}$ άρα



$$K_1 \cdot x_1 = K_2 \cdot x_2 \quad (1)$$

$$\text{Όπου } x_1 + x_2 = l_1 - l_2 \quad (2)$$

και από τις (1) και (2) $x_1 = 0,15 \text{ m}$ και $x_2 = 0,05 \text{ m}$

Αν απομακρύνουμε λίγο το σώμα από την ΘΙΤ θα ισχύει

$$\Sigma F = -F'_{ελ1} - F'_{ελ2} = K_1(\chi_1 - \chi) - K_2(\chi_2 + \chi) = -(K_1 + K_2)\chi \quad \text{άρα } D = 400 \text{ N/m}$$

Γ) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για το σώμα από την στιγμή της πρώτης επαφής με το πρώτο ελατήριο μέχρι τη στιγμή με την επαφή με το δεύτερο ελατήριο θα έχουμε

$$\frac{1}{2} m \cdot u^2 = \frac{1}{2} m \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} K_1 \cdot (l_1 - l_2)^2 \quad \text{θα βρούμε } u_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

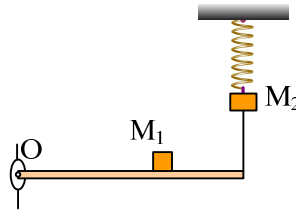
Το σώμα μετά και την δεύτερη επαφή του με το δεύτερο ελατήριο εκτελεί πλέον ολοκληρωμένη γ.α.τ. με $D = 400 \text{ N/m}$ και ευρισκόμενο απόσταση $x_2 = 0,05 \text{ m}$ από τη νέα ΘΙΤ της ταλάντωσης.

Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΔΕΤ για την νέα ταλάντωση θα έχουμε

$$\frac{1}{2} D \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot u_1^2 = \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{και μετά από πράξεις } A = 0,05 \sqrt{13} \text{ m}$$

Το σώμα θα χάσει την επαφή;

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος έχει μάζα $M=3\text{Kg}$ και μήκος $L=1,2\text{m}$ και ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια κατακόρυφου νήματος .



Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που βρίσκεται στο άκρο της O . Ο άξονας περιστροφής απέχει από το έδαφος ύψος $H=1,2\text{m}$. Πάνω στην ράβδο και σε απόσταση $l=1\text{m}$ από το σημείο O χωρίς να είναι κολλημένο ισορροπεί σώμα μάζας M_1 . Το σώμα μάζας M_2 ισορροπεί με τη βοήθεια του νήματος και κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K . Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Αν οι μέγιστες κινητικές ενέργειες (όποια στιγμή και αν αποκτηθούν αυτές) της ράβδου του σώματος M_1 και του σώματος M_2 είναι μεταξύ τους ίσες να βρεθούν:

Α) Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου

Β) Την τάση του νήματος πριν αυτό κοπεί

Γ) Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος M_2 .

Για την ράβδο $I_O = \frac{1}{3}ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Πρέπει να βρούμε αν θα χαθεί ή όχι η επαφή του σώματος M_1 με την ράβδο την στιγμή που κόβουμε το νήμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι χάνεται η επαφή του σώματος M_1 με την ράβδο. Τότε για την κίνηση της ράβδου από τον νόμο της κίνησης της θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot L/2 = 1/3 \cdot M \cdot L^2 \cdot \alpha_{\text{γων}}$$

$$\text{άρα } \alpha_{\text{γων}} = 12,5 \text{ rad/sec}^2.$$

Το σημείο λοιπόν της ράβδου που βρίσκεται σε επαφή με το σώμα M_1 θα έχει γραμμική επιτάχυνση $a_1 = \alpha_{\text{γων}} \cdot l = 12,5 \text{ m/sec}^2$ που είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας. Έτσι το σώμα με μάζα M_1 θα χάσει την επαφή του με την ράβδο την στιγμή που θα κοπεί το νήμα. Η ράβδος θα εκτελέσει επιταχυνόμενη στροφικά κίνηση με την επίδραση μόνο της ροπής του βάρους της ράβδου. Το σώμα M_1 θα εκτελέσει ελεύθερη πτώση μιας και έχασε την επαφή του με την ράβδο.

Την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα η ράβδος θα την έχει την στιγμή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας δηλαδή στην θέση που θα έχει γίνει κατακόρυφη. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση στην κατακόρυφη θέση θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot L/2 = 1/2 \cdot 1/3 \cdot M L^2 \cdot \omega_{\text{max}}^2 \quad \text{άρα } \omega_{\text{max}} = 5 \text{ rad/s}$$

Β) Η $K_{\text{max}} = 1/2 \cdot 1/3 \cdot M L^2 \cdot \omega_{\text{max}}^2 = 18 \text{ J}$ για την ράβδο η οποία είναι όμως ίση με την K_{max} του σώματος μάζας M_1 . Αυτό θα αποκτήσει μέγιστη ενέργεια όταν φτάσει στο έδαφος. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σώμα μάζας M_1

$$M_1 \cdot g \cdot L = K_{\text{max}} \quad \text{άρα } M_1 = 1,5 \text{ Kg.}$$

Για την ισορροπία του συστήματος ράβδου- M_1 θα έχουμε

$$-M \cdot g \cdot L/2 - M_1 \cdot g \cdot l + T \cdot L = 0 \quad \text{άρα } T = 27,5 \text{ N}$$

Γ) Το σώμα μάζας M_2 θα έχει μέγιστη κινητική ενέργεια στην ΘΙΤ και από την ΑΔΕΤ θα έχουμε $K_{\text{max}} = U_{\text{max}} \quad \text{άρα } 18 = 1/2 \cdot K \cdot A^2 \quad (1)$

Για την αρχική ισορροπία του σώματος M_2 θα ισχύει

$$T + M_2 \cdot g = K \cdot x_1 \quad (2)$$

Για την τελική ισορροπία του σώματος M_2 θα ισχύει

$$M_2 \cdot g = K \cdot x_2 \quad (3)$$

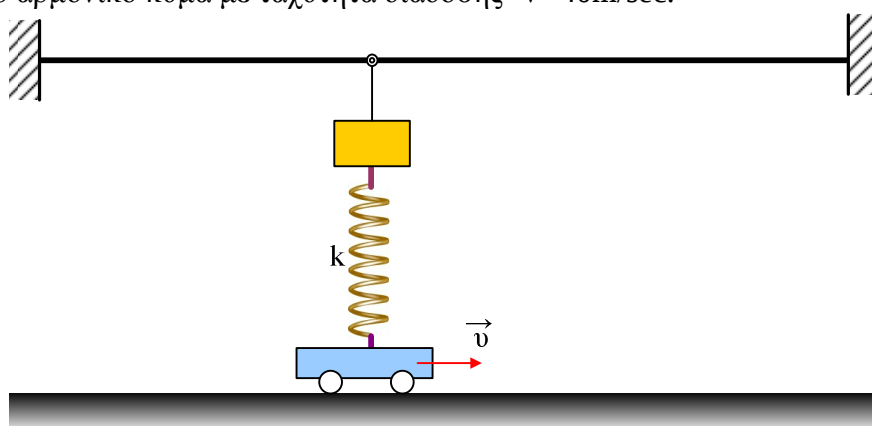
Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα μάζας M_2 δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του άρα το

$$x_1 - x_2 = A \quad (4) \text{ με αφαίρεση της (2) και (3)}$$

$T/K = A$ και με την βοήθεια της (1) θα βρούμε $A = 72/55 \text{ m}$

Το κύμα σε μια χορδή και το φαινόμενο Doppler

Ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=3600\pi^2\text{N/m}$ είναι προσαρμοσμένο-στερεωμένο πάνω σε ένα ειδικό καροτσάκι που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και με σταθερή ταχύτητα $v=10\text{m/sec}$ πάνω σε οριζόντιο δρόμο χωρίς να μπορεί να αποχωριστεί από τον οριζόντιο δρόμο. Στο πάνω μέρος του ελατηρίου στερεώνουμε σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ και το σώμα μέσω ειδικού γάντζου συνδέεται με αβαρή οριζόντια ελαστική χορδή μεγάλου μήκους πάνω στην οποία μπορεί να διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα διάδοσης $V=40\text{m/sec}$.



Την χρονική στιγμή $t=0$ και ενώ το σύστημα ισορροπεί δίνουμε στο σώμα μάζας m κατακόρυφη ταχύτητα $U=15\pi\text{ m/sec}$ προς τα πάνω και την ίδια στιγμή το καροτσάκι ξεκινάει την ομαλή του κίνηση.

- A) Ποια η συχνότητα ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της ελαστικής χορδής.
B) Να χαραχθεί η μορφή της ελαστικής χορδής την χρονική στιγμή $t=0,2\text{sec}$ θεωρώντας $x=0$ την θέση της πηγής εκείνη την στιγμή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε μία κινούμενη πηγή που δημιουργεί ένα κύμα στην οριζόντια ελαστική χορδή. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης θα μας δώσει το πλάτος ταλάντωσης σύμφωνα με την σχέση $U=\omega \cdot A$ και $\omega_{\text{πηγής}}=\sqrt{K/m}=60\pi\text{ r/sec}$ Άρα $A=0,25\text{m}$. Η πηγή κινείται έτσι τα σημεία της χορδής που τα αφήνει πίσω της θα ταλαντώνονται με διαφορετική συχνότητα από τα σημεία που θα τα βρεί μπροστά της. Έτσι με βάση το φαινόμενο Doppler θα πάρουμε

$F_1=VF_s/(V-v)=40\text{Hz}$ για τα σημεία που πλησιάζει η πηγή και

$F_2=VF_s/(V+v)=24\text{Hz}$ για τα σημεία από όπου απομακρύνεται η πηγή.

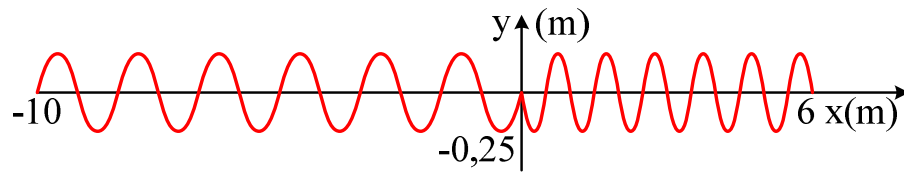
Το μήκος κύματος αν πηγή ήταν ακίνητη θα ήταν:
 $\lambda_s=40/30=4/3\text{m}$.

Το μήκος κύματος για τα σημεία μπροστά από την πηγή θα είναι:
 $\lambda_1=\lambda_s-v \cdot T_s=4/3-10/30=1\text{m}$.

Το μήκος κύματος για τα σημεία πίσω από την πηγή θα είναι :
 $\lambda_2=\lambda_s+v \cdot T_s=4/3+10/30=5/3\text{m}$.

Ο χρόνος $t=0,2\text{sec}$ αντιστοιχεί σε $6T$ s άρα θα έχουν διαδοθεί 6 μήκη κύματος προς τα μπρος και 6 προς τα πίσω σε σχέση με την πηγή.

Έτσι η μορφή της χορδής θα είναι θεωρώντας σαν αρχή $x=0$ την πηγή των κυμάτων την στιγμή $t=0,2\text{sec}$



Το κύμα διαδίδεται και η σημαδούρα;

Δύο σημαδούρες Α και Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση $AB=13,5\text{m}$ και η ευθεία γραμμή που διέρχεται από αυτές είναι κάθετη στην ακτογραμμή. Πλοίο που κινείται παράλληλα στην ακτογραμμή, μακριά από τις σημαδούρες δημιουργεί κύμα, με φορά διάδοσης από το Α προς το Β, το οποίο θεωρούμε εγκάρσιο αρμονικό. Το κύμα διαδίδεται προς την ακτή. Εξ αιτίας του κύματος η κάθε σημαδούρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της 30 φορές το λεπτό. Ο χρόνος που απαιτείται, για να φτάσει ένα «όρος» του κύματος από τη σημαδούρα Α στη Β, είναι 9s. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης της κάθε σημαδούρας είναι $\pi/5 \text{ m/s}$. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων τη σημαδούρα Α και ως αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που η σημαδούρα Α βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και κινείται προς τα θετικά.

- Α) Να υπολογιστεί το μήκος κύματος.
- Β) Πόσο απέχει η σημαδούρα Α από την ακτή, αν αυτή βρίσκεται για 21^η φορά στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής της, όταν το κύμα φτάνει στην ακτή.
- Γ) Να γραφεί η εξίσωση ταλάντωσης της σημαδούρας Β, καθώς το κύμα διαδίδεται από τη σημαδούρα Α προς τη Β.
- Δ) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης της σημαδούρας Β κάποια χρονική στιγμή που σημαδούρα Α βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσής της.
- Ε) Ένας νεαρός θέλοντας να παίξει με το κύμα ξεκινάει από τη ακτή με φορά προς τις δύο σημαδούρες και πάνω στην ευθεία που ενώνει τις σημαδούρες . Ο νεαρός κάθεται πάνω σε κάθισμα που στηρίζεται σε ιδανικό ελατήριο σταθερά $K=400\pi^2\text{N/m}$ έχοντας αυτός μάζα $M_1=60\text{Kg}$ και το κάθισμα της βάρκας έχει μάζα $M_2=40\text{Kg}$. Τι ταχύτητα πρέπει να έχει η βάρκα του για να απολαύσει «μέγιστα» την διαδρομή; (Το στομάχι του νεαρού είναι σε άριστη κατάσταση). Η εξαναγκασμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει ο νεαρός να θεωρηθεί χωρίς απόσβεση.

Απάντηση:

ΛΥΣΗ

Α) Η σημαδούρα διέρχεται από την θέση ισορροπίας 30 φορές άρα κάνει 15 ταλαντώσεις στο λεπτό. Άρα η συχνότητα ταλάντωσης της σημαδούρας είναι $f=N/t=15/60=0,25\text{Hz}$.

Από $x = V \cdot t$ άρα $13,5 = V \cdot 9$ άρα $V = 1,5 \text{ m/sec}$ Από σχέση της κυματικής $V = \lambda \cdot f$ θα πάρω $\lambda = 6\text{m}$.

Β) Για να φτάσει η σημαδούρα στην θέση +Α για πρώτη φορά χρειάζεται χρόνος $T/4$ ενώ για κάθε επόμενη φορά χρειάζεται χρόνος ίσος με την περίοδο ταλάντωσης της σημαδούρας άρα συνολικά θα χρειασθούμε $T/4 + 20T = 1 + 80 = 81\text{sec}$. Άρα η ακτή θα απέχει $X = V \cdot t = 1,5 \cdot 81 = 121,5\text{m}$.

Γ) Η εξίσωση απομάκρυνση για την σημαδούρα Β θα είναι : $\Psi_B = A \sin 2\pi(t/T - X_B/\lambda)$ για $t \geq 9\text{s}$ από την σχέση $V_{\max} = \omega \cdot A$ άρα $\pi/5 = 2\pi/4 \cdot A$ άρα $A = 0,4\text{m}$

Έτσι $\Psi_B = 0,4 \sin 2\pi(t/4 - 13,5/6)$ για $t \geq 9\text{s}$ στο (S.I)

Δ) Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων των δύο σημαδούρων ήταν $\Delta\phi = 2\pi | \Delta X | / \lambda$ έτσι $\Delta\phi = 2\pi \cdot 13,5/6 = 27\pi/6 = 4\pi + \pi/2$. Έτσι αφού η σημαδούρα Α θα βρίσκεται στην +Α η Β θα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας και άρα $V_B = V_{\max} = \pi/5 \text{ m/sec}$.

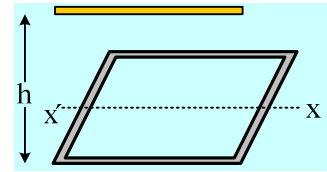
Ε) Ο νεαρός που πάει κόντρα στο κύμα για να διασκεδάσει «τα μέγιστα» θα πρέπει να ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος που είναι δυνατό. Έτσι καθώς ταλαντώνεται στο κάθισμα της βάρκας του θα πρέπει το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Έτσι η συχνότητα του κύματος που αντιλαμβάνεται αλλά και η συχνότητα ταλάντωσης της καρέκλας της βάρκας θα πρέπει να είναι ίσες. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $f_0 = 1/2\pi \sqrt{M_0/K} = 1\text{Hz}$.

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο νεαρός θα είναι με βάσει το φαινόμενο Doppler

$F = (V + V_{\text{βάρκας}}) F_s / V$ Άρα $1 = (1,5 + V_{\text{βάρκας}}) 0,25 / 1,5$ και έτσι η $V_{\text{βάρκας}} = 4,5\text{m/sec}$.

Τετράγωνο και κρούση.

Ένα τετράγωνο πλαίσιο ΑΒΓΔ αποτελείται από τέσσερις λεπτές και ομογενείς ράβδους μάζας $M=6\text{Kg}$ η κάθε μία και μήκους $L=1\text{m}$. Το τετράγωνο ισορροπεί οριζόντιο και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα xx' που διέρχεται γύρω από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου.



Από ύψος $H=0,8\text{m}$ ακριβώς πάνω στην ίδια κατακόρυφο και πάνω από μία πλευρά του τετραγώνου που δεν διέρχεται ο άξονας περιστροφής αφήνεται ελεύθερη μία άλλη οριζόντια ράβδος που έχει ίδια μάζα και ίδιο μήκος με τις ράβδους του τετραγώνου. Η ράβδος συγκρούεται τελείως πλαστικά με το τετράγωνο σε αμελητέο χρόνο. Να βρεθούν:

- Α) Η ροπή αδράνειας του τετράγωνου γύρω από τον άξονα xx'
- Β) Την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση
- Γ) Την μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος

Δίνεται το $I_{cm}=1/12 ML^2$.

Απάντηση:

Α) Το τετράγωνο αποτελείται από τέσσερις ράβδους οι οποίες όμως δεν έχουν την ίδια ροπή αδράνειας. Οι ράβδοι που βρίσκονται απέναντι από τον άξονα περιστροφής έχουν ροπή αδράνειας που θα βρεθεί με την βοήθεια του ορισμού της ροπής αδράνειας

$$I_1=I_2=(\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n)L^2/4=ML^2/4=1,5 \text{ kg.m}^2$$

$$I_3=I_4=\frac{1}{12} ML^2=0,5 \text{ kg.m}^2$$

Αρα η συνολική ροπή αδράνειας θα είναι $I_{ολ}=2I_1+2I_3=4\text{kg.m}^2$

Β) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της ράβδου

$$MgH=\frac{1}{2} Mv^2 \text{ θα βρούμε } v=4\text{m/s}$$

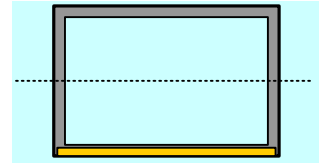
Η στροφορμή της ράβδου σε σχέση με τον άξονα περιστροφής xx' λίγο πριν την κρούση θα δίνεται από την

$$\text{σχέση } L_{αρχ}=(\Delta m_1+\Delta m_2+\dots+\Delta m_n) v \frac{L}{2}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την κρούση του συστήματος θα έχουμε

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \rightarrow Mv \frac{L}{2} = I_{\text{ολ}} \omega_{\text{συσ}} \text{ άρα } \omega_{\text{συσ}} = 24/11 \text{ r/s}$$

Γ) Το σύστημα θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια όταν οι ράβδοι της πλαστικής κρούσης φτάσουν στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς τους γιατί μέχρι τότε το σύστημα επιταχύνει μέσω της ροπής του βάρους των δύο ράβδων. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση του συστήματος θα έχουμε



$$2Mg \frac{L}{2} + \frac{1}{2} I_{\text{ολ}} \omega_{\text{συσ}}^2 = K_{\text{max}} + Mg \frac{L}{2} \text{ θα βρούμε } K_{\text{max}} = 40,71 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Α

Στις ερωτήσεις 1-4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί η σωστή απάντηση

1.Ενα ακίνητο με κίνηση στις εμπρός ρόδες του αμάξι προσπαθεί να ξεκινήσει σε ανηφόρα και «σπινιάρει».Η ταχύτητα του κατώτερου σημείου ενός από τα μπροστινά λάστιχα του αυτοκινήτου είναι

α.0

β.Εχει φορά προς τα πάνω

γ.Εχει φορά προς τα κάτω

δ.Είναι κατακόρυφη

(Μονάδες 5)

2.Τα υψηλά κτίρια

α.Στην διάρκεια του σεισμού εκτελούν ελεύθερη ταλάντωση

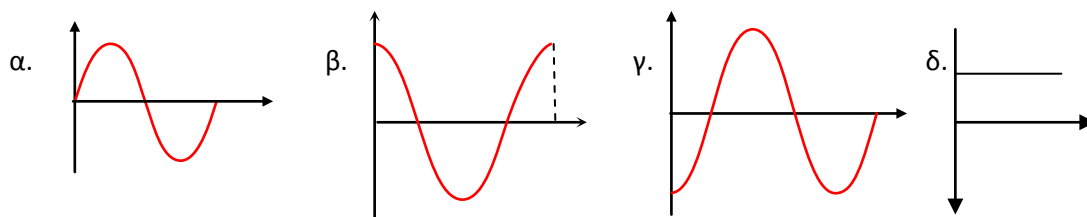
β.Τα κατασκευάζουμε με πολύ μικρό b για να ταλαντώνονται δύσκολα όταν συμβαίνει σεισμός

γ.Κατά την διάρκεια του σεισμού εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση

δ.Κατασκευάζονται με ιδιοσυχνότητα κοντά στην συχνότητα των σεισμικών κυμάτων

(Μονάδες 5)

3.Ενα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση,του οποίου η επιτάχυνση μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $a=10\eta\mu(10t+\pi/2)$ (S.I).Η γραφικά παράσταση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο μπορεί να είναι



(Μονάδες 5)

4. Αν παρατηρήσουμε το φάσμα εκπομπής ενός μετάλλου στη γη σε σχέση με το φάσμα εκπομπής του ίδιου μετάλλου που προέρχεται από ένα μακρινό αστέρι παρατηρούμε ότι το μήκος κύματος του μετάλλου που προέρχεται από το μέταλλο στο άστρο είναι μικρότερο. Αυτό σημαίνει ότι:

- α. Το άστρο απομακρύνεται από τη Γη
- β. Το άστρο είναι ακίνητο
- γ. Το άστρο κάνει ταλάντωση
- δ. Το άστρο πλησιάζει προς τη Γη

(Μονάδες 5)

5. Να συμπληρώσετε τις λέξεις που λείπουν στις παρακάτω προτάσεις

α. Το φαινόμενο στο οποίο κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση το σύστημα απορροφά ενέργεια κατά το βέλτιστο τρόπο ονομάζεται

β. Η στροφορμή ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του λέγεται

γ. Το φαινόμενο στο οποίο μία παράλληλη δέσμη ακτίνων μετά την ανάκλαση παύει να είναι παράλληλη λέγεται

δ. Ο όρος που περιγράφει τα φαινόμενα όπως κρούση στην ατομική και πυρηνική φυσική λέγεται

ε. Όταν η απόσταση μεταξύ ηχητικής πηγής και παρατηρητή ελαττώνεται τότε ο παρατηρητής ακούει ήχο

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

1. Ένα απομονωμένο ομογενές άστρο περιστρέφεται γύρω από μία διάμετρό του έχοντας κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής K . Αν λόγω βαρυτικής κατάρρευσης η ακτίνα του άστρου ελαττωθεί στο μισό της αρχικής της τιμής τότε το έργο των βαρυτικών δυνάμεων κατάρρευσης είναι

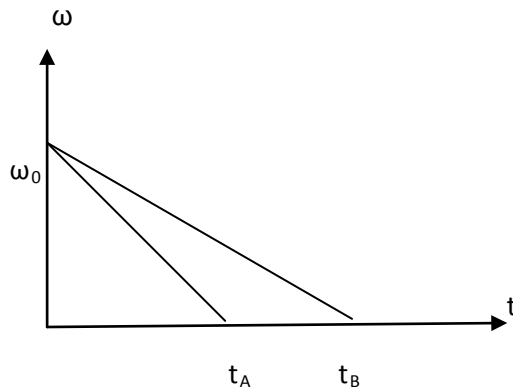
- α. K
- β. $2K$
- γ. $3K$
- δ. $4K$

(Μονάδες 3)

Να δικαιολογήσετε την απαντήσή σας.

(Μονάδες 6)

2. Δύο σφαίρες Α και Β ίδιας μάζας και ίδιας ακτίνας φτάνουν στην βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου και αρχίζουν να ανεβαίνουν στο κεκλιμένο επίπεδο δεχόμενες και η δύο την ίδια επιβραδύνουσα ροπή. Η μία σφαίρα είναι κοίλη ενώ δεύτερη συμπαγής. Οι γωνιακές ταχύτητες των δύο σφαιρών σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Να δικαιολογήσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος

Α. Η σφαίρα Α είναι η σφαίρα με την κουφάλα

(Μονάδες 1+2)

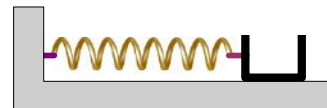
Β. Η σφαίρα Α έχει μεγαλύτερη στροφορμή την στιγμή που αρχίζει να ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο.

(Μονάδες 1+2)

Γ. Η σφαίρα Α θα εκτελέσει περισσότερες περιστροφές σε σχέση με τη σφαίρα Β μέχρι να σταματήσουν και οι δύο σφαίρες

(Μονάδες 1+2)

3. Στο διπλανό σχήμα ο δίσκος εκτελεί Γ.α.τ και κάθε φορά που εκτελεί μία πλήρη ταλάντωση στην ακραία θέση του πέφτει κατακόρυφα και ένας κόκκος φακής μέχρι που η μάζα του συστήματος να τετραπλασιασθεί.



α. Να σχεδιασθεί ποιοτικά σε διάγραμμα το τετράγωνο της περιόδου του ταλαντωτή προς τη συνολική μάζα του ταλαντωτή ($T^2 - M_{ολ}$).

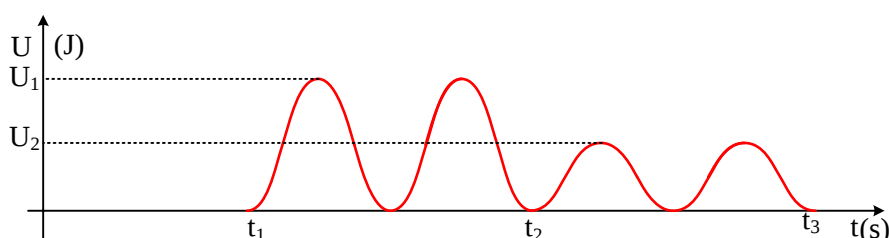
(Μονάδες 4)

β. Ποιος ο λόγος των μέγιστων επιταχύνσεων στην αρχική και τελική κατάσταση;

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Γ

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $u=1\text{ m/sec}$. Την στιγμή $t=0$ οι πηγές O_1, O_2 αρχίζουν ταυτόχρονα να ταλαντώνονται κατακόρυφα με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=0,1\sin 2\pi t$ (S.I.). Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ενός στοιχειώδους τμήματος μάζας $m=0,001\text{ Kg}$ της επιφάνειας του υγρού που απέχει αποστάσεις $R_1=R_2=2\text{ m}$ σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από την παρακάτω γραφική παράσταση



Αν γνωρίζουμε ότι κάποια χρονική στιγμή η μία από τις δύο πηγές σταμάτησε την ταλάντωσή της και μετά από λίγο σταμάτησε και η δεύτερη να υπολογιστούν:

1) Να βρεθούν οι τιμές U_1, U_2, t_1, t_2, t_3 του παραπάνω διαγράμματος

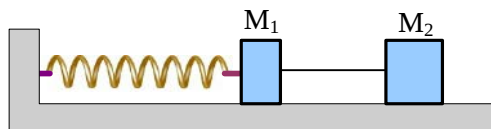
(Μονάδες 20)

2) Ποιες χρονικές στιγμές σταμάτησε κάθε μία πηγή

(Μονάδες 5)

$$\pi^2=10.$$

ΘΕΜΑ



Στο παραπάνω σχήμα το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και σταθερά $K=100\pi^2\text{ N/m}$, τα σώματα έχουν μάζες $M_1=1\text{ Kg}$ $M_2=3\text{ Kg}$ και το αβαρές τεντωμένο σχοινί που τα συνδέει έχει μήκος $l=10\text{ cm}$. Απομακρύνουμε το σώμα μάζας M_2 προς τα δεξιά απόσταση $\chi=0,2/\pi\text{ m}$ από την αρχική θέση του και την στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να εκτελέσει ταλάντωση.

1. Ποια χρονική στιγμή τα σώματα θα συγκρουστούν.

(Μονάδες 8)

2. Αν η κρούση είναι πλαστική ποια η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση.

(Μονάδες 7)

3. Αν η κρούση είναι ελαστική και το νήμα κοβόταν εκείνη τη στιγμή να γίνει γραφική παράσταση της ταχύτητας των δύο σωμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο ορίζοντας θετική φορά τη φορά της αρχικής μετατόπισης του σώματος M_2 .

(Μονάδες 10)

Τελικό Διαγώνισμα Φυσικής.

ΘΕΜΑ 1^ο

Στις ερωτήσεις 1 έως 4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

1. Το πλάτος μίας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0e^{-\lambda t}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ η ενέργεια που έχει ο ταλαντωτής είναι $4E$. Σε πόσο χρόνο η ενέργεια του περιβάλλοντος θα έχει αυξηθεί κατά $3E$

- A. $\ln 2/\lambda$
- B. $2\ln 2/\lambda$
- Γ. $\ln 2/2\lambda$
- Δ. $3\ln 2/4\lambda$

Μονάδες 5

2. Μία σφαίρα μάζας m κτυπάει κάθετα σε κατακόρυφο τοίχο έχοντας ταχύτητα U . Αν η κρούση της σφαίρας με τον τοίχο είναι ελαστική η μεταβολή του μέτρου της ορμής της σφαίρας είναι

- A. $-2mU$
- B. $2mU$
- Γ. 0
- Δ. mU

Μονάδες 5

3. Κύλινδρος αφήνεται από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου

- A. Ο κύλινδρος θα εκτελέσει μεταφορική και στροφική κίνηση
- B. Η στατική τριβή θα έχει φορά προς τα πάνω
- Γ. Θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση και η τελική του ταχύτητα θα εξαρτάται από το αρχικό ύψος του κεκλιμένου επιπέδου

Δ. Το βάρος του κυλίνδρου δεν παράγει έργο για την παραπάνω μετακίνηση μιας και είναι συντηρητική δύναμη.

Μονάδες 5

4. Πάνω σε μία χορδή με τα δύο της άκρα στερεωμένα έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα

A. Όλα τα υλικά σημεία της χορδής ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα

B. Η διαφορά φάσης μεταξύ των διαφόρων σημείων του στάσιμου κύματος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των τιμών 0 και π .

Γ. Τα δύο άκρα της χορδής είναι οπωσδήποτε δεσμοί

Δ. Δεν υπάρχουν χρονικές στιγμές στις οποίες όλα τα υλικά σημεία της χορδής να είναι ακίνητα

Μονάδες 5

5. Να χαρακτηρίσετε στο τετράδιό σας τις προτάσεις που ακολουθούν, με το γράμμα Σ, αν είναι σωστές και με το γράμμα Λ, αν είναι λανθασμένες.

A. Η συρρίκνωση των αστέρων λόγω βαρύτητας στα τελευταία στάδια της ζωής τους οδηγεί σε αύξηση της συχνότητας περιστροφής τους.

B. Η διάχυση είναι ένα είδος ανάκλασης μόνο που οι ανακλώμενες ακτίνες δεν είναι παράλληλες μιας και η επιφάνεια πρόσπτωσης έχει κάποιες ανωμαλίες.

Γ. Στη διάρκεια μίας ελαστικής κρούσης η κινητική ενέργεια των σωμάτων που συγκρούονται παραμένει σταθερή.

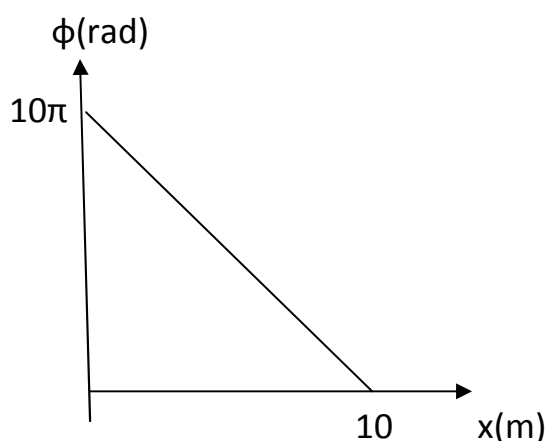
Δ. Το φαινόμενο Doppler δεν μπορεί να εφαρμοσθεί για το φως.

Ε. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο σε ένα Η/Μ έχουν παντού και πάντα διαφορά φάσης 0°

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

1. Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά την θετική φορά κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής. Η πηγή που βρίσκεται στην θέση $x=0$ και αρχίζει την ταλάντωσή της την στιγμή $t=0$ με $\psi=0$ και θετική ταχύτητα. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη φάση διαφόρων σημείων της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1=0,5\text{s}$



Το μήκος κύματος είναι

- A. 1m B. 2m Γ. 1,5m

Σε χρόνο $t_2=t_1+T/4$ το κύμα έχει φτάσει στη θέση

- A. $x=12\text{m}$ B. $x=10,5\text{m}$ Γ. $x=13\text{m}$

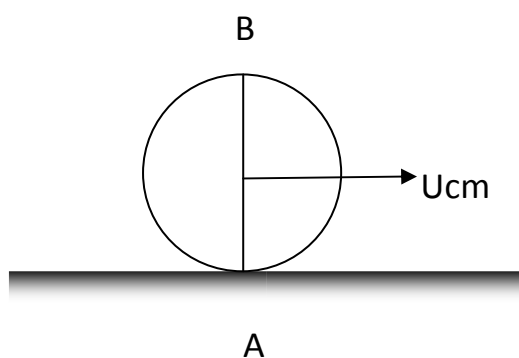
Μονάδες (1+3 ,1+3)

2. Δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα με μήκος κύματος $\lambda=10\text{cm}$. Πόσα σημεία πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 που έχει μήκος 38cm είναι συνεχώς ακίνητα.

- A. 7 B. 8 Γ. 9

Μονάδες (1+7)

3. Σφαίρα ακτίνας $R=20\text{cm}$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το κέντρο μάζας της να έχει σταθερή ταχύτητα με μέτρο $U_{\text{cm}}=10\text{m/sec}$. Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας των διαφόρων σημείων της κατακόρυφης διαμέτρου της σφαίρας AB σε συνάρτηση με την απόστασή τους από το σημείο A που βρίσκεται στο οριζόντιο έδαφος.



Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Σημειακό σώμα μάζας $M=4\text{Kg}$ είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά $K=100\text{N/m}$ και ισορροπεί σε ύψος $H=3,2\text{m}$ από το έδαφος. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στο σώμα είναι δεμένος ένας οριζόντιος αβαρής ελαστικός ιστός αράχνης με μεγάλο μήκος. Δύο αράχνες βρίσκονται σε αποστάσεις $0,3\text{m}$ και $0,5\text{m}$ αντίστοιχα από το σώμα μάζας M κολλημένες στον ιστό. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στον ιστό είναι $V=1\text{m/sec}$. Ένα δεύτερο σώμα μάζας $M_2=4\text{Kg}$ κινείται κατακόρυφα και συγκρούεται κεντρικά μετωπικά και ελαστικά με το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο έχοντας κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $0,5\text{m/sec}$ την στιγμή της κρούσης. Την στιγμή που το δεύτερο σώμα φτάνει στο έδαφος:

α) Να σχεδιαστεί η μορφή του ιστού της αράχνης.

Μονάδες 8

β) Ποια η ταχύτητα ταλάντωσης της κάθε αράχνης εκείνη την στιγμή.

Μονάδες 3

γ) Πόσο απέχουν τα ζωύφια

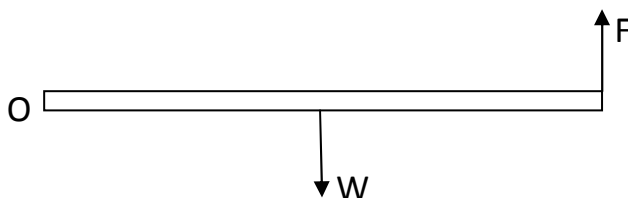
Μονάδες 6

δ) Πόσα σημεία του ιστού έχουν κινητική ενέργεια ίση με την δυναμική ενέργεια ταλάντωσης τους.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μάζας $M=3\text{Kg}$ και μήκους $L=1\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα O που βρίσκεται στο ένα του άκρο όπως στο παρακάτω σχήμα



Στο άλλο άκρο της ράβδου ασκείται μεταβλητή δύναμη F κάθετη πάντα στην ράβδο της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση $F=112\theta/\pi^2$ (S.I.) όπου θ η γωνία που θα διαγράφει η ράβδος σε σχέση με την αρχική οριζόντια θέση. Αν την στιγμή $t=0$ η ράβδος αφεθεί ελεύθερη από την οριζόντια θέση να βρεθούν:

A) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου την στιγμή $t=0$

Μονάδες 5

Β)Θα φτάσει η ράβδος στην κατακόρυφη θέση της; Αν ναι να βρεθεί η κινητική ενέργεια της ράβδου όταν αυτή θα γίνει κατακόρυφη για πρώτη φορά.

Μονάδες 7

Γ)Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου όταν η ράβδος έχει διαγράψει γωνία 90° σε σχέση με την αρχική θέση.

Μονάδες 5

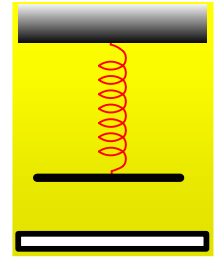
Δ)Ποια η σχέση που θα μπορούσε να δίνει τη γωνία για την οποία η ράβδος έχει αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια για πρώτη φορά μετά την εκκίνησή της.

Μονάδες 8

Για την ράβδο $I_{cm}=1/12 \cdot M \cdot L^2$ και $g=10\text{m/sec}^2$.

Ταλαντωτής με φίλτρο.

Μία λεπτότατη ράβδος μήκους $L=0,5\text{m}$ μάζας $M=1\text{Kg}$ τρυπιέται στο κέντρο μάζας και κρεμιέται από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ έτσι ώστε η ράβδος να μπορεί να ταλαντώνεται κατακόρυφα αλλά και να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές παραμένοντας συνεχώς οριζόντια γύρω από το κάτω άκρο του ελατηρίου ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου στερεώνεται στο ταβάνι όπως το φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ανεβάζουμε τη ράβδο στη θέση όπου το ελατήριο να αποκτά το φυσικό του μήκος και με την βοήθεια μίας στιγμιαίας ροπής ζεύγους δυνάμεων η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega=20\text{r/sec}$ ενώ την ίδια χρονική στιγμή $t=0$ η ράβδος αφήνεται ελεύθερη. Στην θέση ισορροπίας της ράβδου υπάρχει οριζόντια σχισμή με πλάτος όσο ακριβώς και το πλάτος της ράβδου.



- A) Να αποδειχθεί ότι η ράβδος δε θα συγκρούεται με την οριζόντια σχισμή.
- B) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου
- Γ) Να βρεθεί η εξίσωση του μέτρου της συνολικής ταχύτητας ενός από τα άκρα της ράβδου.
- Δ) Μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική γωνιακή ταχύτητα-συχνότητα της ράβδου;

$$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2.$$

Απάντηση:

A) Η ράβδος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μιας και η συνολική ροπή όλων των δυνάμεων που ασκούνται στην ράβδο είναι ίση με το 0 ενώ ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της ράβδου θα εκτελεί γ.α.τ. με πάτος $A=Mg/K=0,1\text{m}$. Για να φτάσει το κέντρο μάζας της ράβδου στην ΘΙΤ για πρώτη φορά θα χρειασθεί χρόνος $t=T/4=\pi/20\text{ sec}$. Στον παραπάνω χρόνο η ράβδος θα έχει εκτελέσει γωνία $\theta=\omega \cdot T/4=\pi\text{ rad}$ δηλαδή μισή στροφή. Έτσι η ράβδος θα περάσει από την σχισμή χωρίς να συγκρουσθεί με αυτή. Η ράβδος θα ξαναπεράσει από την ΘΙΤ μετά από χρόνο $T/2$ άρα η ράβδος θα έχει εκτελέσει $\theta'=\omega \cdot T/2=2\pi\text{ rad}$ δηλαδή μία ολόκληρη περιστροφή. Δηλαδή η ράβδος θα φτάνει στην θέση ισορροπίας της μετά από μία ολόκληρη περιστροφή της γύρω από το κέντρο μάζας της. Έτσι δεν θα υπάρχει σύγκρουση της ράβδου με την σχισμή.

B) Η ράβδος θα έχει ελάχιστη κινητική ενέργεια όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής της $K_{\min} = \frac{1}{2} I \omega^2 = 25/6\text{ J}$ ενώ η μέγιστη κινητική ενέργεια θα έχει η ράβδος όταν το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται στην ΘΙΤ.

$$\text{Άρα } K_{\max} = \frac{1}{2} M v_{\max}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = 14/3\text{ J}$$

Γ) Η συνολική ταχύτητα ενός από τα άκρα της ράβδου θα δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας περιστροφής αλλά και της ταχύτητας του κέντρου μάζας και επειδή οι δύο ταχύτητες είναι συνεχώς κάθετες θα ισχύει:

$$v_{o\lambda} = \sqrt{\left(\omega \cdot \frac{L}{2}\right)^2 + v_{\max}^2 \sigma \nu^2 \left(10t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{άρα μετά από πράξεις}$$

$$v_{o\lambda} = \sqrt{25 + \sigma \nu^2 \left(10t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (\text{SI})$$

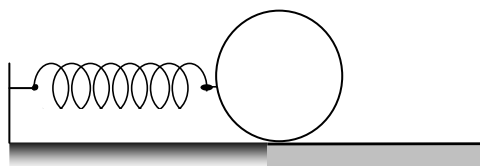
Δ) Δεν πρέπει να συγχέουμε έννοιες σαν την γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ που ένα μονόμετρο

μέγεθος με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου ω που είναι ένα κορυφαίο διανυσματικό μέγεθος όπως αναφέρει και ο καλός μας φίλος Θρασύβουλος Μαχαίρας στο πόνημά του «Θέματα Φυσική Παρανοήσεις & προτάσεις υπέρβασής τους»

Δεν μπορούμε λοιπόν να προσθέσουμε ανόμοια μεταξύ τους πράγματα....

Ταλάντωση και κύλιση

Ο κύλινδρος μάζας $M=1\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ του παρακάτω σχήματος ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο το οποίο κατά το ένα μέρος είναι λείο και στο άλλο παρουσιάζει τριβές έτσι ώστε η κατακόρυφη διάμετρος του κυλίνδρου να βρίσκεται ακριβώς στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο επιπέδων. Το ελατήριο έχει σταθερά $K=150\text{N/m}$ και είναι συνδεδεμένο στο κέντρο του κυλίνδρου έτσι ώστε ο κύλινδρος να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του.



Ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει όταν βρίσκεται στην περιοχή του που το επίπεδο παρουσιάζει τριβές. Εκτρέπουμε τον κύλινδρο κατά $x=10\text{cm}$ προς την περιοχή που το οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζει τριβές και την στιγμή $t=0$ αφήνουμε τον κύλινδρο ελεύθερο. Να βρεθούν:

Α) Ο χρόνος που θα χρειασθεί ο κύλινδρος να φτάσει στην θέση αρχικής ισορροπίας του για 2^η φορά.

Β) Η ταχύτητα του κατώτερου σημείου του κυλίνδρου την στιγμή που επιστρέφει για 2^η φορά στην αρχική θέση ισορροπίας του.

Γ) Τη συνολική γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου μέχρι ο κύλινδρος να επιστρέψει για 2^η φορά στην θέση αρχικής ισορροπίας του.

Για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν ορίσουμε θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά θα έχουμε και στην περιοχή που έχουμε τριβές

$$\Sigma F = -K \cdot x + T_{στ} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση στην περιοχή που έχουμε τριβές

$T_{στ} \cdot R = 0,5 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha$ (2) και για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$K \cdot x - T_{στ} = M \cdot a$ (3) από τις σχέσεις (1), (2) και (3) θα καταλήξουμε $\Sigma F = -2Kx/3 = -100x$ (S.I.) άρα το κέντρο μάζας σώμα του κυλίνδρου κάνει ένα μέρος Γ.Α.Τ. στην περιοχή που υπάρχουν τριβές.

Φτάνοντας στην θέση που αρχικά ισορροπούσε ο κύλινδρος με ταχύτητα $U_{cm} = \omega \cdot A = 10 \cdot 0,1 = 1 \text{ m/sec}$ και με γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega_0 = U_{cm}/R = 10 \text{ rad/sec}$ μπαίνει σε περιοχή που δεν υπάρχουν τριβές. Έτσι δεν υπάρχει δύναμη που να μπορεί να προκαλέσει ροπή. Έτσι από εκεί και μετά η γωνιακή ταχύτητα μένει σταθερή. Η δύναμη του ελατηρίου είναι τώρα η μοναδική δύναμη στον οριζόντιο άξονα έτσι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα εκτελεί και πάλι ένα “κομμάτι” Γ.Α.Τ. με $D_2 = K = 300 \text{ N/m}$. Για να περάσει το κέντρο μάζας από την αρχική θέση ισορροπίας θα χρειασθεί χρόνο $t = T_1/4 + T_2/2 = \pi(1+2/\sqrt{1,5})/20 \text{ sec}$.

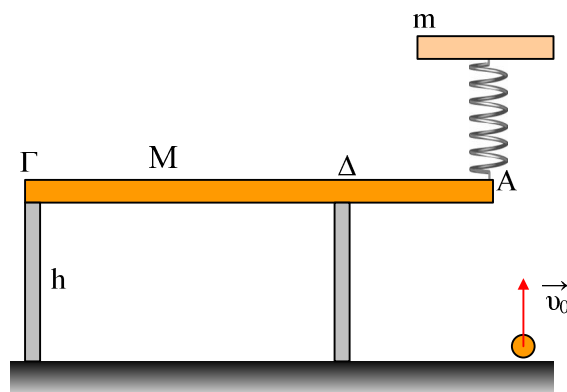
Β) Κατά την επιστροφή του κυλίνδρος έχει την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο στο κέντρο μάζας αλλά η περιστροφική δεν έχει αλλάξει. Άρα το χαμηλότερο σημείο του κυλίνδρου έχει συνολική ταχύτητα $U_{κατ} = U_{cm} + U_{περ} = 1 + 1 = 2 \text{ m/sec}$.

Γ) Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου από την στιγμή $t=0$ μέχρι να φτάσει στην αρχική του θέση ισορροπίας κάλυψε μήκος διαδρομής $x = A = 0,1 \text{ m}$ άρα γωνία $\theta_1 = x/R = 1 \text{ rad}$. Στην συνέχεια η στροφική κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλή. Άρα $\theta_2 = \omega_0 \cdot T_2/2 = \pi/\sqrt{1,5} \text{ rad}$.

Άρα η συνολική γωνία στροφής του κυλίνδρου $\theta_{ολ} = 1 + \pi/\sqrt{1,5} \text{ rad}$.

Ταλάντωση και ισορροπία ράβδου

Ομογενής ράβδος ΑΓ αμελητέου πάχους έχει μήκος $l=4\text{m}$ και μάζα 4kg στηρίζεται στο άκρο Γ και σε ένα υποστήριγμα Δ με την απόσταση $\Gamma\Delta=3\text{m}$ με τη βοήθεια δύο στηριγμάτων ύψους



$h=3\text{m}$. Στο άκρο Α και πάνω από τη ράβδο υπάρχει ελατήριο φυσικού μήκους $0,95\text{m}$ και σταθεράς $K=200\text{N/m}$. Πάνω στο ελατήριο ισορροπεί ένα σώμα μάζας $m=1\text{kg}$.

Να βρεθούν:

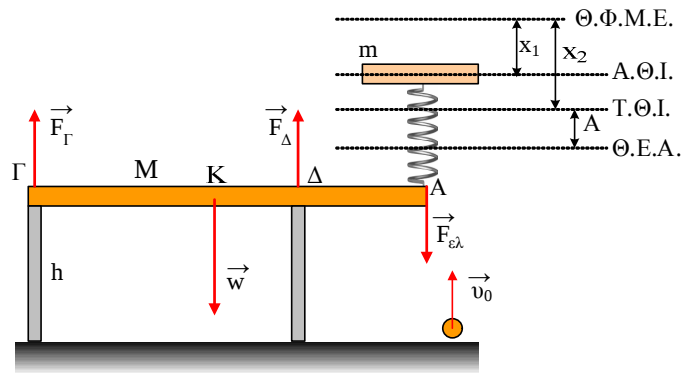
Α) Ποια η μέγιστη ταχύτητα ενός βλήματος μάζας $m=1\text{Kgr}$, που βάλλεται από το έδαφος και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας m που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το σημείο Α, για να μην χάνει την επαφή της η ράβδος με το υποστήριγμα Γ.

Β) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα στο σημείο Γ σε συνάρτηση με το χρόνο.

$g=10\text{m/sec}^2$. Θετική φορά να θεωρηθεί η φορά της αρχικής ταχύτητας του βλήματος και $t=0$ στιγμή της πλαστικής κρούσης των δύο σωμάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να μην χαθεί η επαφή με το υποστήριγμα θα πρέπει η δύναμη $F_{\Gamma} \rightarrow 0$. Για αυτήν την οριακή δύναμη μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνθήκη ισορροπίας $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0$ Αρα $M \cdot g \cdot (K\Delta) - F_{\text{ελ}} \cdot (\Delta A) = 0$ Αρα $40 - 200 X_{\text{ελmax}} = 0$ άρα $X_{\text{ελmax}} = 0,2\text{m}$.



Για την ισορροπία του σώματος πάνω στο ελατήριο θα έχουμε $m \cdot g = Kx_1$ άρα $x_1 = 0,05\text{m}$

Για την ισορροπία του σώματος-βλήματος πάνω στο ελατήριο θα έχουμε $2m \cdot g = Kx_2$ άρα $x_2 = 0,1\text{m}$

Για την ταλάντωση του σώματος-βλήματος μετά την πλαστική κρούση θα πάρουμε από την ΑΔΕΤ.

Το πλάτος θα πρέπει να είναι $A = x_{\text{ελmax}} - x_2 = 0,2 - 0,1 = 0,1\text{m}$ γιατί θέλουμε μόλις να μην χαθεί η επαφή με το υποστήριγμα Γ. Παρατηρούμε επίσης ότι το ελατήριο δεν ξεπερνάει την ΘΦΜΕ άρα δεν κινδυνεύει η ράβδος να "σηκωθεί" στο σημείο Δ.

$$\frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}2m \cdot U_{\text{συστ}}^2 = \frac{1}{2}KA^2 \text{ θα πάρουμε } U_{\text{συστ}} = \sqrt{3/2} \text{ m/sec.}$$

Για την πλαστική κρούση και από την ΑΔΟ θα έχουμε

$$m \cdot U = 2mU_{\text{συστ}} \quad \text{άρα } U = \sqrt{3} \text{ m/sec}$$

Αν για το βλήμα εφαρμόσουμε ΑΔΕ για την άνοδό του θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος θα πάρουμε

$$\frac{1}{2}mU_0^2 = mgh + mgl_0 - x_1 + \frac{1}{2}m \cdot U^2$$

Μετά τις πράξεις $U_0=9\text{m/sec.}$

Β) Για το συσσωμάτωμα θα έχουμε εξίσωση απομάκρυνσης
 $X=A\eta\mu(\omega t+\phi_0)$ για $t=0$ $x=0,05\text{m}$ και $U>0$ $\omega=\sqrt{K/2m}$ έτσι η
εξίσωση θα είναι $X=0,1\eta\mu(10t+\pi/6)$ (S.I.).

Για την δύναμη του ελατηρίου που ασκείται στο συσσωμάτωμα
θα έχουμε $F_{ελ}-2mg=-K.X$ άρα η $F_{ελ}=20-20\eta\mu(10t+\pi/6)$ (S.I.)

Το μέτρο αυτής της δύναμης μεταφέρεται στο άλλο άκρο του
ελατηρίου στο σημείο Α.

Αν εφαρμόσουμε την συνθήκη ισορροπίας για την ράβδο θα
έχουμε

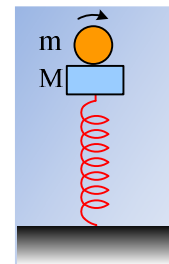
$$\Sigma\tau_{(\Delta)}=0 \quad \text{άρα} \quad -F_{ελ}(\Delta A) + Mg.(K\Delta) - F_{\Gamma}(\Gamma\Delta)=0$$

$$-20+20\eta\mu(10t+\pi/6) + 40 - F_{\Gamma}.3=0$$

$$\text{Αρα} \quad F_{\Gamma}=20/3 + 20/3 \eta\mu(10t+\pi/6) \text{ (S.I.)}$$

Ταλάντωση με σφαίρα που περιστρέφεται

Στο πάνω μέρος κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθερά $K=100\text{N/m}$ δένουμε ένα λείο κύβο μάζας $M=1\text{Kg}$ και το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα. Δίνουμε σε μία λεία σφαίρα μάζας $m=3\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{r/s}$ έτσι ώστε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας να είναι παράλληλο με το έδαφος και τη στιγμή $t=0$ αφήνουμε τη σφαίρα πάνω στο σώμα μάζας M έτσι ώστε το κέντρο της σφαίρας να βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη που περνά από τον άξονα του ελατηρίου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Να βρεθούν:

- A) Το είδος της κίνησης της σφαίρας
- B) Η μέγιστη δύναμη που θα ασκεί το ελατήριο στον κύβο στην διάρκεια της κίνησης του συστήματος
- Γ) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος
- Δ) Η εξίσωση του μέτρου της ταχύτητας του ανώτερου σημείου της σφαίρας καθώς και των σημείων που βρίσκονται στην επιφάνεια της σφαίρας και απέχουν από το πάνω μέρος του κύβου απόσταση R σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για την σφαίρα δίνεται $I_{cm}=0,4mR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Επειδή η σφαίρα και ο κύβος έχουν λείες επιφάνειες δεν θα ασκηθεί μεταξύ τους καμία οριζόντια δύναμη. Άρα η σφαίρα θα εκτελεί συνεχώς ομαλή στροφική κίνηση μιας και το $\Sigma\tau=0$ για τη σφαίρα. Επειδή όμως θα αλλάξει η μάζα του συστήματος στον κατακόρυφο άξονα το σύστημα θα εκτελεί γ.α.τ. Από την αρχική και τελική ισορροπία για τον κατακόρυφο άξονα θα έχουμε:

$$Mg = Kx_1 \text{ θα έχουμε } x_1 = 0,1\text{m} \quad (M+m)g = Kx_2 \text{ θα έχουμε } x_2 = 0,4\text{m}$$

Τη στιγμή $t=0$ που αφήνουμε τη σφαίρα πάνω στο κύβο το σύστημα δεν έχει ταχύτητα στον κατακόρυφο άξονα. Έτσι το σύστημα θα βρίσκεται στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος θα είναι $A = x_2 - x_1 = 0,3\text{m}$.

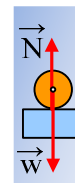
Για να καθορίσουμε πλήρως την κίνηση του συστήματος θα πρέπει να εξετάσουμε και την περίπτωση αν η σφαίρα θα μπορούσε να χάσει την επαφή της με τον κύβο.

Έτσι με τη βοήθεια του σχήματος και του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα έχουμε

$$N - mg = ma \rightarrow N = mg - m\omega^2 x$$

η επαφή δεν θα χάνεται μόνο στην περίπτωση όπου $N > 0$. Κάνοντας τις πράξεις θα βρούμε ότι για να χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων θα έπρεπε $x > 0,4\text{m}$ που όμως δεν μπορεί να συμβεί γιατί το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος είναι $A = 0,3\text{m}$.

Έτσι τελικά κέντρο μάζας του κύβου εκτελεί γ.α.τ. με πλάτος $A = 0,3\text{m}$ ενώ η σφαίρα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί και αυτό γ.α.τ. με πλάτος $A = 0,3\text{m}$.



Β) Η δύναμη του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση $F_{ελ} = K \cdot x_{ελ}$ (1) όπου $x_{ελ}$ η απομάκρυνση από τη ΘΦΜΕ.

Το ελατήριο θα συσπειρωθεί μέγιστα όταν το σύστημα φτάσει στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του δηλαδή στην ΘΕΑ. Εκεί το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $x_{ελ,max} = x_2 + A = 0,7\text{m}$ και με την βοήθεια της σχέσης (1) $F_{ελ,max} = 70\text{N}$

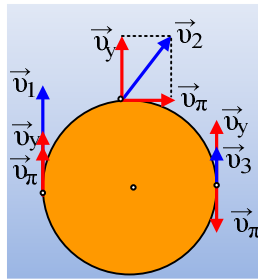
Γ) Το σύστημα εκτελεί μεταφορική αλλά και στροφική κίνηση. Την μέγιστη κινητική ενέργεια το σύστημα θα την έχει όταν η μεταφορική του ενέργεια γίνει μέγιστη μιας και η στροφική του κατάσταση δεν μεταβάλλεται.

$$\text{Αρα } K_{\max} = \frac{1}{2}(M + m)v_{\max}^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 5,1\text{J}$$

Δ) Όλα τα σημεία της σφαίρας έχουν ταυτόχρονα δύο ταχύτητες. Μία κατακόρυφη εξαιτίας της

ταλάντωσης με εξίσωση $v_{\psi} = \omega A \sin(\omega t + \phi_0) = 1,5 \sin(5t + \pi/2)$ (SI)

και μία εξαιτίας της περιστροφής της σφαίρας $v_{\pi\epsilon\rho} = \omega R = 1\text{m/s}$.

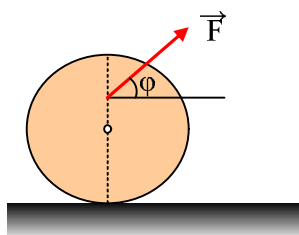


Έτσι τα μέτρα των ταχυτήτων θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$v_1 = |1 + 1,5 \sin(5t + \pi/2)| \quad v_2 = \sqrt{1 + 2,25 \sin^2\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad v_3 = |1,5 \sin(5t + \pi/2) - 1| \quad (\text{S.I.})$$

Σφαίρα και ρυθμός μεταβολής κινητικής Ενέργειας

Μία συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας $m=10\text{kg}$ ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο AB και σε απόσταση $\psi=1,4R$ από το κατώτερο σημείο B εφαρμόζουμε την στιγμή $t=0$ μεταβλητή δύναμη $F=20\sqrt{2} + 8\sqrt{2}x$ (S.I) όπου x η οριζόντια μετατόπιση του κέντρου μάζας της σφαίρας από το σημείο $x=0$ όπου βρίσκεται την χρονική στιγμή $t=0$. Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία $\varphi=45^\circ$ με τον ορίζοντα και έχει φορά προς τα πάνω.



- A) Να αποδείξετε ότι η σφαίρα θα αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.
- B) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν η σφαίρα χάνει την επαφή της με το οριζόντιο δάπεδο.
- Γ) Ποιος ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας την στιγμή που χάνει την επαφή της με το δάπεδο.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Για να αρχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο η σφαίρα θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης δηλαδή $a_{cm}=a_{γων}.R$.

Έτσι από τους νόμους για την μεταφορική και την στροφική κίνηση θα πάρουμε

$$Fx=M.a_{cm} \quad (1) \quad Fx(\psi-R)=0,4M.R^2.a_{γων} \quad (2)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (1) στην (2)
 $M \cdot a_{cm} \cdot 0,4R = 0,4MR^2 \cdot \alpha$
 άρα $a_{cm} = \alpha \cdot R$

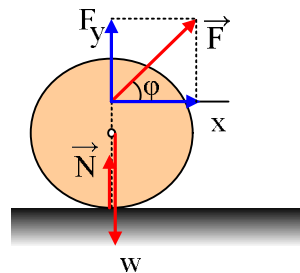
B) Η επαφή θα χαθεί όταν η αντίδραση του επιπέδου θα μηδενιστεί. Για τον άξονα $\psi\psi'$ θα έχουμε:

$$N + F\psi = W$$

άρα για $N=0$ θα έχουμε

$$20 + 8x = 100 \quad \text{άρα}$$

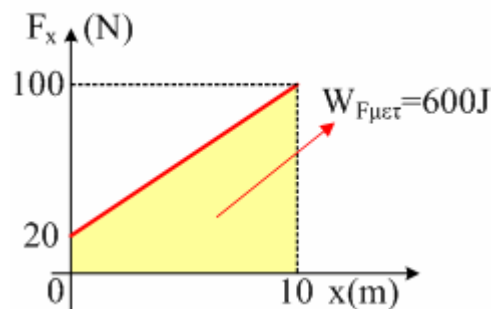
$$x = 10\text{m.}$$



Από την ΑΔΕ για την κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε :

$$W_{Fολ} = K_{περ} + K_{μετ} \quad (3)$$

Το έργο της μεταβλητής δύναμης για την μεταφορική κίνηση θα βρεθεί από το περικλειόμενο εμβαδό του παρακάτω σχήματος όπου είναι $W_{Fμετ} = 600\text{J}$



Ο λόγος των έργων για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση είναι και λόγος των κινητικών ενεργειών λόγω μεταφοράς και περιστροφής αντίστοιχα. Έτσι

$$W_{Fμετ} / W_{Fπερ} = K_{μετ} / K_{περ}$$

$$W_{Fμετ} / W_{Fπερ} = 1/2 M \cdot U_{cm}^2 / 1/2 I \omega^2 = 2,5$$

$$\text{Αρα το } W_{F\pi\epsilon\rho}=240\text{J}$$

Από την (3) $W_{F\sigma\lambda}=1/2M.U_{cm}^2 + 1/2I\omega^2$ με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$840=5U^2 + 2U^2 \text{ άρα}$$

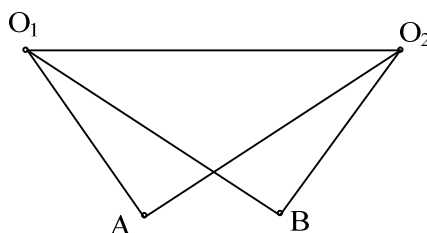
$$v_{cm}=\sqrt{120}\text{m/s.}$$

Γ) Για τον συνολικό ρυθμό μεταβολής τη κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta K_{\sigma\lambda}/\Delta t &= \Sigma Fx.U_{cm} + \Sigma \tau.\omega = \\ &= M.acm.U_{cm} + I.a\gamma\omega n.U_{cm}/R = \\ &= M.acm.U_{cm} + 0,4MR^2.a\gamma\omega n.U_{cm}/R = \\ & \quad 1,4M.acm.U_{cm} \rightarrow \\ \Delta K_{\sigma\lambda}/\Delta t &= 1,4(20+8x).\sqrt{120}=140\sqrt{120}=280\sqrt{30} \text{ J/sec} \end{aligned}$$

Συμβολή κυμάτων στην επιφάνεια υγρού.

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $u=1\text{m/sec}$. Την στιγμή $t=0$ οι πηγές O_1 & O_2 αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=0,2\eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Δύο σημεία A και B της επιφάνειας του υγρού βρίσκονται σε τέτοιες θέσεις ώστε να μπορούν να σχηματίζουν ορθογώνια τρίγωνα O_1AO_2 και O_1BO_2 . Η απόσταση O_1O_2 είναι 10m και οι αποστάσεις $O_1A=6\text{m}$ και $O_1B=8\text{m}$.



- A) Να βρεθούν πόσες υπερβολές ενίσχυσης και πόσες υπερβολές απόσβεσης βρίσκονται ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα AB και το τέμνουν.
- B) Να παρασταθεί γραφικά η φάση του σημείου A σε συνάρτηση με τον χρόνο.
- Γ) Να γραφεί η εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου A σε συνάρτηση με τον χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- Δ) Να βρεθεί πόσες φορές το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου A είναι $u=0,4\pi\text{m/sec}$ μέχρι την στιγμή $t_4=9\text{sec}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

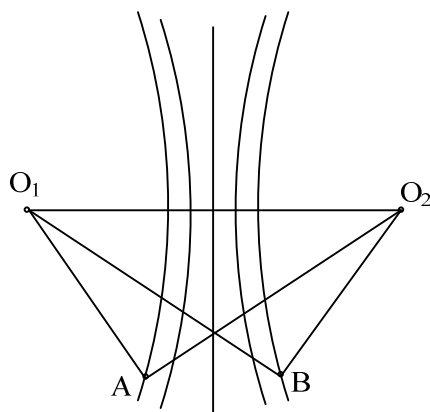
A) Από τις εξισώσεις των πηγών θα βρεθούν $A=0,2\text{m}$ και $\omega=2\pi\text{r/s}$.

Από τον νόμο της κυματικής $u=\lambda \cdot f$ άρα $\lambda=1\text{m}$.

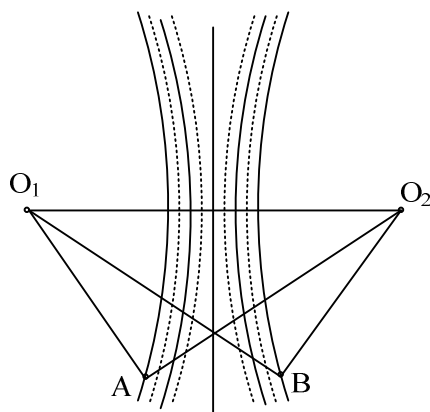
Με την βοήθεια του Π.Θ. για τα ορθογώνια τρίγωνα θα βρούμε $O_2A=8\text{m}$ και $O_2B=6\text{m}$.

Παρατηρούμε ότι $O_1A - O_2A = \kappa \cdot \lambda$ άρα $6 - 8 = \kappa \cdot 1$ άρα $\kappa = -2$ δηλαδή ότι ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης για το σημείο A. Δηλαδή το σημείο A ανήκει στην υπερβολή (κροσσό) ενίσχυσης με $\kappa = -2$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $O_1B - O_2B = \kappa \cdot \lambda$ άρα $8 - 6 = \kappa \cdot 1$ άρα $\kappa = 2$ δηλαδή ότι ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης και για το σημείο B. Δηλαδή το σημείο B ανήκει στην υπερβολή (κροσσό) ενίσχυσης με $\kappa = 2$. Από το παρακάτω σχήμα μπορούμε να συμπεράνουμε



ότι ανάμεσα στο A και το B υπάρχουν τρεις κροσσοί ενισχυτικής συμβολής αλλά μόνο δύο είναι υπερβολές γιατί ο τρίτος κροσσός είναι ευθεία η μεσοκάθετος στο O_1O_2 . Ανάμεσα σε δύο κροσσούς ενίσχυσης υπάρχει πάντα και ένας κροσσός αποσβεστικής συμβολής άρα από το A έως το B υπάρχουν 4 υπερβολές απόσβεσης.

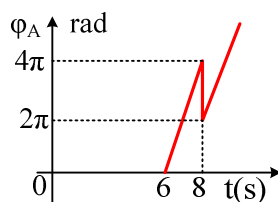


Β) Για να φτάσουν τα κύματα στο σημείο A και να αρχίσει η συμβολή θα χρειασθεί αντίστοιχα χρόνος $t_1 = R_1/u = 6 \text{ sec}$ για το κύμα από την πηγή O_1 και $t_2 = R_2/u = 8 \text{ sec}$ για το κύμα από την πηγή O_2 .

Η εξίσωση της φάσης του σημείου Α θα είναι

$$\Phi_A = \begin{cases} 0 & t \leq 6s \\ 2\pi(t-6) & 6s \leq t < 8s \\ 2\pi(t-7) & t > 8s \end{cases}$$

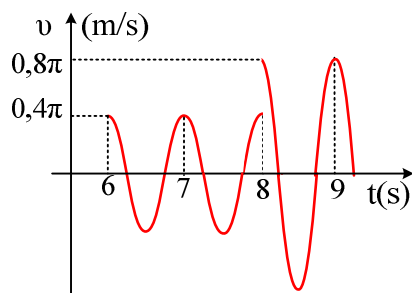
Η γραφική παράσταση θα έχει την μορφή



Γ) Η εξίσωση της ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Α θα είναι

$$U = \begin{cases} 0 & t \leq 6s \\ 0,4\pi \sin 2\pi(t-6) & 6s \leq t < 8s \\ 0,8\pi \sin 2\pi(t-7) & t > 8s \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης θα είναι



Δ) Από το παραπάνω σχήμα παρατηρώ ότι ταχύτητα του σημείου Α είναι μέτρου $0,4\pi \text{ m/sec}$ μέχρι την στιγμή $t_4 = 9 \text{ sec}$ 9 φορές.

Συμβολή κυμάτων από σύγχρονες πηγές.

Δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 απέχουν μεταξύ τους 1m και δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $u=5\text{m/sec}$. Οι δύο πηγές των κυμάτων την χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζουν να εκτελούν κατακόρυφες ταλαντώσεις με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=0,3\eta\mu 50\pi t$ (S.I.). Δύο σημεία A και B βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 και απέχουν 0,45m και 0,65m από την πηγή O_1 αντίστοιχα. Να βρεθούν :

A) Οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για τα σημεία A και B.

B) Πόσο απέχουν τα σημεία μεταξύ τους τις χρονικές στιγμές i) $t_1=0,08\text{sec}$
ii) $t_2=0,1\text{sec}$ iii) $t_3=0,2\text{sec}$.

Γ) Πόσα σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα AB ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος μετά την έναρξη της συμβολής και στα δύο σημεία;

ΛΥΣΗ

Από τις εξισώσεις $A=0,3\text{m}$ και $\omega=50\pi \text{ r/s}$ Άρα $f=25\text{Hz}$ και από τον νόμο της κυματικής $u=\lambda \cdot f$ το $\lambda=0,2\text{m}$.

Για να αρχίσει η ταλάντωση ενός σημείου του μέσου θα πρέπει να έχει φτάσει το κύμα στο συγκεκριμένο σημείο.

Έτσι για να φτάσει το κύμα από την πηγή O_1 στο A χρειάζεται χρόνο $t_1=0,45/5=0,09\text{s}$ και για να φτάσει το κύμα από την πηγή O_2 στο A χρειάζεται χρόνο $t_2=0,55/5=0,11\text{sec}$.

Οι αντίστοιχοι χρόνοι για το σημείο B θα είναι $t_3=0,35/5=0,07\text{s}$ και $t_4=0,65/5=0,13\text{s}$. Τα σημεία μετά την συμβολή θα έχουν πλάτος $A'=2A \mid \sin\pi(R_1-R_2)/\lambda \mid =0\text{m}$ και για το σημείο A και για το B. Είναι δηλαδή σημεία απόσβεσης.

$$\Psi_A = \begin{cases} 0 & t \leq 0,09 \\ 0,3\eta\mu 2\pi(25t-0,45/0,2) & 0,09 \leq t \leq 0,11 \\ 0 & t \geq 0,11 \end{cases} \quad (\text{S.I})$$

$$\Psi_B = \begin{cases} 0 & t \leq 0,07 \\ 0,3\eta\mu 2\pi(25t-0,35/0,2) & 0,07 \leq t \leq 0,13 \\ 0 & t \geq 0,13 \end{cases} \quad (\text{S.I})$$

Έτσι οι εξισώσεις ταχύτητας για τα σημεία A και B θα είναι αντίστοιχα

$$U_A = \begin{cases} 0 & t \leq 0,09 \\ 15\pi \cos 2\pi(25t-0,45/0,2) & 0,09 \leq t \leq 0,11 \\ 0 & t \geq 0,11 \end{cases} \quad (\text{S.I})$$

$$U_B = \begin{cases} 0 & t \leq 0,07 \\ 15\pi \sin 2\pi(25t - 0,35/0,2) & 0,07 \leq t \leq 0,13 \\ 0 & t \geq 0,13 \end{cases} \quad (\text{S.I})$$

Β) Την χρονική στιγμή $t_1 = 0,08\text{s}$ μόνο το σημείο Β έχει αρχίσει να ταλαντώνεται και βρίσκεται στην θέση $\psi_B = 0,3\mu\text{m} 2\pi(25 \cdot 0,08 - 0,35/0,2) = 0,3\text{m}$. Το σημείο Α δεν έχει αρχίσει ακόμη την ταλάντωση του άρα $\psi_A = 0$. Έτσι η μεταξύ τους απόσταση εκείνη την στιγμή θα βρεθεί με Π.Θ. και $D_1 = \sqrt{(0,3)^2 + (0,2)^2} = \sqrt{0,13}\text{ m}$.

Την χρονική στιγμή $t_2 = 0,1\text{s}$ και τα δύο σημεία ταλαντώνονται. Έτσι $\Psi_A = 0,3\mu\text{m} 2\pi(25 \cdot 0,1 - 0,45/0,2) = 0,3\text{m}$ και $\Psi_B = 0,3\mu\text{m} 2\pi(25 \cdot 0,1 - 0,35/0,2) = -0,3\text{m}$.

Έτσι η μεταξύ τους απόσταση εκείνη την στιγμή θα βρεθεί και πάλι με Π.Θ. και $D_2 = \sqrt{(0,6)^2 + (0,2)^2} = \sqrt{0,4}\text{m}$.

Την χρονική στιγμή $t_3 = 0,2\text{s}$ τα σημεία είναι ποια ακίνητα αφού είναι σημεία απόσβεσης και έχει ήδη αρχίσει η συμβολή και στα δύο σημεία. Έτσι η μεταξύ τους απόσταση είναι $0,2\text{m}$.

Γ) Τα σημεία με μέγιστο πλάτος είναι τα σημεία ενίσχυσης και για αυτά θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης. $R_1 - R_2 = \kappa \cdot \lambda$. Όμως $R_1 + R_2 = 1$. Αν προσθέσω τις δύο παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη θα πάρω $2R_1 = \kappa \cdot \lambda + 1$. Για την απόσταση όμως R_1 πρέπει να ισχύει $0,45 \leq R_1 \leq 0,65$ θα καταλήξω στην σχέση $-0,5 \leq \kappa \leq 1,5$. Άρα για $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης. Άρα υπάρχουν δύο σημεία ανάμεσα στα Α και Β με που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

Συμβολή κυμάτων από κινούμενες πηγές.

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια κύματα, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $u=40\text{m/sec}$, βρίσκονται στις θέσεις $X_1=40\text{m}$ και $X_2=-40\text{m}$ και αρχίζουν να κινούνται την στιγμή $t=0$ προς την θέση $X=0$ έχοντας σταθερές ταχύτητες μέτρου $V=10\text{m/sec}$. Οι πηγές ταλαντώνονται με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=0,3\eta\mu 60\pi t$. Να βρεθεί η απομάκρυνση του σημείου $X=0$ τις χρονικές στιγμές :

- i) $t_1=0,9\text{s}$
- ii) $t_2=1,01875\text{s}$
- iii) $t_3=(4+1/96)\text{s}$

Να θεωρηθεί ότι οι δύο πηγές δεν θα συγκρουστούν.

ΛΥΣΗ

Έχουμε δύο πηγές που ισαπέχουν και πλησιάζουν σε ένα ακίνητο σημείο O . Οι πηγές είναι σύγχρονες έτσι στο σημείο θα φτάνουν δύο κύματα που θα προκαλούν την ίδια κατακόρυφη απομάκρυνση ψ . Έτσι κάθε στιγμή το $\psi_{\text{ολ}}=2\psi$. Η συχνότητα του σημείου όταν οι πηγές πλησιάζουν θα βρεθεί με την βοήθεια του φαινομένου Doppler

$$f_1 = V \cdot f_s / (V - V_s) = 40\text{Hz}$$

ενώ όταν οι πηγές απομακρύνονται

$$f_2 = V \cdot f_s / (V + V_s) = 24\text{Hz}.$$

A) Για να φτάσει το κύμα στην θέση $x=0$ θα χρειασθεί χρόνος $t=40/40=1\text{sec}$. Άρα την στιγμή $t_1=0,9\text{sec}$ δεν έχει φτάσει κανένα κύμα στο σημείο. Άρα $\psi_{\text{ολ}}=0\text{m}$.

B) Την στιγμή $t_2=1,01875\text{sec}$ αντιστοιχεί σε χρόνο $3T/4$ έτσι εκείνη τη στιγμή το σημείο O θα βρίσκεται σε κατακόρυφη απομάκρυνση $-A$ για κάθε ταλάντωση άρα θα βρίσκεται $\psi_{\text{ολ}} = -0,6\text{m}$.

Γ) Την στιγμή t_3 οι πηγές έχουν συναντηθεί και απομακρύνονται μεταξύ τους. Ο χρόνος αντιστοιχεί σε $T'/4$ μετά την συνάντηση των δύο πηγών. Έτσι θα βρίσκεται το σημείο σε θέση $+A$ για κάθε ταλάντωση άρα συνολικά $+0,6\text{m}$.

Δύο πηγές που δεν ξεκίνησαν ταυτόχρονα

Δύο πηγές κυμάτων δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $u=1\text{m/sec}$. Την στιγμή $t=0$ αρχίζει η πηγή O_1 να ταλαντώνεται κατακόρυφα με εξίσωση $\psi_1=0,02\eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Η πηγή O_2 ξεκινάει την κατακόρυφη ταλάντωσή της την χρονική στιγμή $t_1=2\text{sec}$ και έχει εξίσωση $\psi_2=0,02\eta\mu 2\pi t'$ (S.I.) με $t'=t-2$ (S.I.). Δύο σημεία A και B απέχουν αντίστοιχα αποστάσεις $R_1=3\text{m}$ $R_2=1\text{m}$ το σημείο A και $R_1'=6,5\text{m}$ $R_2'=6\text{m}$ το σημείο B από τις πηγές O_1 και O_2 αντίστοιχα.

- A) Να βρεθούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης των σημείων A και B.
- B) Να παρασταθούν γραφικά οι φάσεις των σημείων A και B σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Γ) Πόσες φορές το σημείο A είχε δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U=8\pi^2 \cdot 10^{-7}\text{J}$ μέχρι την χρονική στιγμή $t_2=5\text{sec}$ αν υποθέσουμε ότι στο υλικό αυτό σημείο αντιστοιχεί στοιχειώδες τμήμα μάζας $\Delta m=0,001\text{kg}$.

Απάντηση:

A) Από τις εξισώσεις των πηγών θα βρεθούν $A=0,02\text{m}$ και $\omega=2\pi\text{ r/s}$.

Από τον νόμο της κυματικής $u=\lambda \cdot f$ άρα $\lambda=1\text{m}$.

Για να φτάσει το κάθε κύμα στο σημείο A θα χρειασθεί χρόνο $\Delta t_1=R_1/u=3\text{s}$ και $\Delta t_2=R_2/u=1\text{s}$ αλλά επειδή η δεύτερη πηγή ξεκίνησε καθυστερημένα κατά $t_1=2\text{s}$ την ταλάντωσή της τα δύο κύματα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο σημείο A την χρονική στιγμή $t_2=3\text{sec}$. Η εξίσωση του κύματος που δημιουργεί η πηγή O_1 θα έχει είναι $\psi_1=0,02\eta\mu 2\pi(t-R_1)$ (S.I.) ενώ η εξίσωση του κύματος που ξεκινάει από την πηγή O_2 θα έχει μορφή $\psi_2=0,02\eta\mu 2\pi(t'-R_2)$ (S.I.) με $t'=t-2$ (S.I.). Με βάση την αρχή της επαλληλίας όταν θα ξεκινήσει η συμβολή των δύο κυμάτων η εξίσωση της απομάκρυνσης θα δίνεται από την σχέση

$$\psi_{\text{ολ}}=0,04\text{συν}(\pi R_2+2\pi-\pi R_1)\cdot\eta\mu(2\pi t-\pi R_1-\pi R_2-2\pi) \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Με αντικατάσταση των R_1 & R_2 για το σημείο A θα έχουμε την εξίσωση

$$\psi_A = \begin{cases} 0 & t \leq 3s \\ 0,04\eta\mu(2\pi t - 6\pi) & t \geq 3s \end{cases}$$

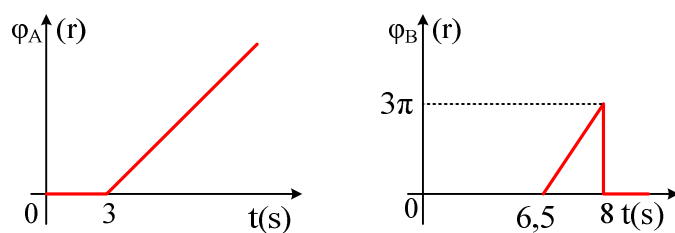
Για να φτάσει το κάθε κύμα στο σημείο B θα χρειασθεί χρόνο $\Delta t_3 = R_1'/u = 6,5s$ και $\Delta t_4 = R_2'/u = 6s$ αλλά επειδή η δεύτερη πηγή ξεκίνησε καθυστερημένα κατά $t_1 = 2s$ το δεύτερο κύμα θα φτάσει στο σημείο B την στιγμή $t_4 = 8sec$. Η εξίσωση (1) για το σημείο B μετά την στιγμή t_4 θα μας δώσει αποσβετική συμβολή ενώ από την στιγμή $6,5sec$ έως $8sec$ σημείο B θα ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος που παράγει η πηγή O_1 .

$$\psi_B = \begin{cases} 0 & t \leq 6,5s \\ 0,02\eta\mu 2\pi(t - 6,5) & 6,5 \leq t \leq 8s \\ 0 & t \geq 8s \end{cases}$$

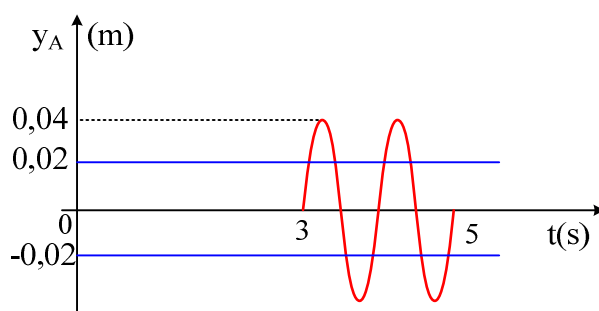
Με βάση τις παραπάνω σχέσεις οι φάσεις των σημείων A και B σε συνάρτηση με τον χρόνο θα είναι

$$\Phi_A = \begin{cases} 0 & t \leq 3s \\ 2\pi t - 6\pi & t \geq 3s \end{cases}$$

$$\Phi_B = \begin{cases} 0 & t \leq 6,5s \\ 2\pi(t - 6,5) & 6,5 \leq t \leq 8s \\ 0 & t \geq 8s \end{cases}$$



Γ) Η δυναμική ενέργεια δίνεται από την σχέση $U = \frac{1}{2} D \cdot \psi^2$ άρα $\psi = \pm 0,02m$. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης ψ_{A-t} η οποία είναι η παρακάτω



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι 8 φορές το σημείο Α βρισκόταν σε απομάκρυνση $\pm 0,02m$ άρα είχε και 8 φορές δυναμική ενέργεια $U = 8\pi^2 \cdot 10^{-7} J$ μέχρι την χρονική στιγμή $t = 5sec$.

Στάσιμο κύμα και αποστάσεις σημείων.

Κατά μήκος οριζόντιου ελαστικού μέσου και κατά την διεύθυνση του άξονα Ox δημιουργείται στάσιμο κύμα. Στη θέση $x=0$ εμφανίζεται κοιλία. Το σημείο A είναι το αμέσως επόμενο σημείο μετά το O που έχει την ίδια μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης κατά μέτρο με το σημείο O . Η στιγμιαία απόσταση των σημείων O και A καθορίζεται από την σχέση $0,08m \leq D \leq 0,1m$. Η ελάχιστη χρονική διάρκεια που χρειάζονται τα σημεία A και B για να βρεθούν από την μέγιστη στην ελάχιστη απόστασή τους είναι $1/40$ s.

Να βρεθούν:

- A) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος αν την στιγμή $t=0$ σημείο $x=0$ $v>0$.
- B) Να βρεθεί σε ποια θέση βρίσκεται ο $1000^{ος}$ δεσμός.
- Γ) Να βρεθεί η διαφορά φάσης για δύο σημεία που βρίσκονται στις θέσεις $x_B=10cm$ και $x_I=14cm$.
- Δ) Να βρεθεί η εξίσωση της στιγμιαίας απόστασης μεταξύ των σημείων $x_\Delta=12cm$ και $x_E=16cm$.

Απάντηση:

A) Για να έχει το σημείο A την ίδια μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης με το σημείο O που είναι κοιλία του στάσιμου κύματος σημαίνει ότι και το A είναι κοιλία του στάσιμου κύματος με $V_{max}=\omega \cdot 2A$.

Η επόμενη κοιλία μετά το $x=0$ βρίσκεται στην θέση $x=\lambda/2$. Τα σημεία αυτά ταλαντώνονται με εξισώσεις:

$$\psi = 2A \sin 2\pi x / \lambda \cdot \eta \mu 2\pi t / T$$

και αν αντικαταστήσουμε $x=0$ και $x=\lambda/2$ θα πάρουμε:

$$\psi_O = 2A \eta \mu 2\pi t / T \text{ και } \psi_A = -2A \eta \mu 2\pi t / T.$$

Η μεταξύ τους λοιπόν απόσταση θα δίνεται κάθε στιγμή από την σχέση:

$$D = \sqrt{\{(\Delta x)^2 + (|\psi_1| + |\psi_2|)^2\}} \quad (1) \text{ με τη βοήθεια του Π.Θ.}$$

Από την σχέση (1) παρατηρώ ότι η ελάχιστη τιμή του D θα συμβαίνει όταν τα $\psi_1 = \psi_2 = 0$ (όταν δηλαδή τα σημεία O, A βρίσκονται στην $\Theta.I.T$) και η μέγιστη όταν τα σημεία A και B βρίσκονται στις ακραίες θέσεις ταλάντωσής τους $+2A$ και $-2A$.

$$D_{\min}=\lambda/2 \quad \text{άρα } \lambda=0,16\text{m} \quad \text{και } D_{\max}=\sqrt{\{(\lambda/2)^2 + (4A)^2\}} \quad \text{άρα } A=0,015\text{m}$$

Για να φτάσουν τα σημεία Ο και Α από την ελάχιστη στην μέγιστη απομάκρυνση στον μικρότερο χρόνο χρειάζονται χρόνο $T/4$.

Έτσι η περίοδος είναι $T=0,1\text{sec}$.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

$$\psi=0,03\sin 12,5x\cdot\eta\mu 20\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Β) Η σχέση που δίνει τους δεσμούς για ένα στάσιμο κύμα της παραπάνω μορφής είναι :

$$x_{\Delta\epsilon\sigma\mu\omega\nu}=(2\kappa+1)\lambda/4.$$

Προσοχή όμως ο πρώτος δεσμός είναι για την τιμή $\kappa=0$. Άρα ο 1000^{ος} δεσμός θα βρεθεί για $\kappa=999$ Έτσι $x_{1000\text{ου}}=79,96\text{m}$.

Γ) Η εξίσωση ταλάντωση για το Β θα είναι:

$$\psi_B=0,03\sin 12,5\pi\cdot 0,1\eta\mu 20\pi t= -0,015\sqrt{2}\eta\mu 20\pi t=0,015\sqrt{2}\eta\mu(20\pi t+\pi) \quad (\text{S.I.})$$

Η εξίσωση ταλάντωση για το Γ θα είναι:

$$\psi_\Gamma=0,03\sin 12,5\pi\cdot 0,14\eta\mu 20\pi t= 0,015\sqrt{2}\eta\mu 20\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Η διαφορά λοιπόν της φάσης για τα σημεία Β και Γ είναι $\Delta\phi=\pi$

Δ) Η εξίσωση ταλάντωση για το Δ θα είναι $\psi_\Delta=0,03\sin 12,5\pi\cdot 0,12\eta\mu 20\pi t= 0 \text{ m}$.

Το σημείο λοιπόν Δ είναι δεσμός του στάσιμου κύματος.

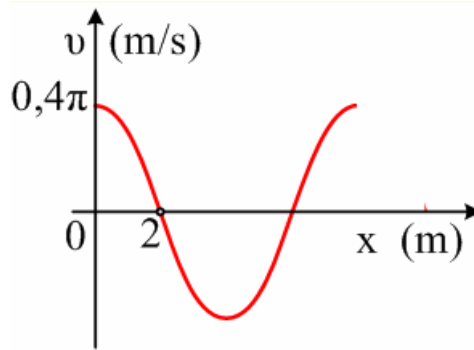
Η εξίσωση ταλάντωσης για το Ε θα είναι:

$$\psi_E=0,03\sin 12,5\pi\cdot 0,16\eta\mu 20\pi t= 0,03\eta\mu 20\pi t \quad (\text{S.I.}) .$$

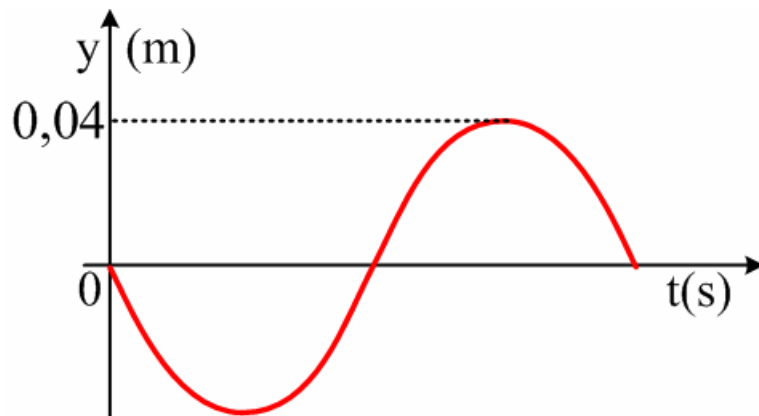
Η εξίσωση λοιπόν της στιγμιαίας απόστασης των σημείων Δ και Ε θα βρεθεί με την βοήθεια του Π.Θ. και θα είναι $D'=\sqrt{\{(\Delta x)^2 + \psi_E^2\}} = \sqrt{\{(0,04)^2 + 0,03^2\cdot\eta\mu^2 20\pi t\}}$
(S.I.)

Στάσιμο κύμα. Στοιχεία και γραφικές παραστάσεις

Ένα τεντωμένο σχοινί εκτείνεται στην διεύθυνση του άξονα Ox . Με κατάλληλη διαδικασία, κατά μήκος του σχοινιού δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στην θέση $x=0$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο στο $x=0$ έχει μέγιστη θετική ταχύτητα. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας των διαφόρων σημείων της χορδής σε συνάρτηση της θέσης δίνεται από της παρακάτω γραφική παράσταση την στιγμή $t=0$.



Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου που βρίσκεται στην θέση $x=4\text{m}$ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι



Να βρεθούν:

- A) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος
- B) Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση $x=7\text{m}$
- Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου που βρίσκεται στη θέση $x=3\text{m}$

- Δ) Να χαραχθεί ένα στιγμιότυπο μέχρι $x=16\text{m}$ του στάσιμου κύματος την χρονική στιγμή $t=kT+T/12$ όπου $k=0,\pm 1\pm 2\pm 3 \dots$. Ποιά η κατεύθυνση της ταχύτητας των σημείων που βρίσκονται στις θέσεις $x_1=3\text{m}$, $x_2=5\text{m}$, $x_3=7\text{m}$ και $x_4=9\text{m}$ τις παραπάνω στιγμές.
- Ε) Να δοθεί η γραφική παράσταση του πλάτους των διαφόρων σημείων της χορδής από το $x=0$ μέχρι $x=16\text{m}$.

Απάντηση:

Α) Από την γραφική παράσταση της ταχύτητας βλέπουμε την μέγιστη ταχύτητα του σημείου $x=0$ που είναι κοιλία $V_{\max}=0,4\pi \text{ m/sec}$. Άρα $V_{\max}=\omega \cdot 2A$ (1). Το σημείο $x=2\text{m}$ δεν έχει ταχύτητα ταλάντωσης άρα είναι δεσμός του στάσιμου κύματος και μάλιστα ο πρώτος δεσμός. Άρα $\lambda/4=2 \Rightarrow \lambda=8\text{m}$.

Για το σημείο $x=4\text{m}$ η εξίσωση του στάσιμου θα δώσει $\psi_4=2A\sin 2\pi \cdot 4/8 \cdot \eta\mu 2\pi t/T = -2A\eta\mu 2\pi t/T$. Από την γραφική παράσταση λοιπόν παρατηρούμε ότι $2A=0,04$ και $A=0,02\text{m}$ και από την σχέση (1) $\omega=10\pi \text{ r/sec}$.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

$$\psi=0,04\sin\pi x/4 \cdot \eta\mu 10\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Β) Η απομάκρυνση του σημείου $x=7\text{m}$ δίνεται από την σχέση:

$$\psi_7=0,04\sin 7\pi/4 \cdot \eta\mu 20\pi t = 0,02\sqrt{2} \eta\mu 10\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι:

$$u_7=0,02\sqrt{2} \cdot 10\pi \sin 10\pi t = 0,2\pi\sqrt{2} \sin 10\pi t \quad (\text{S.I.})$$

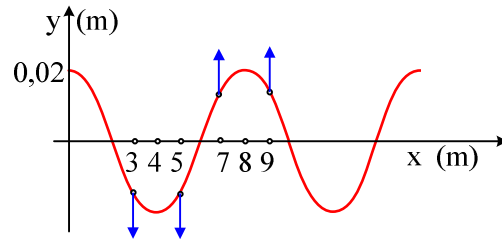
Γ) Η απομάκρυνση του σημείου $x=3\text{m}$ δίνεται από την σχέση:

$$\psi_3=0,04\sin 3\pi/4 \cdot \eta\mu 10\pi t = 0,02\sqrt{2} \eta\mu 10\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης θα είναι

$$a_3=-\omega^2 \cdot \psi_3=2\pi^2\sqrt{2} \eta\mu 10\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Δ) Όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος σε χρόνο kT επιστρέφουν στην θέση ισορροπίας τους δηλαδή πάνω στην ευθεία Ox . Σε χρόνο $T/12$ το σημείο $x=0$ θα έχει φτάσει στη θέση $\psi_0 = 2A\eta\mu\pi/6 = A = 0,02\text{m}$. Το στιγμιότυπο θα είναι

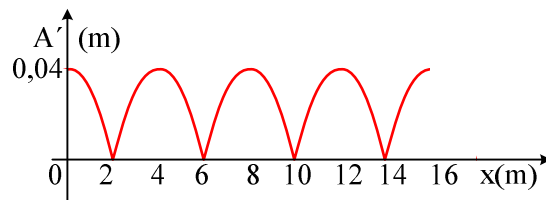


Όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος που ταλαντώνονται την χρονική στιγμή $T/12 < T/4$ απομακρύνονται από την θέση ισορροπίας για αυτό και έχουν τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Ε) Η εξίσωση του πλάτους ταλάντωσης για τα στάσιμα δίνεται από την εξίσωση

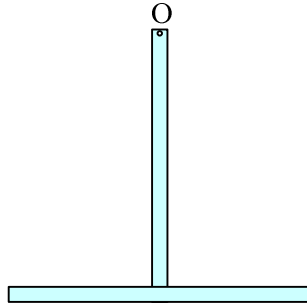
$$A' = |2A \sin 2\pi x / \lambda| = |0,04 \sin \pi x / 4|$$

Η γραφική παράσταση του πλάτους των διαφόρων σημείων του στάσιμου θα είναι



Ροπή αδράνειας και κίνηση ενός στερεού σχήματος T.

Δύο ράβδοι ίδιας μάζας $M=3\text{kg}$ και ίδιου μήκους $L=1\text{m}$ συγκολλούνται σχηματίζοντας ανάποδο T όπως στο παρακάτω σχήμα.



Το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα με το κέντρο μάζας της κάθε ράβδου αλλά και το καρφί να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Ασκώντας στο κέντρο μάζας της αρχικά κατακόρυφης ράβδου σταθερή δύναμη $F=200/\pi \text{ N}$ η οποία είναι συνεχώς κάθετη στην ράβδο το σύστημα αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από το καρφί.

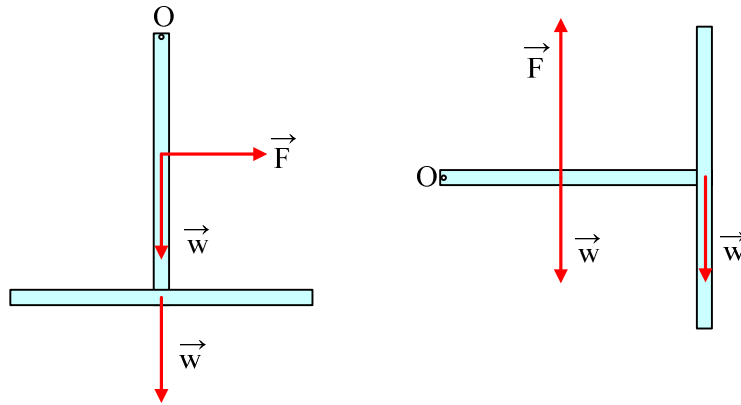
- A) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων γύρω από τον άξονα περιστροφής του
- B) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του συστήματος καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση-επιβράδυνση όταν το σύστημα έχει διαγράψει γωνία 90° σε σχέση με την αρχική του θέση.
- Γ) Σε κάποια θέση και ενώ το σύστημα ανεβαίνει καταργούμε την δύναμη. Αν θέλουμε τελικά το σύστημα να ισορροπήσει σχηματίζοντας ένα κανονικό κατακόρυφο "T" μέχρι ποια γωνία σε σχέση με την αρχική κατακόρυφη θέση θα πρέπει να ενεργήσει η δύναμη.

Δίνεται για την κάθε ράβδο το $I_{\text{cm}}=1/12 M \cdot L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Το σύστημα αποτελείται από δύο ράβδους που περιστρέφονται γύρω από το καρφί που βρίσκεται στο άκρο της μίας και απέχει από το κέντρο μάζας της μίας κατά $L/2$ και από το κέντρο μάζας της άλλης κατά L . Εφαρμόζοντας λοιπόν κανόνα του Στάινερ για το σύστημα θα έχουμε:

$$I = 1/12 M \cdot L^2 + M(L/2)^2 + 1/12 M \cdot L^2 + ML^2 = 4,25 \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$



Β) Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι το σύστημα να διαγράψει γωνία 90° θα έχουμε $WF = K_{\text{ελασ}} + U_{W1} + U_{W2}$ άρα

$$200/\pi \cdot 2\pi \cdot 0,5/4 = K_{\text{ελασ}} + 3 \cdot 10 \cdot 0,5 + 3 \cdot 10 \cdot 1 \quad \text{άρα } K_{\text{ελασ}} = 5J$$

Με βάση τον νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση και για γωνία διαγραφής 90° για το σύστημα θα έχουμε

$$F \cdot L/2 - Mg \cdot L/2 - M \cdot g \cdot L = I \cdot \alpha_{\text{γων}} \quad \text{άρα}$$

$\alpha_{\text{γων}} \approx -3\pi/\text{sec}^2$. Δηλαδή το σύστημα εκείνη την στιγμή επιβραδύνει στροφικά ανεβαίνοντας.

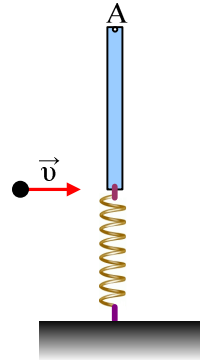
Γ) Για να ισορροπήσει το σύστημα σχηματίζοντας κανονικό κατακόρυφο "Τ" θα πρέπει στην τελική θέση να μην έχει κινητική ενέργεια και η συνισταμένη των ροπών να είναι ίση με το μηδέν. Με την βοήθεια και πάλι της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση θα πρέπει $WF = +U_{W1} + U_{W2}$ άρα

$$F \cdot L \theta/2 = Mg \cdot L + Mg \cdot 2L \quad \text{άρα } \theta = 0,9\pi \text{ rad.}$$

Στην ανώτερη θέση τα αποστήματα των βαρών των δύο ράβδων είναι 0 άρα $\Sigma\tau = 0$. Άρα το σώμα δεν έχει κινητική ενέργεια στο ανώτερο σημείο και σε εκείνο το σημείο ισχύει και $\Sigma\tau(O) = 0$ άρα το σύστημα θα ισορροπεί.

Ράβδος-κρούση-πλάγιο ελατήριο

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα $M=1\text{Kg}$ μήκος $l=0,45\text{m}$ και ισορροπεί κατακόρυφα με την βοήθεια οριζόντιο καρφιού που βρίσκεται στο σημείο Α και κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθερά $K=100\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $l_0=0,15\text{m}$ που ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το οριζόντιο καρφί που διέρχεται από το σημείο Α. Το μέτρο της δύναμη που δέχεται η ράβδος από το καρφί στην αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος είναι $F=10\text{N}$. Σημειακό σώμα μάζας $m=0,2\text{Kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου u και σφηνώνεται ακαριαία στο άκρο Γ της ράβδου. Μετά την κρούση η ράβδος μόλις και φτάνει στην οριζόντια θέση. Να βρεθούν:



- A) Η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου
- B) Το μέτρο της ταχύτητας u του σημειακού σώματος
- Γ) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος-σημειακό σώμα μόλις η ράβδος γίνει οριζόντια
- Δ) Το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος κατά την περιοδική κίνηση του συστήματος.

Για την ράβδο η ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I_A=MI^2/3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/sec}^2$

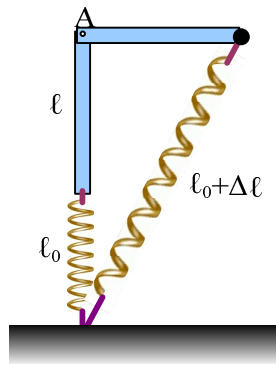
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Επειδή η ράβδος ισορροπεί για την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα θα έχουμε $\Sigma F_\psi=0$ άρα $Mg=F_{\text{καρ}} + F_{\text{ελ}}$ άρα $F_{\text{ελ}}=0$ άρα και η συσπείρωση του ελατηρίου $x_{\text{ελ}}=0$.
- B) Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την κρούση του σημειακού σώματος με τη ράβδο θα έχουμε

$$mul=(1/3MI^2+ml^2)\omega \quad (1)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση της ράβδου μέχρι την τελική οριζόντια θέση αν ορίσουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται α σημείο της ράβδου Γ όταν αυτή ισορροπεί κατακόρυφη θα έχουμε

$$\frac{1}{2} (1/3 MI^2 + ml^2)\omega^2 + Mgl/2 = 1/2 K\Delta l^2 + Mgl + mgl \quad (2)$$



Με τη βοήθεια του ΠΘ θα βρούμε την επιμήκυνση του ελατηρίου

$$(l_0 + \Delta l)^2 = \sqrt{l^2 + (l + l_0)^2} \text{ θα βρούμε } \Delta l = 0,6\text{m.}$$

Με τη βοήθεια σχέσεων (1) και (2) θα προκύψει $u = \sqrt{564} \approx 23,75\text{m/sec}$

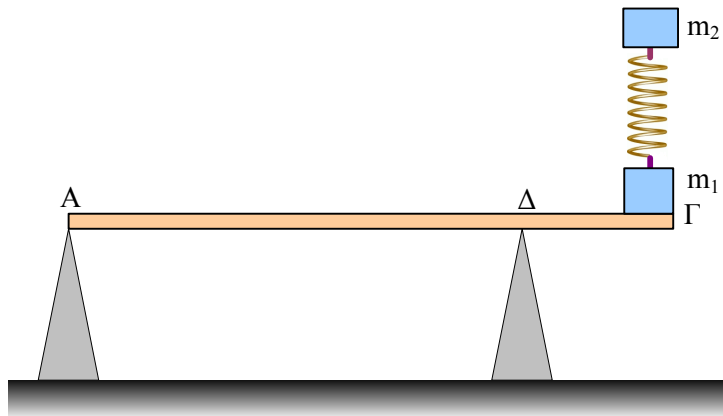
Γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τη στιγμή που η ράβδος θα γίνει οριζόντια θα δίνεται από την σχέση $\Delta L / \Delta t = Mgl/2 + mgl$

$$+ F_{ελψ}l = 51,15\text{N.m}$$

Δ) Το σημειακό σώμα θα έχει την μέγιστη γραμμική του ταχύτητα στο χαμηλότερο σημείο της κίνησης του εκεί όπου η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι η ελάχιστη. Αυτό συμβαίνει την στιγμή αμέσως μετά την κρούση. Με την βοήθεια της σχέσης (1) θα βρούμε $\omega = 5\sqrt{564}/6\text{m/sec}$ και η γραμμική ταχύτητα του σημειακού σώματος $u = \omega \cdot l = 0,375\sqrt{564} \approx 8,9\text{m/sec}$

Μια ράβδος και δύο σώματα.

Η ράβδος ΑΓ του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M=4\text{Kg}$ και μήκος $L=4\text{ m}$. Στο άκρο Γ της ράβδου είναι **κολλημένο** σώμα μάζας $m_1=0,5\text{Kg}$ και μέσω ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=200\text{N/m}$ ισορροπεί δεύτερο σώμα μάζας $m_2=0,5\text{ kg}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια δύο υποστηρίγμάτων στα σημεία Α και Δ με την απόσταση $ΑΔ=3\text{ m}$. Την χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα μάζας m_2 εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα U_0 . Το σύστημα μόλις και καταφέρνει να μην χάνει την επαφή του με το σημείο Α του υποστηρίγματος. Να βρεθούν:

- Α) Η αρχική ταχύτητα U_0
- Β) Οι χρονικές εξισώσεις των κατακόρυφων δυνάμεων που δέχεται η ράβδος από τα υποστηρίγματα Α και Δ. Μπορεί να χαθεί η επαφή της ράβδου με το υποστήριγμα Δ.
- Γ) Θα μπορούσε να εξελιχθεί το φαινόμενο χωρίς το σώμα m_1 να είναι **κολλημένο** στο σημείο Γ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Για να μην χαθεί οριακά η επαφή στο σημείο Α θα πρέπει η δύναμη επαφής στο σημείο Α οριακά να μηδενιστεί. Με την βοήθεια της συνθήκης ισορροπίας για το σύστημα εκείνη την στιγμή θα έχουμε $\Sigma \tau(\Delta)=0$ άρα $-m_1 \cdot g \cdot (\Gamma\Delta) - F_{ελ.}(\Gamma\Delta) + M \cdot g \cdot (ΚΔ)=0$ άρα $x_{ελ}=35/200\text{ m}$.

Η αρχική συσπίρωση του ελατηρίου θα βρεθεί από την ισορροπία του σώματος m_2

$$M_2 \cdot g = K \cdot x_{αρχ} \quad \text{άρα } x_{αρχ}=5/200\text{ m}$$

Το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_1 για να μην συμβαίνει ανατροπή του συστήματος θα είναι $A=x_{ελ}-x_{αρχ}=0,15\text{m}$

Η αρχική ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 θα είναι και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης

$$\text{Αρα } U_0 = \omega \cdot A = \sqrt{K/m_2} \cdot A = 3 \text{ m/sec}$$

Β) Από τις συνθήκες ισορροπίας για την ράβδο θα έχουμε

$$N_A + N_\Delta = M \cdot g + m_1 \cdot g + F_{\text{ελ}} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau(\Gamma) = 0 \quad 4N_A + N_\Delta \cdot 1 - M \cdot g \cdot 2 = 0 \quad \text{θα βρεθεί } 4N_A + N_\Delta = 80 \quad (2)$$

Από την ταλάντωση του σώματος m_2

$$F_{\text{ελ}} - m_2 \cdot g = -K \cdot \Delta h = -\omega^2 \cdot \Delta h \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) θα βρεθούν $N_A = 10 + 10 \eta \mu 20t$ & $N_\Delta = 40 - 40 \eta \mu 20t$ (S.I.)

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι $N_\Delta \geq 0$ άρα μόλις και δεν χάνει την επαφή του με το υποστήριγμα Δ η ράβδος.

Γ) Για να συνεχίσει κανονικά το φαινόμενο θα πρέπει το σώμα με μάζα m_1 να μην χάνει την επαφή του με το σημείο Γ. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει $N_1 \geq 0$. Από την ισορροπία του σώματος μάζας m_1 θα έχουμε $N_1 = F_{\text{ελ}} + m_1 \cdot g$ άρα $N_1 = 10 - 30 \eta \mu 30t$ (3). Από την σχέση (3) παρατηρούμε ότι η N_1 παίρνει και αρνητικές τιμές πράγμα άτοπο. Έτσι το φαινόμενο δεν μπορεί να εξελιχθεί ομαλά.

Πλαστική κρούση δύο ράβδων

Δύο λεπτοί ράβδοι από σίδηρο έχουν μήκος $L_1=1,2\text{m}$ και $L_2=4L_1$ αφήνονται από οριζόντια θέση και φτάνουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη θέση τους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι δύο ράβδοι έχουν κοινό οριζόντιο άξονα περιστροφής το ανώτερο σημείο της κάθε ράβδου. Η μάζα της μικρής ράβδου είναι $m_1=1\text{kg}$. Την στιγμή της κρούσης των δύο ράβδων μέσω μιας ασφάλειας οι δύο ράβδοι κλειδώνουν μεταξύ τους έτσι ώστε το σύστημα να συμπεριφέρεται πλέον σαν μία ράβδος. Να βρεθούν:

- A) Οι μέγιστες γωνιακές ταχύτητες των δύο ράβδων πριν την πλαστική τους κρούση
- B) Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων μετά την πλαστική τους κρούση
- Γ) Το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας σε σχέση με την κατακόρυφη που θα διαγράψει το σύστημα των δύο ράβδων μετά την πλαστική τους κρούση.
Δίνεται για την κάθε ράβδο $I_0=1/3 M.L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Η κάθε ράβδος θα έχει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα την στιγμή που παύει να υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση που θα οφείλεται στη ροπή του βάρους της. Αυτό συμβαίνει για την κάθε ράβδο στην κατακόρυφη θέση της κάθε ράβδου. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κάθε ράβδο θα έχουμε :

$$M.g.L/2 = 1/2 \cdot 1/3 \cdot M.L^2 \cdot \omega^2 \quad \text{άρα } \omega = \sqrt{3 \cdot g/L}$$

και για τις δύο ράβδους θα έχουμε:

$$\omega_1 = 5\text{r/s} \quad \text{και} \quad \omega_2 = 2,5\text{r/s}.$$

B) Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων θα είναι το άθροισμα των ροπών αδράνειας της κάθε ράβδου. Η δεύτερη ράβδος που είναι από το ίδιο υλικό με την πρώτη θα έχει τετραπλάσια μάζα γιατί έχει τετραπλάσιο μήκος. Έτσι η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι:

$$I_{\text{ολ}} = 1/3 M_1.L_1^2 + 1/3 M_2.L_2^2 = 31,2\text{kg.m}^2.$$

Γ) Για την πλαστική κρούση αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα των δύο ράβδων και θεωρώντας θετική την στροφορμή της μεγάλης ράβδου θα έχουμε

$$I_2 \cdot \omega_2 - I_1 \cdot \omega_1 = I_{ολ} \cdot \omega_{\text{συστ}}$$
$$\text{άρα } \omega_{\text{συστ}} \approx 2,38 \text{ r/s.}$$

Για το σύστημα και την εφαρμογή της ΑΔΕ θα πάρουμε:

$$K_{\text{συστ}} = U_{W1} + U_{W2} \quad \text{άρα}$$

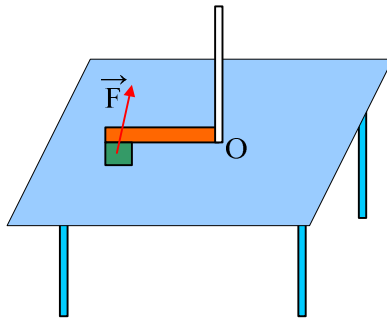
$$\frac{1}{2} \cdot I_{ολ} \cdot \omega_{\text{συστ}}^2 = M_1 \cdot g \cdot \Delta h_1 + M_2 \cdot g \cdot \Delta h_2$$

με το $\Delta h = L/2 - L \sin \theta_{\text{max}}/2$

$$\text{Θα βρούμε } \sin \theta_{\text{max}} = 0,13.$$

Περιστροφή ράβδου με μεταβλητή δύναμη.

Πάνω σε οριζόντιο τραπέζι βρίσκεται ράβδος μάζας $M=3\text{Kg}$ και μήκους $l=1\text{m}$. Το ένα άκρο της ράβδου O είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο άξονα ενώ στο άλλο άκρο της ράβδου έχουμε στερεώσει σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ που ακουμπάει στο τραπέζι. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται παράλληλα με το τραπέζι χωρίς να βρίσκεται σε επαφή με αυτό γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής της O .



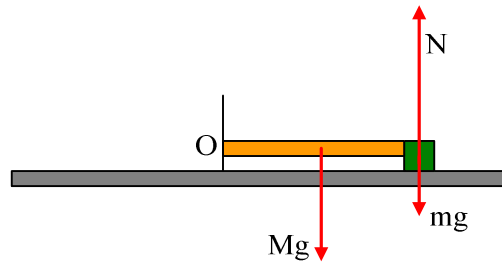
Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος m και τραπεζιού είναι $\mu=0,4$. Ασκούμε στο σώμα m μεταβλητή δύναμη $F=100-10\theta$ (S.I.) κάθετη συνεχώς στην ράβδο και παράλληλη προς το τραπέζι. Η γωνία θ είναι η γωνιακή μετατόπιση της ράβδου πάνω στο τραπέζι. Η δύναμη F παύει να ασκείται μετά τον μηδενισμό της. Να βρεθούν:

- A) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος
- B) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας την στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη
- Γ) Ο ολική γωνιακή μετατόπιση της ράβδου μέχρι αυτή να σταματήσει.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής της $I=1/3Ml^2$. Το σώμα m να θεωρηθεί σημειακό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Υπάρχουν δύο δυνάμεις που επηρεάζουν τη κίνηση του συστήματος. Η μεταβλητή δύναμη και η δύναμη τριβής στο σώμα m . Η δύναμη τριβής είναι $T=\mu \cdot N$ όπου N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στο σώμα m . Αν πάρουμε την ισορροπία του συστήματος στον άξονα $\psi\psi'$ με την συνθήκη των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου θα έχουμε

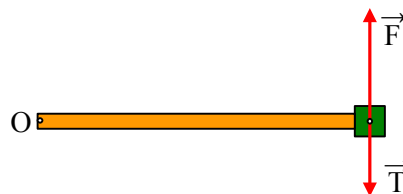


$$\Sigma \tau(O)=0 \quad \text{άρα} \quad -Mg.L/2 -m.g.L +N.L=0 \quad \text{άρα}$$

$$N=25N \quad \text{οπότε}$$

$$T=0,4.25=10N.$$

Η κίνηση λοιπόν του συστήματος είναι επιταχυνόμενη στροφική με γωνιακή επιτάχυνση που όλο και ελαττώνεται εξαιτίας της ελάττωσης της δύναμης.

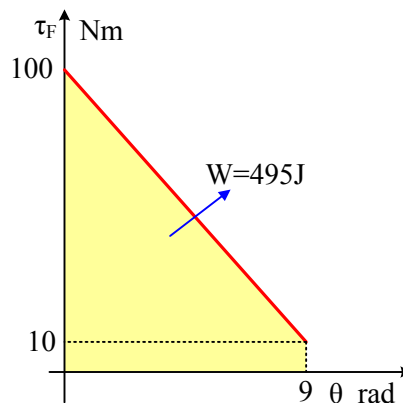


κάτοψη

Όταν $\tau_F > \tau_T$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στροφικά άρα το ω αυξάνει όταν $\tau_F = \tau_T$ το ω παύει να αυξάνει και όταν το $\tau_F < \tau_T$ η κίνηση γίνεται επιβραδυνόμενη στροφικά άρα το ω αρχίζει να μειώνεται. Ετσι μέγιστη γωνιακή ταχύτητα θα έχει το σύστημα όταν $\tau_F = \tau_T$ δηλαδή όταν $F.l = T.l$ δηλαδή όταν $100 - 10\theta = 10$ άρα $\theta = 9\text{rad}$.

Αν εφαρμόσουμε ΘΜΚΕ για το σύστημα θα πάρουμε

$$W_{ολ} = \Delta K \quad \text{άρα} \quad W_{\tau_F} + W_{\tau_T} = K_{\max}$$



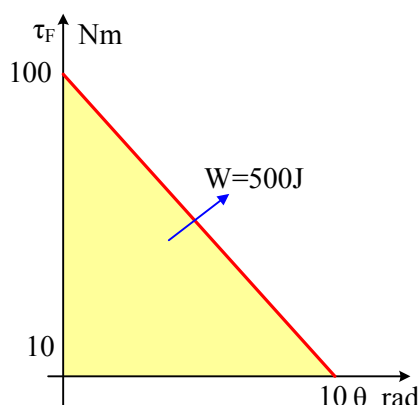
Από το εμβαδό θα υπολογίσουμε το έργο της ροπής δύναμης $W_{\tau_F}=495J$ και το έργο της ροπής της τριβής $W_{\tau_T}=-10 \cdot 1.9=-90J$

$$\text{Άρα } K_{\max}=405J$$

Β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τον τύπο $\Delta K/\Delta t = \Sigma \tau \cdot \omega$ (1)

Η μοναδική δύναμη που ασκεί ροπή στο σύστημα την στιγμή που καταργείται η F είναι η δύναμη της τριβής που μάλιστα αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα. Την γωνιακή ταχύτητα εκείνη τη στιγμή θα την βρούμε πάλι με ένα ΘΜΚΕ μέχρι η δύναμη να γίνει 0 δηλαδή $100-10\theta=0$ άρα $\theta=10\text{rad}$.

$$W_{\text{ολ}} = \Delta K \quad \text{άρα } W_{\tau_F} + W_{\tau_T} = K$$



Από το εμβαδό θα υπολογίσουμε το έργο της ροπής δύναμης $W_{\tau_F}=500J$ και το έργο της ροπής της τριβής $W_{\tau_T}=-10 \cdot 10=-100J$. Η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι:

$$I_{\text{ολ}} = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 = 2\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

$$\text{Άρα } 500-100 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \omega^2 \quad \text{άρα } \omega = 20\text{rad/sec}.$$

Από την (1) θα έχουμε:

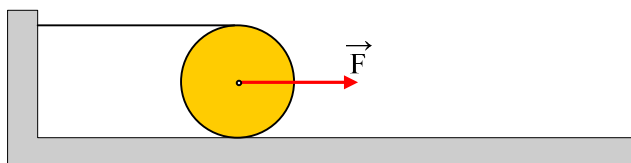
$$\Delta K/\Delta t = -10 \cdot 1 \cdot 20 = -200J/\text{sec}.$$

Γ) Αν εφαρμόσουμε ΘΜΚΕ για το σύστημα μέχρι αυτό να σταματήσει θα πάρουμε

$$W_{\text{ολ}} = \Delta K \quad \text{άρα } W_{\tau_F} + W_{\tau_T} = 0 \quad \text{άρα } 500 - 10 \cdot 1 \cdot \theta' = 0 \quad \text{άρα } \theta' = 50\text{rad}.$$

Περιστροφή μέχρι πότε;

Ο κύλινδρος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $m=2\text{Kg}$ και ακτίνα $R=0,1\text{m}$. Το νήμα μπορεί να ξετυλίγεται από τον κύλινδρο και να είναι συνεχώς παράλληλο και τεντωμένο με το οριζόντιο επίπεδο που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής $\mu=0,1$. Την στιγμή $t=0$ ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$ με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίσει να κινείται περιστρεφόμενος αριστερόστροφα, ενώ η ταχύτητα (ως προς ακίνητο παρατηρητή) του σημείου επαφής με το νήμα είναι συνεχώς μηδενική.



Την χρονική στιγμή $t_1=5\text{sec}$ το νήμα κόβεται ενώ τη χρονική στιγμή $t_2=10\text{sec}$ ο κύλινδρος μπαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Να βρεθούν:

- Α) Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου σαν συνάρτηση του χρόνου και με την βοήθεια αυτής να βρεθεί η συνολική γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου.
- Β) Η γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου σαν συνάρτηση του χρόνου. Τι εκφράζει το περικλειόμενο εμβαδό ανάμεσα στην καμπύλη και τον άξονα των χρόνων;
- Γ) Το ποσοστό της ενέργειας που μεταφέρεται στον κύλινδρο μέσω του έργου της δύναμης F , το οποίο μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια και ελευθερώθηκε στο περιβάλλον έως τη χρονική στιγμή $t_2=10\text{s}$

Για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5 \cdot M \cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Η ταχύτητα επαφής του κυλίνδρου με το νήμα είναι συνεχώς 0 ενώ η ταχύτητα επαφής του κυλίνδρου με το οριζόντιο επίπεδο θα είναι $2U_{\text{cm}}$. Έτσι θα αναπτυχθεί δύναμη τριβής ολίσθησης με φορά προς τα πίσω. Από τους νόμους της κίνησης για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε

$$F - T - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a_1 \quad (1)$$

$$T \cdot R - \mu \cdot m \cdot g \cdot R = 0,5 \cdot m \cdot R^2 \cdot a_{\omega v1} \quad (2)$$

μετά από πράξεις θα βρούμε $a_1=2\text{m/sec}^2$ και $a_{\omega v1}=20\text{r/sec}^2$.

Την στιγμή $t=5\text{sec}$ το νήμα κόβεται με αποτέλεσμα η ροπή της τριβής ολίσθησης να επιβραδύνει στροφικά το σώμα. Από τους νέους νόμους για την νέα κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε

$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a_2 \quad \text{άρα } a_2 = 4 \text{ m/sec}^2 \text{ και}$$

$$\mu \cdot m \cdot g \cdot R = 0,5 \cdot m \cdot R^2 \cdot a_{\gamma\omega v2}$$

$$\text{άρα } a_{\gamma\omega v2} = 20 \text{ r/sec}^2.$$

Την χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ sec}$ που ο κύλινδρος μπαίνει στο λείο επίπεδο παύουν πλέον να υπάρχουν τριβές. Άρα από την νέα εξίσωση κίνησης μόνο για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

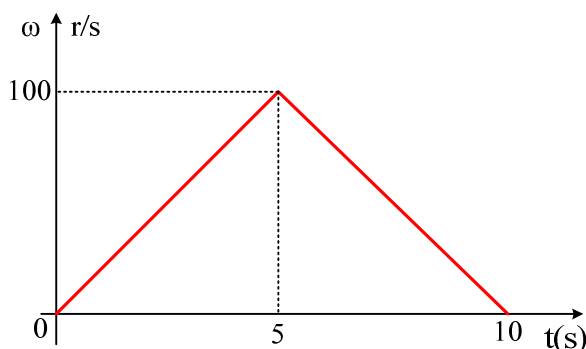
$$F = m \cdot a_3 \quad \text{άρα}$$

$$a_3 = 5 \text{ m/sec}^2.$$

Η γωνιακή ταχύτητα θα δίνεται από την σχέση για την αρχική κίνηση του κυλίνδρου $\omega = a_{\gamma\omega v1} \cdot t = 20t$ για $0 \leq t \leq 5$ (S.I) και

$$\omega = \omega_0 - a_{\gamma\omega v2} \cdot t' = 100 - 20 \cdot t' \quad \text{με } t' = t - 5 \quad \text{για } 5 \leq t \leq 10 \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση θα είναι



Το περικλειόμενο εμβαδόν εκφράζει την συνολική γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου μιας και την στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$ ο κύλινδρος παύει πλέον να εκτελεί στροφική κίνηση.

$$\text{Άρα } \theta = E = 100 \cdot 10 / 2 = 500 \text{ rad}$$

Β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από την σχέση

$$\Delta K / \Delta t = \Sigma F \cdot U + \Sigma \tau \cdot \omega = m \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot t + I \cdot a_{\gamma\omega v1} \cdot a_{\gamma\omega v1} \cdot t = 12 \cdot t \quad 0 \leq t \leq 5 \text{ (S.I.)}$$

Μόλις όμως κοπεί το νήμα η κίνηση είναι επιταχυνόμενη μεταφορική αλλά επιβραδυνόμενη στροφική έτσι ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

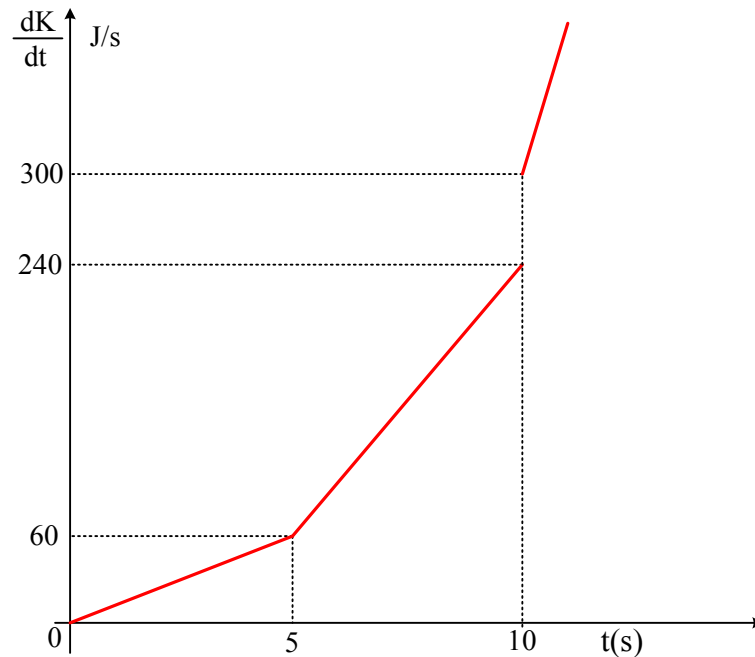
$$\Delta K / \Delta t = \Sigma F \cdot U - \Sigma \tau \cdot \omega = m \cdot a_2 \cdot (U_0 + a_2 \cdot t') - I \cdot a_{\gamma\omega v2} \cdot (\omega_0 - a_{\gamma\omega v2} \cdot t') = 60 + 36t' \quad 0 \leq t' \leq 5 \text{ (S.I.) όπου } t' = t - 5 \text{ και με αντικατάσταση}$$

$$\Delta K / \Delta t = 36t - 120 \quad 5 \leq t < 10 \text{ (S.I.)}$$

Μετά την χρονική στιγμή $t_2=10\text{s}$ ο κύλινδρος παύει να περιστρέφεται και εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση άρα

$$\Delta K/\Delta t = \Sigma F \cdot U = 10(30 + 5 \cdot t') = 50t - 200 \quad t > 10 \quad (\text{S.I.})$$

Η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή



Το περικλειόμενο εμβαδόν εκφράζει το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και για το πρώτα 10sec είναι:

$$W_{ολ} = 60 \cdot 5/2 + (60 + 240) \cdot 5/2 = 900 \text{ J}$$

Γ) Με την βοήθεια του νόμου του διαστήματος για την επιταχυνόμενη κίνηση στα πρώτα 5 sec $x_1 = 1/2 \cdot a_1 \cdot t_1^2 = 25 \text{ m}$ ενώ για τα επόμενα 5sec από τον ίδιο νόμο θα έχουμε $x_2 = U_0 \cdot t_2 + 1/2 \cdot a_2 \cdot t_2^2 = 100 \text{ m}$

$$\text{Αρα } W_F = F \cdot x_{ολ} = 10 \cdot 125 = 1250 \text{ J}$$

$$\text{Αρα με βάση το ολικό έργο } W_F + W_T = W_{ολ} \quad \text{άρα } W_T = -350 \text{ J}$$

Το ίδιο θα μπορούσε να προκύψει και αν προσθέταμε τα έργα της τριβής για την παραπάνω διαδικασία:

$$W_{T1} = -T \cdot 2x_1 = -100 \text{ J}$$

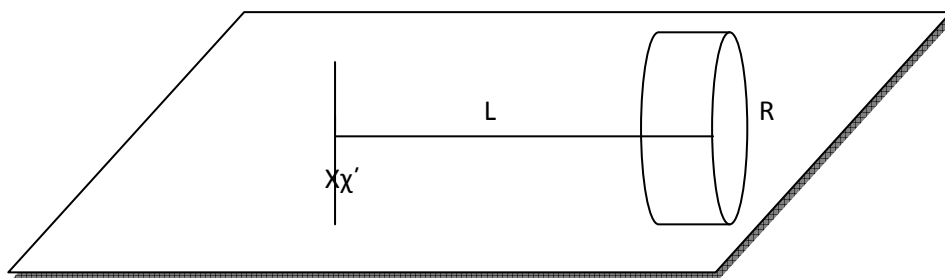
$$W_{T2} = -T \cdot x_2 = -200 \text{ J}$$

$$W_{Tτ} = -T \cdot R \cdot \theta = -50 \text{ J}$$

$$\text{Αρα } W_{T_{ολ}} = -350 \text{ J}$$

$$\Pi = |-350|/1250 \cdot 100\% = 28\%$$

Περιστροφή δίσκου, γύρω από καρφί.



Στο παραπάνω σχήμα λεπτότατο καρφί αμελητέας μάζας έχει μήκος $L=1\text{m}$ και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα και οριζόντια χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα $\chi\chi'$. Η άλλη άκρη του καρφιού είναι περασμένη στο κέντρο ομογενούς λεπτότατου δίσκου μάζας $M=1\text{K}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$. Ασκούμε στο κέντρο του δίσκου σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=1,75/\pi \text{ N}$ συνεχώς κάθετη στο καρφί. Σε όλη την διάρκεια της κίνησης ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου μετά την εκτέλεση μίας πλήρους περιστροφής του καρφιού. Δίνεται για τον λεπτό δίσκο ότι $I_{\text{cm}}=0,5 \cdot M \cdot R^2$. Να θεωρηθεί γνωστό το θεώρημα των κάθετων αξόνων που λέει: Η ροπή αδράνειας επίπεδου στερεού ως προς άξονα z κάθετο στο επίπεδό του, ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς δύο οποιουδήποτε κάθετους μεταξύ τους άξονες x, y που βρίσκονται στο επίπεδο του σώματος και τέμνουν κάθετα τον άξονα ($I_z=I_x+I_y$)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η κίνηση του δίσκου είναι διπλή περιστροφική. Μία γύρω από το καρφί και μία γύρω από τον άξονα $\chi\chi'$. Έτσι η κινητική ενέργεια του δίσκου αποτελείται από την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής γύρω από κέντρο μάζας του με άξονα το καρφί και της κινητικής λόγω περιστροφής γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $\chi\chi'$

$$K_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} \cdot I_{\text{cm}} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{\chi\chi'} \cdot \omega_2^2$$

Με βάση το θεώρημα των κάθετων αξόνων $I_z=I_x+I_y$ και λόγω συμμετρίας του δίσκου $I_x=I_y$

Άρα

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 = 2I_x \quad \text{άρα } I_x = \frac{1}{4} \cdot M \cdot R^2$$

και με βάση τον κανόνα του Steiner:

$$I_{\chi\chi'} = I_x + M \cdot L^2 = \frac{1}{4} \cdot M \cdot R^2 + M \cdot L^2.$$

Με αντικατάσταση $\omega_1 = U_{\text{cm}}/R$ και $\omega_2 = U_{\text{cm}}/L$ θα βρούμε μετά από πράξεις

$$K_{ολ} = M \cdot U_{cm}^2 (R^2/4L^2 + 3/2)/2$$

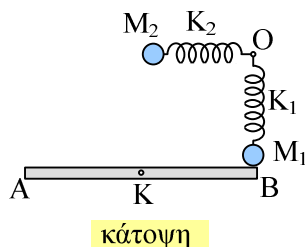
Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε $WF = K_{ολ}$

$$\text{άρα } F \cdot 2\pi \cdot L = M \cdot U_{cm}^2 (R^2/4L^2 + 3/2)/2$$

μετά από πράξεις $U_{cm} = 2m/sec.$

Περιοδική κίνηση ράβδου και δύο σωμάτων.

Στο παρακάτω σχήμα τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=100\text{N/m}$ και $K_2=25\text{N/m}$ και είναι στερεωμένα σε ένα κοινό σημείο O πάνω σε οριζόντιο τραπέζι σχηματίζοντας γωνία 90° .



Τα σημειακά σώματα έχουν ίσες μάζες $M_1=M_2$ και είναι δεμένα στα άκρα των δύο ελατηρίων. Ράβδος μάζας M και μήκους $L=2l_0=1\text{m}$ όπου l_0 το φυσικό μήκος των ελατηρίων ισορροπεί πάνω στα τραπέζι και μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια γύρω από κατακόρυφο καρφί που βρίσκεται στο κέντρο της ράβδου. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί ενώ είναι παράλληλη με τον άξονα του ελατηρίου με σταθερά K_2 βρισκόμενη σε επαφή με το σώμα μάζας M_1 . Συσπειρώνουμε το ελατήριο σταθεράς K_1 κατά $A=0,1\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σώμα μάζας M_1 ελεύθερο. Αν η κάθε κρούση μεταξύ των σφαιρών και της ράβδου είναι ελαστική και αμέσως μετά την κρούση κινείται ένα μόνο σώμα (είτε η ράβδος είτε οι μάζες M_1, M_2) να βρεθούν:

- Α) Η σχέση ανάμεσα στις μάζες των σωμάτων και στη μάζα της ράβδου.
- Β) Η περίοδος της κίνησης που θα εκτελέσει το σύστημα αν η μάζα της ράβδου είναι $M=3\text{Kg}$.
- Γ) Οι γραφικές παραστάσεις των ταχυτήτων των σωμάτων M_1 & M_2 και της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου σαν συνάρτηση με το χρόνο και για χρόνο $0,8\pi\text{sec}$.

$$I_{cm}=1/12 \cdot M \cdot L^2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Με την βοήθεια της ΑΔΣ και της ΑΔΕ για κάθε κρούση θα έχουμε

$$M_1 \cdot U \cdot L/2 = 1/12 \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot U^2 = 1/2 \cdot 1/12 \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει εύκολα $M=3M_1$

Β) Η ταχύτητα του σώματος M_1 θα είναι η μέγιστη ταχύτητα και θα βρεθεί από την σχέση $U=vK/M_1$. $A=1\text{m/sec}$. Από την σχέση (1) μετά από πράξεις το $\omega=2\pi/\text{sec}$. Η ράβδος κινείται χωρίς τριβές πάνω στο τραπέζι άρα θα εκτελέσει περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή

ταχύτητα $\omega=2\pi/\text{sec}$ μέχρι να καλύψει γωνία $\phi=90^\circ$ και να συγκρουστεί και πάλι ελαστικά με τη δεύτερη μάζα M_2 . Στην συνέχεια η μάζα M_2 θα εκτελέσει γ.α.τ. και σε χρόνο $t=T_2/2$ θα επιστρέψει στο ίδιο σημείο και θα ξαναγίνει πάλι η ελαστική κρούση. Η ράβδος θα αποκτήσει και πάλι την ίδια κατά μέτρο γωνιακή ταχύτητα ω και θα συγκρουστεί και πάλι με την μάζα M_1 . Έτσι συνολικά η περίοδος της περιοδικής κίνησης θα είναι

$$T=T_1/2 + T_2/2 + 2\theta/\omega = \pi/10 + \pi/2 + \pi/5 = 0,8\pi \text{ sec}$$

Γ) Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα M_1 θα δίνεται από την σχέση

$$v_1 = \begin{cases} 1 \cdot \sin(10t + \pi/2) & 0 \leq t < \pi/20 \\ 0 & 0 < t < 3\pi/4 \\ 1 \cdot \sin(10t - 15\pi/2) & 3\pi/4 < t < 0,8\pi \end{cases}$$

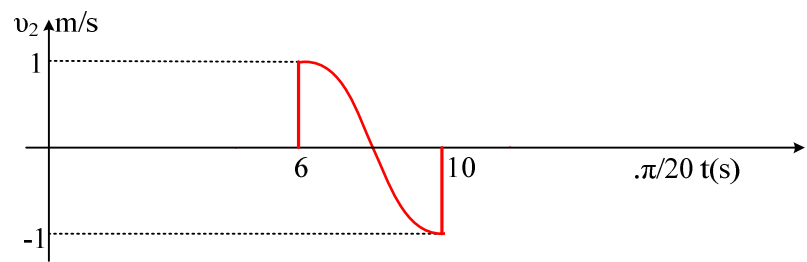
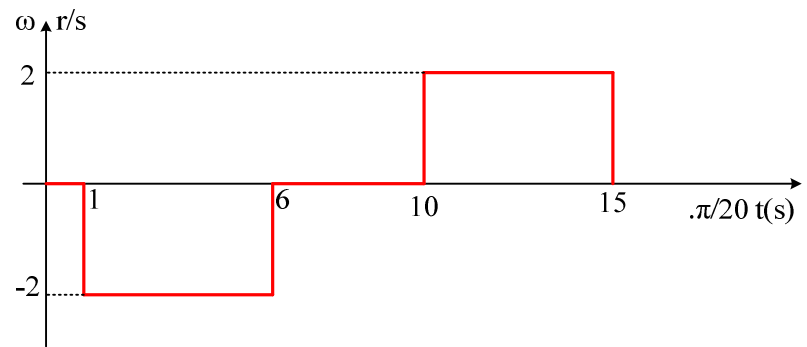
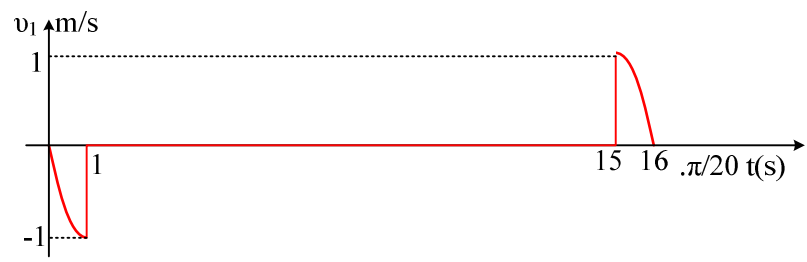
Η εξίσωση της γωνιακής ταχύτητα για τη ράβδο

$$\omega = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi/20 \\ -2 & \pi/20 < t < 3\pi/10 \\ 0 & 3\pi/10 < t < \pi/2 \\ 2 & \pi/2 < t < 3\pi/4 \\ 0 & 3\pi/4 < t < 0,8\pi \end{cases}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα M_2 θα δίνεται από την σχέση

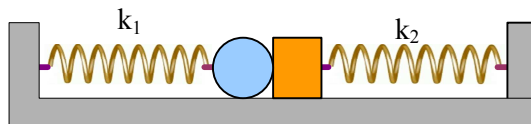
$$v_2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 3\pi/10 \\ 1 \cdot \sin(5t - 3\pi/2) & 3\pi/10 < t < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < t < 0,8\pi \end{cases}$$

Αρα οι γραφικές παραστάσεις θα είναι:



Περιοδική κίνηση

Στο παρακάτω σχήμα κύβος ακμής $a=0,2\text{m}$ και η σφαίρα έχουν ίσες μάζες $M_1=M_2=1\text{Kg}$ βρίσκονται σε επαφή και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=K_2=100\text{N/m}$. Το ελατήριο K_1 είναι δεμένο στο κέντρο της σφαίρας κατά τέτοιο τρόπο που η σφαίρα να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της.



Συσπειρώνουμε το ελατήριο K_1 κατά $x_1=0,1\text{m}$ και με τη βοήθεια στιγμιαίας ροπής ζεύγους δίνουμε στη σφαίρα που έχει ακτίνα $R=0,1\text{m}$ γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{r/sec}$ με φορά όπως και η φορά του ρολογιού. Την στιγμή $t=0$ η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη. Αν η κρούση των δύο στερεών είναι κεντρική και ελαστική και διαρκεί ελάχιστα να βρεθούν:

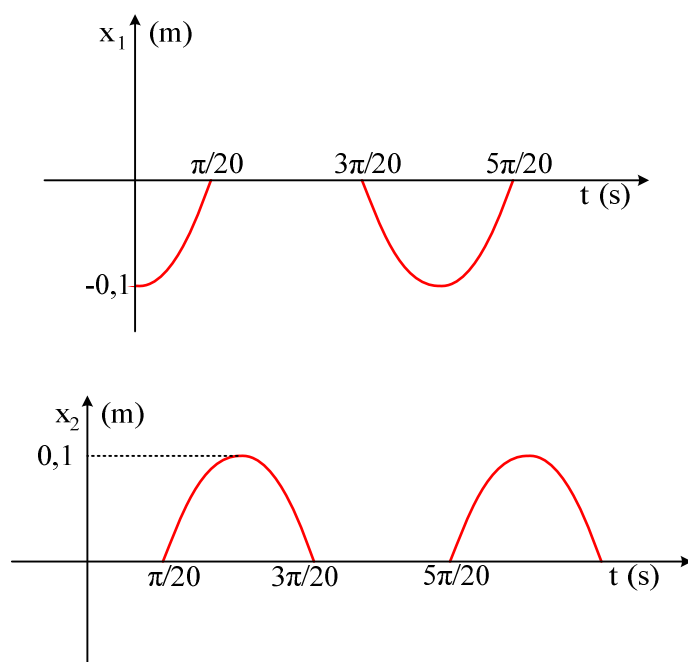
- A) Οι γραφικές παραστάσεις των απομακρύνσεων των δύο κέντρων μαζών των στερεών σωμάτων σαν συνάρτηση του χρόνου αν θετική φορά θεωρηθεί η φορά της αρχικής ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας και θέση $x=0$ για το κάθε σώμα η αρχική θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας τους.
- B) Η περίοδος του παραπάνω περιοδικού φαινομένου.
- Γ) Η γωνιακή μετατόπιση της σφαίρας μέχρι τη στιγμή που θα αποκτήσει η σφαίρα για δεύτερη φορά τη μέγιστη κινητική της ενέργεια. Πόση είναι αυτή η μέγιστη κινητική ενέργεια της σφαίρας;
- Δ) Αν υπάρχουν χρονικές στιγμές που η σφαίρα να φαίνεται ότι κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Πότε συμβαίνει αυτό για πρώτη φορά;

Για τη σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Επειδή το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο δεν υπάρχει δύναμη που να μπορεί να προκαλέσει ροπή στην σφαίρα. Έτσι η σφαίρα θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της θα εκτελεί Γ.Α.Τ. μέχρι να γίνει η πρώτη κρούση. Εκεί η κρούση είναι κεντρική-ελαστική άρα και οι δυνάμεις την στιγμή της κρούσης δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Έτσι η στροφική της κατάσταση δεν θα αλλάξει. Τα δύο σώματα επειδή έχουν ίδιες μάζες θα ανταλλάξουν τα κέντρα μάζας τους γραμμικές ταχύτητες. Η κρούση αυτή θα ξανασυμβεί όταν ο κύβος θα επιστρέψει στην θέση ισορροπίας του και το φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται. Η περίοδος ταλάντωσης του κάθε κέντρου μάζας αν ήταν ολοκληρωμένη θα ήταν $T_1=T_2=2\pi\sqrt{M/K}=\pi/5\text{sec}$. Το πλάτος

ταλάντωσης του κάθε κέντρου μάζας θα είναι $A_1=A_2=x_1=0,1\text{m}$ έτσι η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του κέντρου μάζας του κάθε σώματος θα δίνεται από την παρακάτω γραφική παράσταση



Β) Η περίοδος της παραπάνω κίνησης είναι $T=T_1/2 + T_2/2=\pi/5 \text{ sec}$

Γ) Η σφαίρα αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια στην θέση ισορροπίας και ενώ το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα u_{cm} . Πρώτη φορά αυτό συμβαίνει όταν φτάνει στην ΘΙΤ δηλαδή την στιγμή $t_1=\pi/20 \text{ sec}$ ενώ δεύτερη φορά συμβαίνει αμέσως μετά την δεύτερη κρούση με τον κύβο δηλαδή την χρονική στιγμή $t_2=3\pi/20 \text{ sec}$. Η σφαίρα σε όλη την παραπάνω χρονική διάρκεια εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα την ω_0 . Άρα $\theta=\omega_0 \cdot t_2=3\pi/2 \text{ rad}$

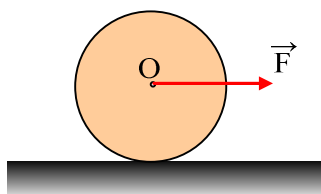
$$K_{\max}=K_{\text{περ}}+K_{\text{μετ}}=\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_0^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot u_{cm\max}^2=0,7\text{J}$$

Δ) Η σφαίρα για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στιγμιαία θα πρέπει το κατώτερο σημείο της να έχει συνολική ταχύτητα 0. Θα πρέπει να ισχύει $|U_{cm}|=|U_{\text{περ}}|=\omega_0 \cdot R=1\text{m/sec}$. Η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $u_{cm\max}=\omega \cdot A=1\text{m/sec}$. Παρατηρώ το σώμα θα φαίνεται ότι κυλάει χωρίς να ολισθαίνει μόνο την στιγμή πριν γίνει η κρούση της σφαίρας με τον κύβο και ενώ η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά. Αυτό δεν συμβαίνει και στην δεύτερη κρούση γιατί τότε η συνολική ταχύτητα είναι $U_{\text{κατ}}=u_{cm\max}+U_{\text{περ}}=2\text{m/sec}$. Έτσι αυτό θα συμβαίνει τις χρονικές στιγμές

$$t=T_1/4 + k \cdot T \quad \text{άρα για πρώτη φορά } t_4=\pi/20 \text{ sec.}$$

Ο κύλινδρος ολισθαίνει και τελικά κυλίεται

Πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή στατικής-οριακής τριβής $\mu_s = \mu = 0,5$ ισορροπεί κύλινδρος μάζας $M = 4\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,1\text{m}$. Στο κέντρο του κυλίνδρου αρχίζει να εφαρμόζεται μεταβλητή οριζόντια δύναμη $F = 100 - 10x$ (S.I) όπου x η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου αν την στιγμή $t = 0$ βρισκόταν στην θέση $x = 0$.



- A) Να εξηγηθεί η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα.
 - B) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αρχίζει η καθαρή κύλιση.
 - Γ) Να βρεθεί το συνολικό έργο της τριβής μέχρι ο κύλινδρος να αρχίσει την καθαρή κύλιση.
 - Δ) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η δύναμη θα μηδενισθεί.
- Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm} = 0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Αν υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος εκτελούσε σύνθετη κίνηση θα έπρεπε από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση να πάρουμε:

$$F - T_{στ} = M \cdot a_{cm} \quad (1) \quad \text{και} \quad T_{στ} \cdot R = 0,5M \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων} = 0,5M a_{cm} \quad (2)$$

Αν διαιρέσουμε την (1) με την (2) θα έχουμε

$$(F - T_{στ}) / T_{στ} = 2$$

$$\text{άρα } F = 3T_{στ} \quad \text{άρα}$$

$$T_{στ} = (100 - 10x) / 3 \quad (\text{S.I})$$

$$\text{Αρα για } x = 0$$

$$T_{στ} = 100/3 \text{ N.}$$

Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί γιατί δεν ισχύει η συνθήκη κύλισης δηλαδή $T_{στ} < \mu \cdot N$. Έτσι το σώμα δεν κυλίεται αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση

εξαιτίας της συνολικής δύναμης ΣF_x και επιταχυνόμενη στροφική κίνηση εξαιτίας της τριβής ολίσθησης. Με τους παραπάνω νόμους

$$F - \mu \cdot N = Ma_{cm} \rightarrow 100 - 10x - 20 = 4a_{cm} \text{ και άρα } a_{cm} = 20 - 2,5x \text{ (S.I.)}$$

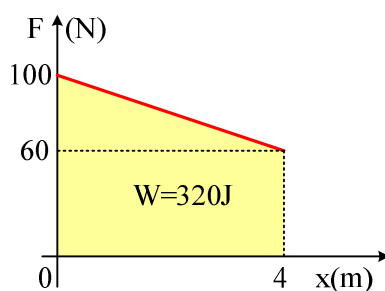
Για την στροφική κίνηση θα έχουμε:

$$T \cdot R = 0,5 M \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων} \text{ άρα } \alpha_{γων} = 100r/sec^2.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η a_{cm} μικραίνει ενώ η $\alpha_{γων}$ παραμένει σταθερή για το χρονικό διάστημα που το σώμα ολισθαίνει προσπαθώντας να κυλίσει. Όταν όμως το a_{cm} γίνει ίσο με το $\alpha_{γων} \cdot R$ τότε θα αρχίσει η καθαρή κύλιση.

$$\text{Έτσι } 20 - 2,5x = 100 \cdot 0,1 \text{ άρα } x = 4m.$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετακίνηση του κυλίνδρου για 4m θα έχουμε $W_F + W_{Τροπής} = K_{περ} + K_{μετ} + Q_{τριβής}$ το έργο της δύναμης θα βρεθεί από την παρακάτω γραφική παράσταση



Επειδή το $W_{Τροπής} = K_{περ}$ θα έχουμε

$$320 = \frac{1}{2} M U_{cm}^2 + \mu N \cdot x \text{ άρα } U_{cm} = \sqrt{120} m/sec.$$

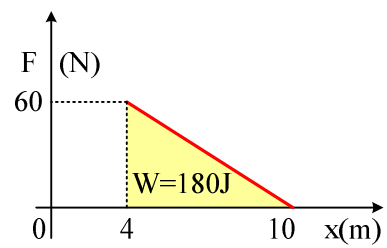
Γ) Το έργο της ροπής της δύναμης της τριβής ολίσθησης θα γίνει τελικά $K_{περ}$ άρα $W_{Τροπής} = K_{περ} = \frac{1}{2} I \omega^2 = 120J$. Το έργο της τριβής στην μεταφορική κίνηση είναι αρνητικό αφού αφαιρεί ενέργεια από τον κύλινδρο $W_T = -\mu \cdot N \cdot x = -80J$. Άρα το συνολικό έργο της τριβής είναι $W_{Τολ} = 40J$.

Δ) Όταν αρχίζει ο κύλινδρος να κυλιέται το έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν.

Έτσι εφαρμόζοντας ΑΔΕ για την κύλιση του κυλίνδρου από την θέση $x=4m$ μέχρι την θέση όπου η $F=0$ δηλαδή μέχρι $x=10m$ θα έχουμε

$$W_F + K_{περ} + K_{μετ} = K_{περ}' + K_{μετ}'$$

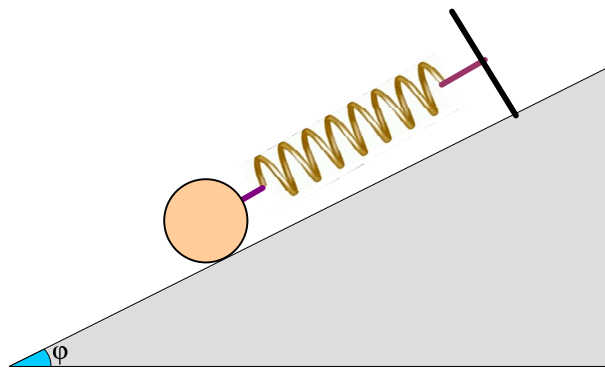
Το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί από το περικλειόμενο εμβαδό του σχήματος



$$WF + \frac{1}{2}MU_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MU_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \quad \text{όρα} \quad 180 + 240 + 120 = \frac{1}{2} \cdot 4U_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot U_{\text{cm}}^2 \quad \text{όρα} \quad U_{\text{cm}} = \sqrt{180} \text{ m/sec}$$

Ο κύλινδρος κυλίνεται εκτελώντας ταλάντωση

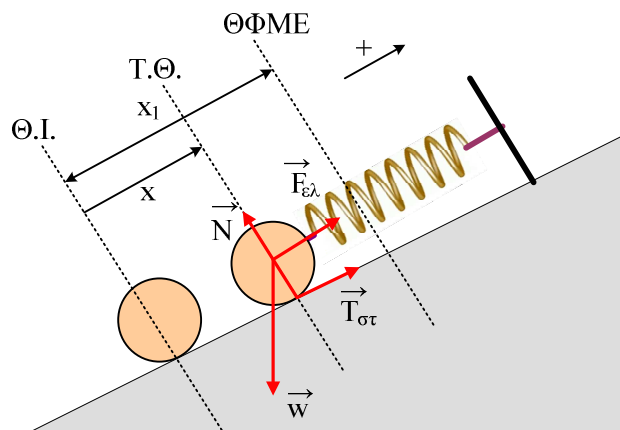
Πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ και με την βοήθεια ελατηρίου σταθεράς $K=700\text{N/m}$ μπορεί να ισορροπεί σφαίρα μάζας $M=5\text{Kg}$. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο ενώ το κάτω άκρο είναι στερεωμένο σε άξονα που περνάει από το κέντρο της σφαίρας και είναι συνεχώς παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο. Ανεβάζουμε την σφαίρα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο έτσι ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και αφήνουμε ελεύθερη την σφαίρα. Η σφαίρα σε όλη την διάρκεια της κίνησής της κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.



- A) Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας της σφαίρας θα εκτελέσει γ.α.τ. και να υπολογιστεί η περίοδός του.
- B) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας.
- Γ) Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια της σφαίρας με την βοήθεια και της ΑΔΕΤ αλλά και της ΑΔΕ.

Δίνεται για την σφαίρα το $I_{\text{cm}}=0,4MR^2$.

Απάντηση:



A) Για την θέση ισορροπίας ισχύει η $Mg\eta\mu\theta = K \cdot x_1$ (1)

Για την τυχαία θέση του σχήματος ισχύει $\Sigma F = T\sigma\tau - Mg\eta\mu\theta + K(x_1 - x)$ (2)

Αν εφαρμόσουμε τώρα τους νόμους της κίνησης για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα πάρουμε

$$Mg\eta\mu\theta - K(x_1 - x) - T\sigma\tau = M \cdot a \quad (3)$$

$$T\sigma\tau \cdot R = 0,4MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (4)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις θα βρεθεί:

$$\Sigma F = -5kx/7 = -500 \cdot x \quad (\text{S.I})$$

άρα το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί γ.α.τ. με $D = 500 \text{ N/m}$ και περίοδο $T = \pi/5 \text{ sec.}$

B) Από την (1) θα βρεθεί το $x_1 = 5/140 \text{ m}$. Η απόσταση αυτή αποτελεί και το πλάτος ταλάντωσης του κέντρου μάζας της σφαίρας γιατί η Θ.Φ.Μ.Ε. αποτελεί και τη Θ.Μ.Α. για την γ.α.τ.

Αρα

$$v_{\text{cmmax}} = \omega \cdot A = 5/14 \text{ m/s.}$$

Γ) Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ $K_{\text{maxμετ}} = U_{\text{max}} = \frac{1}{2} DA^2 = 125/392 \text{ J}$

$$K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = 50/392 \text{ J}$$

Αρα

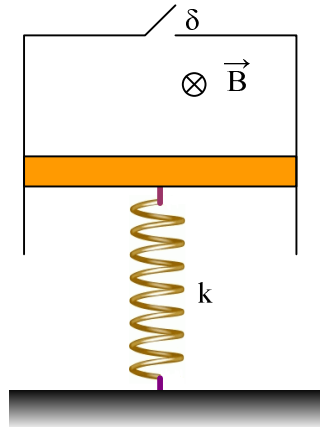
$$K_{\text{ολmax}} = 175/392 \text{ J.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ $U_w = U_{\text{ελ}} + K_{\text{ολmax}}$ άρα $Mgh = 1/2 Kx_1^2 + K_{\text{ολmax}}$ θα πάρουμε και πάλι

$$K_{\text{ολmax}} = 175/392 \text{ J}$$

Μια φθίνουσα ταλάντωση και επαγωγή.

Αγωγός μάζας $m=1\text{kg}$ ωμικής αντίστασης $R=5\Omega$ και μήκους $l=1\text{m}$ ισορροπεί έχοντας συσπειρώσει ένα κατακόρυφο ελατήριο κατά $\Delta l=0,1\text{m}$. Ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=1\text{T}$ όπως στο σχήμα. Ανοψώνουμε τη ράβδο ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και αφήνουμε ελεύθερα το σύστημα να εκτελέσει α.α.τ.



- A) Να γραφεί η εξίσωση της ΗΕΔ από επαγωγή που θα αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου σε συνάρτηση με τον χρόνο θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω.
- B) Την χρονική στιγμή $t=0,4\pi\text{ sec}$ κλείνουμε τον διακόπτη. Να αποδειχθεί ότι η ράβδος θα εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση και να βρεθεί η σταθερά απόσβεσης. Αν η σταθερά επαναφοράς D φθίνουσας ταλάντωσης θεωρηθεί ίση με την σταθερά της αμείωτης ταλάντωσης να βρεθεί το ποσό της θερμότητας που θα αναπτυχθεί στην ωμική αντίσταση R μέχρι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης να υποτετραπλασιαστεί.
- Γ) Για να διατηρήσουμε το πλάτος της παραπάνω φθίνουσας ταλάντωσης σταθερό εφαρμόζουμε στο παραπάνω σύστημα κατάλληλη εξωτερική δύναμη. Ποιο το έργο αυτής της δύναμης για μία περίοδο ταλάντωσης του σώματος;

ΛΥΣΗ

A) Από την ισορροπία του σώματος θα πάρουμε $m \cdot g = K \cdot \Delta l$ άρα $K=100\text{N/m}$. Το σώμα αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από την ΘΦΜΕ χωρίς αρχική ταχύτητα άρα η ΘΦΜΕ ταυτίζεται με τη ΘΜΑ. Άρα το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A=\Delta l=0,1\text{m}$.

Η εξίσωση απομάκρυνσης θα είναι:

$$\psi = 0,1\mu(10t + \pi/2) \text{ (S.I.)}$$

και η εξίσωση ταχύτητας θα είναι

$$v = 1\sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Η τάση από επαγωγή στα άκρα του αγωγού θα είναι:

$$E_{\epsilon\pi} = B \cdot v \cdot l = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Β) Όταν ο διακόπτης κλείσει το σώμα βρίσκεται στην μέγιστη απομάκρυνση $\psi = +A$

και το κύκλωμα αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα εξαιτίας της επαγωγικής τάσης.

Ετσι θα εμφανιστεί και η δύναμη $F_L = BIL = B^2 L^2 U / R$. Η δύναμη όμως $F_L \uparrow \downarrow U$ άρα η $F_L = -B^2 L^2 \cdot U / R$.

Ετσι το σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με $b = B^2 L^2 / R = 0,2 \text{ Kg/s}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ $E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} + Q_R$ θα πάρουμε:

$$\frac{1}{2} K A_{\alpha\rho\chi}^2 = \frac{1}{2} K A_{\tau\epsilon\lambda}^2 + Q_R \text{ το } Q_R = 0,46875 \text{ J}$$

Γ) Η κατάλληλη εξωτερική δύναμη θα πρέπει να αναπληρώνει την θερμότητα που πάει στο περιβάλλον μέσω της ωμικής αντίστασης R . Η αντίσταση όμως διαρρέεται από ρεύμα της μορφής:

$$I = BUL/R = 0,2 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) = 0,2\mu 10t \text{ (S.I.)}$$

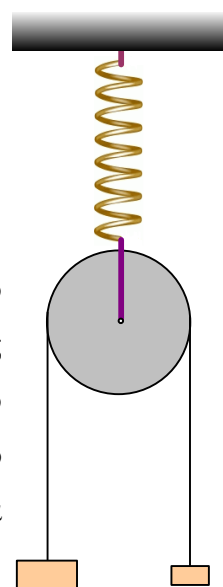
Το ρεύμα είναι εναλλασσόμενο και άρα η θερμότητα που θα παράγεται σε μία περίοδο ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$Q = I_{\epsilon\nu}^2 \cdot R \cdot T = 0,02\pi \text{ J}$$

Μια τροχαλία ένα ελατήριο και δυο σώματα να κινούνται.

Ομογενής τροχαλία έχει μάζα $M=8\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,5\text{m}$ μπορεί να ισορροπεί με την βοήθεια κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=1360\text{N/m}$ που είναι δεμένο στο κέντρο της τροχαλίας με το ένα άκρο του και το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε οροφή όπως στο παρακάτω σχήμα.

Δύο σώματα με μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ είναι δεμένα από αβαρές και μη εκτατό νήμα που είναι περασμένο από το αυλάκι της τροχαλίας. Την στιγμή $t=0$ που το m_1 και το m_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και τα δυο σώματα κινούνται ενώ η τροχαλία παραμένει στη θέση της. Να βρεθούν:



- A) Η επιμήκυνση του ελατηρίου
- B) Η συνάρτηση της απόστασης των δύο σωμάτων m_1 και m_2 με τον χρόνο αν τα σώματα θεωρηθούν σημειακά
- Γ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος όταν η απόσταση των σωμάτων γίνει $D=\sqrt{5}m$.
- Δ) Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I_{cm}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για την ισορροπία της τροχαλίας στον κατακόρυφο άξονα ισχύει $\Sigma F_\psi=0$ άρα
$$F_{ελ}=M.g+T_1+T_2 \quad (1)$$

Για τα σώματα m_1 και m_2 ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για την μεταφορική κίνηση θα μας δώσει:

$$m_1.g-T_1=m_1.a \quad (2) \quad T_2-m_2.g=m_2.a \quad (3)$$

Αν για την τροχαλία εφαρμόσουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση θα έχουμε

$$T_1 R - T_2 \cdot R = 0,5 M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \quad \text{ή} \quad T_1 - T_2 = 0,5 M \alpha \quad (4)$$

Με λύση του παραπάνω συστήματος θα έχουμε $\alpha = 2 \text{ m/sec}^2$ $T_1 = 32 \text{ N}$ και $T_2 = 24 \text{ N}$ από την (1) $1360 \text{ xελ} = 80 + 32 + 24$ άρα $\text{xελ} = 0,1 \text{ m}$.

Β) Η απόσταση των δύο σωμάτων θα βρεθεί με την βοήθεια Π.Θ. και θα δίνεται από την σχέση $D = \sqrt{(2R)^2 + (2H)^2}$ όπου H η κατακόρυφη απόσταση που διανύει το κάθε σημειακό σώμα το m_1 προς τα κάτω και το m_2 προς τα κάτω. Η κίνηση όμως των σωμάτων m_1 και m_2 είναι ομαλά επιταχυνόμενη άρα $H = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = t^2$ (S.I)

$$\text{Έτσι το } D = \sqrt{1 + 4t^4} \text{ (S.I.)}$$

Γ) Με βάση την παραπάνω σχέση θα έχω $\sqrt{5} = \sqrt{1 + 4t^4}$ άρα $t = 1 \text{ sec}$. Στον παραπάνω χρόνο το κάθε σώμα έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση $H = \frac{1}{2} a t^2 = 1 \text{ m}$. Με βάση την ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε:

$$U_{m_1} = K_{\text{συστ}} + U_{m_2}$$

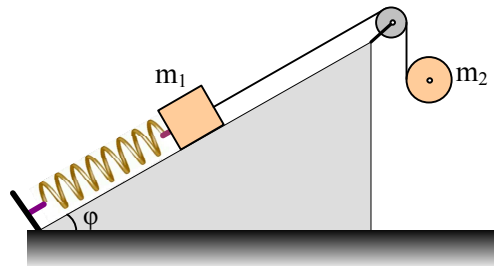
$$\text{άρα } K_{\text{συστ}} = 20 \text{ J}$$

Δ) Το $\Delta L / \Delta t$ |_{ολ} δίνεται από την σχέση:

$$\Delta L / \Delta t \Big|_{\text{ολ}} = \Sigma \tau_{\text{εξωτερικών δυνάμεων}} = m_1 \cdot g \cdot R - m_2 \cdot g \cdot R = 10 \text{ N.m}$$

Μια ταλάντωση και ένα γιο-γιο.

Το λείο κεκλιμένο επίπεδο του παρακάτω σχήματος έχει γωνία κλίσης $\varphi=30^\circ$. Πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ισορροπεί σώμα μάζας $m_1=1\text{Kg}$ με την βοήθεια αβαρούς νήματος, το οποίο συγκρατούμε με το χέρι μας. Την στιγμή $t=0$ αφήνεται ελεύθερος ένας τέλεια ελαστικός κύλινδρος μάζας $m_2=3\text{kg}$ και ακτίνας $R_2=1/3\text{ m}$ που είναι τυλιγμένος αρκετές φορές με το αβαρές νήμα το οποίο συνδέεται μέσω αβαρούς τροχαλίας με το άλλο σώμα μάζας m_1 που ισορροπεί πάνω στο λείο κεκλιμένο επίπεδο. Αφήνουμε το νήμα και παρατηρούμε ότι κατά την πτώση του κυλίνδρου το σώμα μάζας m_1 δεν κινείται.



Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_1 αρχίζει να εκτελεί ταλαντώσεις. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου την στιγμή που αυτός χτυπάει στο λείο οριζόντιο έδαφος είναι ίση κατά μέτρο με τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του σώματος m_1 να βρεθούν:

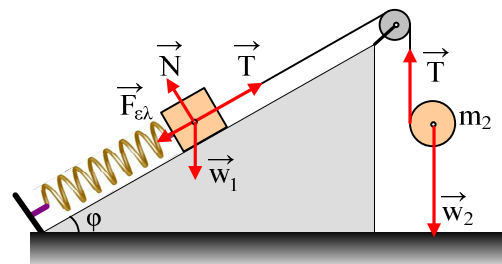
- A) Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_1
- B) Ποια χρονική στιγμή κόπηκε το νήμα.
- Γ) Η γραφική παράσταση της στροφορμής του κυλίνδρου σαν συνάρτηση με το χρόνο αν η κάθε κρούση του κυλίνδρου με το έδαφος θεωρηθεί εντελώς ελαστική. Να θεωρηθεί ότι το νήμα κόβεται πριν ο κύλινδρος φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο. $I=0.5M \cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Μέχρι να κοπεί το νήμα για τον κύλινδρο θα ισχύουν

$$\Sigma F = m_2 \cdot a_2 \quad (1) \text{ και } \Sigma \tau = I \alpha_{\text{γων}} \quad (2)$$

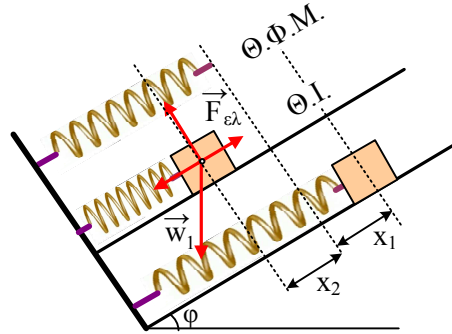
και η επιτάχυνση του κυλίνδρου θα βρεθεί $a_2=20/3\text{ m/sec}^2$ και η τάση του νήματος



$$T=10\text{N}.$$

Πριν το κόψιμο του νήματος το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί έτσι $\Sigma F_x=0$ άρα $m_1 \cdot g \cdot \eta \mu \phi + F_{ελ} = T$ άρα $F_{ελ} = 5\text{N}$ άρα το ελατήριο στην αρχική του κατάσταση είναι τεντωμένο κατά $x_1 = 0,05\text{m}$.

Μετά το κόψιμο του νήματος η θέση ισορροπίας ταλάντωσης θα μεταφερθεί στη θέση όπου $\Sigma F_x' = 0$ άρα $F_{ελ}' = Kx_2$ με το $x_2 = 0,05\text{m}$. Την στιγμή που το νήμα κόβεται το σώμα μάζας m_1 δεν έχει ταχύτητα και δεν βρίσκεται στην τελική θέση ισορροπίας άρα το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A = x_1 + x_2 = 0,1\text{m}$.

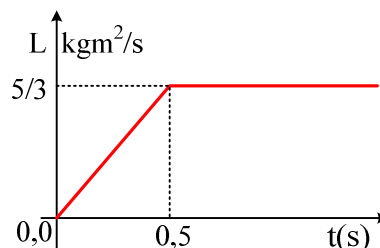


Β) Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του σώματος m_1 είναι $\omega_1 = 10\text{r/sec}$

Ο κύλινδρος όταν χτυπά στο έδαφος θα έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = 10\text{r/sec}$.

Μετά το κόψιμο του νήματος ο κύλινδρος έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα μιας και η μοναδική δύναμη που του ασκείται είναι το βάρος του που δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή. Άρα την στιγμή που κόβεται το νήμα ο κύλινδρος έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = \alpha \gamma \omega \nu \cdot t$ άρα $t = 0,5\text{sec}$.

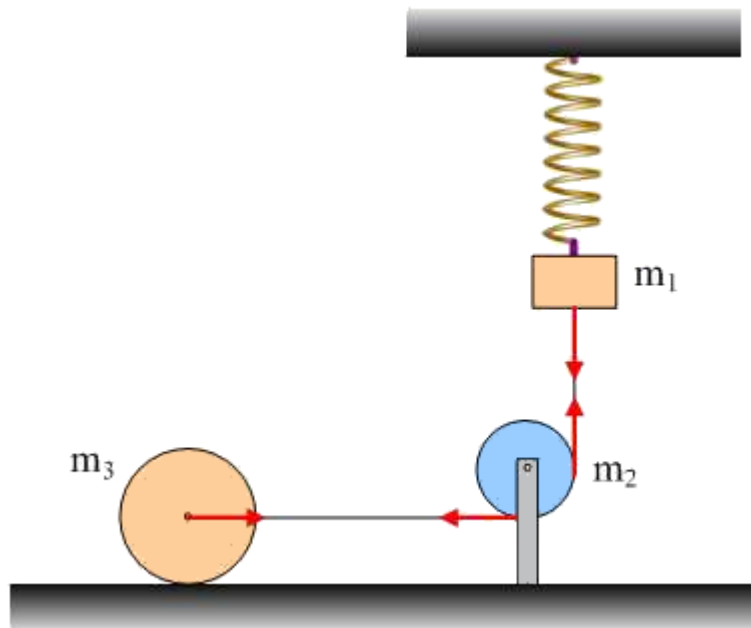
Γ) Η κίνηση του κυλίνδρου είναι επιταχυνόμενη στροφικά και μεταφορικά μέχρι να κοπεί το νήμα και επιταχυνόμενη μεταφορικά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέχρι να χτυπήσει στο έδαφος. Εκεί την στιγμή της κρούσης στον κύλινδρο ασκούνται μόνο κεντρικές δυνάμεις η δύναμη του βάρους και η κάθετη αντίδραση του εδάφους (λείο έδαφος) άρα η κρούση δεν μπορεί να αλλάξει την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου. Έτσι η γραφική παράσταση της στροφορμής θα είναι



$$\text{όπου } L_{τελ} = I \cdot \omega = 5/3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}.$$

Μια ταλάντωση αλλά και μια κύλιση κυλίνδρου

Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Το ελατήριο έχει σταθερά $K=100\text{N/m}$ είναι κατακόρυφο και το σώμα μάζας $M_1=1\text{Kg}$ ισορροπεί. Συνδέουμε το σώμα μάζας M_1 μέσω αβαρούς νήματος και στερεωμένης στο έδαφος τροχαλίας μάζας $M_2=4\text{Kg}$ με το κέντρο κυλίνδρου μάζας $M_3=2\text{Kg}$ που μπορεί να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Εφαρμόζοντας κατάλληλη εξωτερική δύναμη στον κύλινδρο επιμηκύνουμε επιπλέον το ελατήριο κατά $\chi_2=20\text{cm}$. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθούν:

- A) Η επιτάχυνση του κυλίνδρου σαν συνάρτηση της μετατόπισης του.
- B) Η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- Γ) Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος M_1 μετά την χαλάρωση του νήματος.

Δίνεται για την τροχαλία και για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Εφαρμόζουμε για τον κύλινδρο τους νόμους για την κίνησή του:

$$T_1 - T_{στ} = M_3 \cdot a \quad (1)$$

$$\text{και } T_{στ} \cdot R = 0,5 \cdot M_3 \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων}$$

$$\text{άρα } T_{στ} = a \text{ (S.I.) και από την (1)}$$

$$T_1 = 3a \text{ (S.I.)}$$

Για την τροχαλία:

$$T_2 \cdot R_2 - T_1 \cdot R_2 = 0,5 \cdot M_2 \cdot R_2^2 \cdot \alpha_{γων2} \quad \text{άρα}$$

$$T_2 = 5a \text{ (S.I.) (2)}$$

Για το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο θα πάρουμε από την αρχική ισορροπία $M_1 \cdot g = K \cdot x_1$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$ και για την κίνηση στην συνέχεια:

$$F_{ελ} - T_2 - M_1 \cdot g = M_1 \cdot a$$

$$\text{άρα } K(x_1 + x') - T_2 - M_1 \cdot g = M_1 \cdot a$$

όπου x' η επιπλέον επιμήκυνση του ελατηρίου. Με την βοήθεια της (2) θα φτάσουμε $a = 100x'/6 \text{ (S.I.)}$ για $0 \leq x' \leq 0,2\text{m}$ Το $x' = x - 0,2 \text{ (S.I.)}$ όπου x η μετατόπιση του κυλίνδρου στο οριζόντιο δάπεδο.

Για $x' < 0\text{m}$ το νήμα χαλαρώνει και ο κύλινδρος κινείται ομαλά στροφικά και μεταφορικά, η τροχαλία ομαλά στροφικά ενώ το σώμα M_1 θα εκτελεί γ.α.τ. .

Β) Η επιτάχυνση του κυλίνδρου μειώνεται συνεχώς. Έτσι ο κύλινδρος εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική και στροφική κίνηση με επιτάχυνση που συνεχώς ελλατώνεται. Έτσι η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει ο κύλινδρος θα είναι στην θέση $x' = 0$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot K(x_1 + x')^2 &= \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot \omega_3^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \omega_2^2 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot U^2 + M_1 \cdot g \cdot x' + \frac{1}{2} K \cdot x_1^2 \end{aligned}$$

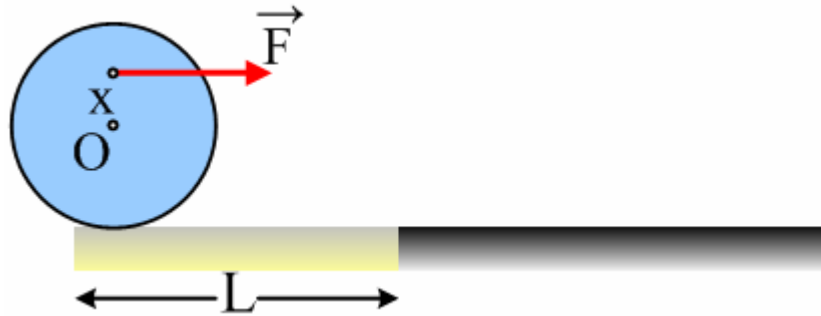
$$\text{Θα βρεθεί } v = \sqrt{2/3} \text{ m/sec.}$$

Γ) Την στιγμή που το νήμα χαλαρώνει το σώμα M_1 έχει ταχύτητα $U = \sqrt{2/3} \text{ m/sec}$. Η ταχύτητα αυτή είναι στην ΘΙΤ άρα είναι η μέγιστη για την ταλάντωση.

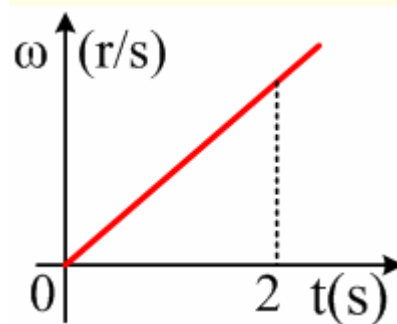
$$\text{Άρα } U = \omega \cdot A \quad \text{άρα } A = \sqrt{2/30} \text{ m.}$$

Μια σφαίρα σε ένα λείο και ένα μη λείο επίπεδο.

Στο παρακάτω σχήμα η σφαίρα έχει μάζα $M=4\text{Kg}$ ακτίνα $R=0,4\text{m}$ και ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο μήκους $L=0,2\text{m}$. Στην συνέχεια ακολουθεί οριζόντιο μη λείο επίπεδο μεγάλου μήκους .



Ασκούμε την χρονική στιγμή $t=0$ στην σφαίρα σταθερή οριζόντια δύναμη $F=1,6\text{N}$ έτσι ώστε ο φορέας της δύναμης να απέχει απόσταση x πάνω από το κέντρο της σφαίρας. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την γραφική παράσταση.



Να βρεθούν:

- A) Η απόσταση x
- B) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας την στιγμή $t_1=1\text{sec}$.
- Γ) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή $t_3=10\text{sec}$ αν όταν η σφαίρα έχει διανύσει διάστημα 5m η δύναμη F είχε καταργηθεί.

Δίνεται για την σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή το πρώτο επίπεδο είναι λείο για την μεταφορική κίνηση θα ισχύει

$$F=M.a \text{ άρα } a=0,4\text{m/sec}^2.$$

Από τον νόμο του διαστήματος στην επιταχυνόμενη κίνηση θα έχουμε $L=1/2.a.t^2$ άρα $t=1\text{sec}$. Δηλαδή την στιγμή $t=1\text{sec}$ η σφαίρα μπαίνει στο μη λείο επίπεδο. Από το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας με το χρόνο δεν παρατηρούμε καμία αλλαγή στην κλίση της ευθείας μετά την στιγμή $t=1\text{sec}$. Δηλαδή δεν υπάρχει αλλαγή στην γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας. Αρα δεν άλλαξε η συνισταμένη των ροπών. Αρα δεν αναπτύχθηκε τριβή. Για να μην υπάρχει τριβή σημαίνει ότι το σημείο επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είχε συνολική ταχύτητα 0. Αρα η σφαίρα έως εκείνη την στιγμή κυλιόταν χωρίς να ολισθαίνει. Για την στροφική κίνηση στο λείο επίπεδο

$$\Sigma \tau = I.\alpha_{\text{γων}} \text{ άρα } F.x=0,4.M.R^2.\alpha_{\text{γων}} (1).$$

Η σφαίρα κυλίεται άρα $a=\alpha_{\text{γων}}.R$ άρα $\alpha_{\text{γων}}=1\text{r/sec}^2$.

$$\text{Από (1)} \quad x=0,16\text{m}.$$

Β) Ο ρυθμός με ταβολής της ολικής κινητικής ενέργειας θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta K/\Delta t = \Sigma F.U + \Sigma \tau.\omega = F.a.t_1 + F.x.\alpha_{\text{γων}}.t_1 = 0,896\text{J/s}.$$

Γ) Από τον νόμο του διαστήματος $S=1/2.a.t_3^2$ άρα $t_3=5\text{sec}$. Με τον νόμο της ταχύτητας $U=a.t_3=2\text{m/sec}$.

Θα μπορούσαμε να βρούμε την ταχύτητα με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετατόπιση 5m θα είχαμε

$$W_{\text{fμετ}} + W_{\text{τF}} = K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}} \quad (1) \text{ και } W_{\text{fμετ}}/W_{\text{τF}} = 1/2.M.U^2 / 1/2.I.\omega^2 = 2,5 \text{ άρα } W_{\text{τF}} = F.S/2,5 = 3,2\text{J}$$

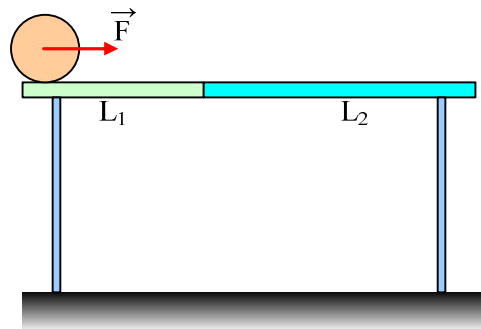
$$\text{Από την (1)} \quad 8+3,2 = \frac{1}{2}.4.U^2 + \frac{1}{2}.0,4.4.U^2 \text{ άρα } U=2\text{m/sec}.$$

Η ταχύτητα αυτή του κέντρου μάζας είναι στην θέση όπου καταργείται η δύναμη. Μετά την κατάργηση της δύναμης η σφαίρα εκτελεί ομαλή

στροφική και ομαλή μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $U=2\text{m/s}$.
Έτσι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος την χρονική στιγμή
 $t=10\text{sec}$ θα είναι $U_{cm}=2\text{m/sec}$.

Μια σφαίρα κατά μήκος δύο ράβδων με και χωρίς τριβές

Σ το παρακάτω σχήμα



η οριζόντια λεπτή και ομογενής ράβδος έχει μάζα $M_1=2\text{Kg}$, μήκος $L=4,4\text{m}$ και ισορροπεί με την βοήθεια δύο κατακόρυφων υποστηρίγμάτων ύψους $H=1,8\text{m}$. Η ράβδος αποτελείται από δύο άνισα τμήματα μήκους $L_1=1\text{m}$ και L_2 . Στο πρώτο τμήμα της ράβδου υπάρχουν τριβές ενώ το δεύτερο τμήμα της ράβδου είναι τελείως λείο. Μία σφαίρα μάζας $M=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ βρίσκεται ακίνητη στην μία άκρη της ράβδου στην περιοχή που παρουσιάζει τριβές και δέχεται στο κέντρο της σταθερή οριζόντια δύναμη $F=2,8\text{N}$ με αποτέλεσμα η σφαίρα να αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην ράβδο. Την στιγμή που η σφαίρα χάνει την επαφή της με τη ράβδο η δύναμη F καταργείται. Να βρεθούν:

- Α) Πόση η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας όταν φτάνει στο έδαφος;
- Β) Πόσος είναι ο συνολικός χρόνος κίνησης της σφαίρας μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος;
- Γ) Πόσες περιστροφές διάγραψε η σφαίρα μέχρι να φτάσει στο έδαφος;
- Δ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δυνάμεων που ασκούνται στα άκρα της ράβδου από τα υποστηρίγματα σε συνάρτηση με τον χρόνο μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος.

Για την σφαίρα $I=0,4MR^2$

Απάντηση:

Α) Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι την τελική θέση θα έχουμε:

$$W_F + U_W = K_{ολ} \quad \text{άρα } 2,8 \cdot 4,4 + 1 \cdot 10 \cdot 1,8 = K_{ολ}$$

$$\text{άρα } K_{ολ} = 30,32 \text{ J}$$

Β) Η κίνηση στην περιοχή της ράβδου όπου υπάρχει τριβή είναι επιταχυνόμενη στροφική και επιταχυνόμενη μεταφορική. Έτσι με την βοήθεια των νόμων της κίνησης θα πάρουμε

$$F - T = M \cdot a \quad (1)$$

$$T \cdot R = 0,4 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων}$$

$$\text{άρα } T = 0,4 M \cdot a \quad (2)$$

από (1) και (2) θα βρεθεί

$$a = 2 \text{ m/sec}^2$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα δίνεται από την σχέση:

$$U_{cm} = a \cdot t \quad (3)$$

και ο χρόνος θα βρεθεί από την σχέση

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$$

$$\text{άρα } t_1 = 1 \text{ sec}$$

και από την (3) θα βρούμε

$$U_{cm} = 2 \text{ m/sec.}$$

Την στιγμή που η σφαίρα θα βρεθεί στο περιοχή της ράβδου όπου δεν υπάρχουν τριβές η σφαίρα θα κάνει επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση λόγω της δύναμης F αλλά η τριβή πλέον δεν υπάρχει άρα η στροφική κίνηση της σφαίρας μετατρέπεται σε ομαλή στροφική.

Η μεταφορική πλέον κίνηση αποκτά επιτάχυνση $a_2 = F/M = 2,8 \text{ m/sec}^2$

Ο χρόνος κίνησης στην περιοχή της ράβδου όπου δεν υπάρχουν τριβές θα δίνεται από την σχέση:

$$L-L_1=Ucm.t_2+1/2.a_2.t_2^2$$

άρα θα καταλήξουμε στην δευτεροβάθμια:

$$1,4.t_2^2+2t_2-3,4=0$$

θα βρούμε $t_2=1\text{sec}$.

Από τον νόμο της ελεύθερης πτώσης θα βρούμε $H=1/2.g.t_3^2$ άρα $t_3=0,6\text{sec}$.

Αρα ο συνολικός χρόνος κίνησης της σφαίρας θα είναι $t_{\text{ολ}}=2,6\text{sec}$.

Γ) Η γωνία στροφής της σφαίρας κατά την διάρκεια της επιταχυνόμενης στροφικά κίνησης θα δίνεται από την σχέση:

$$\theta_1=1/2.\alpha\omega\omega.t_1^2=5\text{rad}$$

Η γωνιακή ταχύτητα την στιγμή που μπαίνει η σφαίρα στο λείο μέρος της ράβδου θα δίνεται από την σχέση:

$$\omega=\alpha\omega\omega.t_1=10\text{rad/sec}.$$

Στην συνέχεια και μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος δεν υπάρχει δύναμη που να προκαλεί ροπή στην σφαίρα άρα η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας παραμένει σταθερή και ίση με $\omega=10\text{rad/sec}$ άρα

$$\theta_2=\omega(t_2+t_3)=16\text{rad}$$

άρα η συνολική γωνία διαγραφής θα είναι $\theta_{\text{ολ}}=21\text{rad}$ άρα ο αριθμός των περιστροφών θα είναι $N=\theta_{\text{ολ}}/2\pi=10,5/\pi$ περιστροφές.

Δ) Για την ισορροπία του συστήματος ράβδου-σφαίρας θα έχουμε στον κατακόρυφο άξονα

$$N_1+N_2=(M_1+M).g \quad (3)$$

Για την ισορροπία του συστήματος με την βοήθεια της σχέσης $\Sigma\tau_{\text{ΑΚΡΟ}}=0$ και ενώ η σφαίρα βρίσκεται στην περιοχή της που έχει με τριβές θα έχουμε

$$-M \cdot g \cdot x_1 - M_1 \cdot g \cdot L/2 + N_2 \cdot L = 0 \quad (4)$$

$$\text{άρα } N_2 = 10 + 25 \cdot t^2 / 11 \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ sec}$$

$$N_1 = 20 - 25 \cdot t^2 / 11 \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ sec}$$

Η σχέση (4) θα γραφεί για την περιοχή όπου δεν υπάρχουν τριβές:

$$-M \cdot g \cdot x_2 - M_1 \cdot g \cdot L/2 + N_2 \cdot L = 0$$

$$\text{άρα } -10\{1 + 2(t-1) + 1,4(t-1)^2\} - 44 + N_2 \cdot 4,4 = 0 \text{ άρα}$$

$$N_2 = 10 + 10\{1 + 2(t-1) + 1,4(t-1)^2\} / 4,4 \quad 1 \leq t < 2 \text{ sec}$$

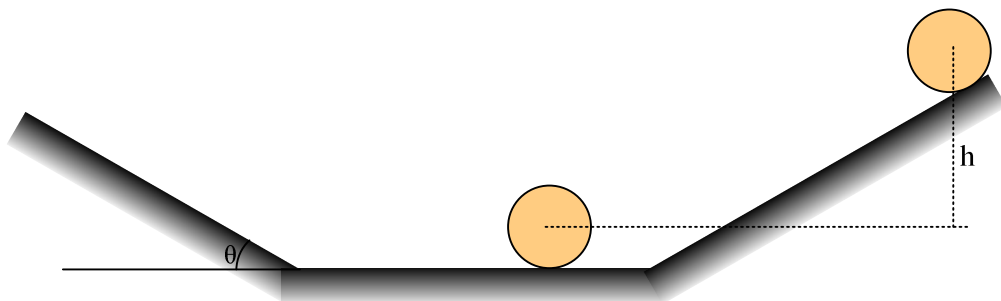
$$N_1 = 20 - 10\{1 + 2(t-1) + 1,4(t-1)^2\} / 4,4 \quad 1 \leq t < 2 \text{ sec}$$

Όταν το η σφαίρα είναι στον αέρα οι δυνάμεις θα είναι ίσες και θα δίνονται από την σχέση

$$N_1 = N_2 = 15 \text{ N} \quad 2 < t \leq 2,6 \text{ sec}$$

Μια σφαίρα και πόσες; κινήσεις;

Η σφαίρα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $m=5\text{Kg}$ ακτίνα $R=0,3\text{m}$ και αφήνεται από ύψος $H=4,05\text{m}$ πάνω από ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο.



Η σφαίρα εισέρχεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στην συνέχεια την χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να ανέρχεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta=30^\circ$ το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης με την σφαίρα ίσο με $\mu=\sqrt{3}/3$. Κατά τα πέρασμα από το κεκλιμένο στο οριζόντιο επίπεδο και από το οριζόντιο επίπεδο στο κεκλιμένο επίπεδο το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας δεν μεταβάλλεται. Να βρεθούν:

- A) Ποια χρονική στιγμή αρχίζει η καθαρή κύλιση για την σφαίρα;
- B) Ποια χρονική στιγμή η σφαίρα θα σταματήσει για πρώτη φορά;
- Γ) Σε ποιο ύψος θα φτάσει η σφαίρα επιστρέφοντας στο δεύτερο κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται για την σφαίρα $I=0,4M.R^2$.

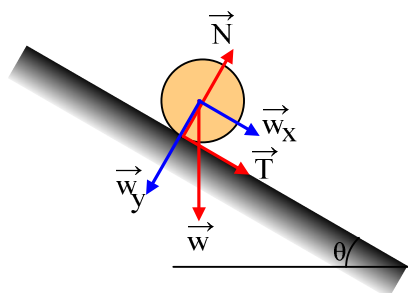
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Το αρχικό κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο έτσι η σφαίρα θα ολισθαίνει και θα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα που θα βρεθεί με την βοήθεια της ΑΔΕ

$$m \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 \quad \text{άρα } u = 9\text{m/sec}$$

Το οριζόντιο επίπεδο είναι επίσης λείο έτσι θα συνεχιστεί η ολίσθηση της σφαίρας με σταθερή την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας μέχρι η σφαίρα να φτάσει στο δεύτερο κεκλιμένο επίπεδο. Όταν η σφαίρα θα αρχίσει να ανέρχεται το χαμηλότερο σημείο επαφής της

σφαίρας με το κεκλιμένο επίπεδο θα έχει ταχύτητα $U_{\text{κατ}} = u \cos \theta$. Έτσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης με φορά προς τα πίσω.



Η σφαίρα λοιπόν θα αρχίσει να επιβραδύνεται μεταφορικά και να επιταχύνεται στροφικά. Από τους νόμους της κίνησης θα έχουμε

$$m \cdot g \cdot \sin 30^\circ + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ = m \cdot a \quad \text{άρα } a = 10 \text{ m/sec}^2.$$

$$\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ \cdot R = 0,4 \cdot m \cdot R^2 \cdot \alpha \quad \text{άρα } \alpha = 125/3 \text{ rad/sec}^2.$$

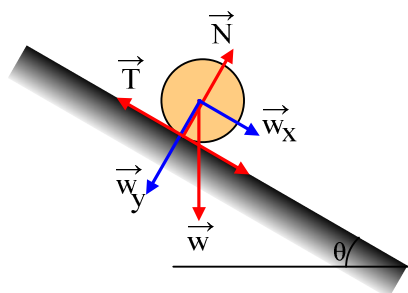
Για να αρχίσει η καθαρή κύλιση θα πρέπει το κατώτερο σημείο επαφής της σφαίρας να έχει μηδενική ταχύτητα έτσι $U_{\text{κατ}} = U_{\text{περ}} \quad \text{άρα}$

$$u - a \cdot t = \alpha \cdot t \cdot R$$

$$\text{άρα } t = 0,4 \text{ sec και}$$

$$U_{\text{κατ}} = 5 \text{ m/sec.}$$

Β) Μόλις αρχίσει η κύλιση της σφαίρας θα πρέπει να αρχίσει η επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση άρα η φορά της τριβής να αντιστραφεί και από τριβή ολίσθησης να γίνει στατική τριβή.



Από τους νόμους τώρα της κίνησης θα έχουμε

$m \cdot g \cdot \eta \mu 30^\circ - T = m \cdot a_2$ και $T \cdot R = 0,4 \cdot m \cdot R^2 \cdot \alpha_{\omega v 2}$ θα βρούμε

$a_2 = 25/7 \text{ m/sec}^2$ και $T = 50/7 \text{ N}$ που είναι μικρότερη από την τριβή ολίσθησης $T_{ολ} = 25 \text{ N}$ άρα ισχύει και η συνθήκη κύλισης.

Η μεταφορική κίνηση είναι επιβραδυνόμενη έτσι από τον νόμο της ταχύτητα θα βρούμε:

$$U = U_{cm} - a_2 \cdot t_2 \quad \text{άρα } t_2 = 1,4 \text{ sec}$$

άρα η σφαίρα θα σταματήσει να ανέρχεται μετά από συνολικό χρόνο $t_{ολ} = 1,8 \text{ sec}$.

Γ) Το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η σφαίρα προς τα πάνω θα είναι $S_1 = u \cdot t_1 - 1/2 a_1 \cdot t_1^2 = 2,8 \text{ m}$ και $S_2 = U_{cm} \cdot t_2 - 1/2 a_2 \cdot t_2^2 = 3,5 \text{ m}$.

Αρα το συνολικό μήκος είναι $S_{ολ} = 6,3 \text{ m}$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από το ανώτερο σημείο στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι το σώμα να ξαναφτάσει στο οριζόντιο επίπεδο θα έχουμε

$$m \cdot g \cdot S_{ολ} \cdot \eta \mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot U^2 \quad \text{θα βρούμε } U = 3\sqrt{5} \text{ m/sec.}$$

Μετά την επαναφορά του σώματος στο οριζόντιο επίπεδο και στην συνέχεια στο κεκλιμένο επίπεδο δεν υπάρχουν τριβές. Έτσι η στροφική κίνηση της σφαίρας δεν μπορεί να αλλάξει. Αρα η γωνιακή της ταχύτητα θα παραμένει σταθερή. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την κατώτερη θέση μέχρι την ανώτερη στο πρώτο κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega^2 + m \cdot g \cdot H_2$$

$$\text{άρα } H_2 = 2,25 \text{ m}$$

Μια σφαίρα και δύο τεταρτοκύκλια

Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από δύο κατακόρυφα τεταρτοκύκλια με ακτίνες $R_1=2\text{m}$ και $R_2=0,25\text{m}$ που συνδέονται μεταξύ τους με οριζόντιο τμήμα μήκους $L=2\pi\text{m}$. Από την κορυφή του πρώτου τεταρτοκύκλιου αφήνουμε σφαίρα μάζας m και ακτίνας $r=0,1\text{m}$. Η σφαίρα σε όλη την διάρκεια της αρχικής της κίνησης και ενώ βρίσκεται σε επαφή με τα τεταρτοκύκλια ή το οριζόντιο επίπεδο κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.



Να βρεθούν:

- A) Το μέγιστο ύψος του κέντρου μάζας της σφαίρας από το οριζόντιο επίπεδο μετά το χάσιμο της επαφής με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο.
- B) Ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει η σφαίρα από την αρχική θέση μέχρι να επιστρέψει στο άνω άκρο του δεύτερου τεταρτοκύκλιου για πρώτη φορά.
- Γ) Αν η σφαίρα επιστρέψει ποτέ στην αρχική της θέση.

Δίνεται για την σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4M.r^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση και μέχρι την θέση που η σφαίρα χάνει την επαφή της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο

$$m \cdot g \cdot R_1 = m \cdot g \cdot R_2 + \frac{1}{2} m \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \quad \text{θα βρούμε μετά από τις πράξεις } U=5\text{m/s.}$$

Το βάρος είναι η μοναδική δύναμη που δέχεται η σφαίρα μετά το χάσιμο της επαφής της σφαίρας με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο. Έτσι θα εκτελέσει επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση μέχρι το ανώτερο σημείο της τροχιάς και μετά ελεύθερη πτώση ενώ ταυτόχρονα θα εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα που θα βρεθεί από την σχέση $U=\omega \cdot r$ $\omega=50\text{r/s}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την στιγμή που χάνεται η επαφή και μέχρι το ανώτερο σημείο θα έχουμε

$$m \cdot g \cdot R_2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot H_{\max} + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad \text{άρα μετά από πράξεις } H_{\max} = 1,5m$$

Β) Για κάθε περιστροφή που εκτελεί ενώ βρίσκεται σε επαφή με τα τεταρτοκύκλια και το οριζόντιο έδαφος διανύει διάστημα $S_1 = 2\pi r = 0,2\pi m$. Το συνολικό μήκος της διαδρομής μέχρι να χαθεί η επαφή για πρώτη φορά θα είναι $S_{\text{ολ}} = 2\pi R_1/4 + 2\pi R_2/4 + L = 3,125\pi m$

Ετσι $N_1 = 3,125\pi / 2\pi \cdot 0,1 = 15,625$ περιστροφές.

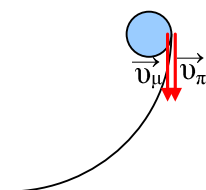
Μετά το χάσιμο της επαφής από το νόμο της ταχύτητας για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε $U_{\text{τελ}} = U - g \cdot t_{\text{αν}} \quad \text{άρα } t_{\text{αν}} = 0,5s$. Ο χρόνος καθόδου θα είναι και πάλι $0,5s$ άρα η σφαίρα θα βρίσκεται στον αέρα για συνολικό χρόνο $t_{\text{ολ}} = 1s$.

Η γωνιακή μετατόπιση της σφαίρας για το χρόνο που βρίσκεται στο αέρα θα βρεθεί από την σχέση $\theta = \omega \cdot t = 50 \cdot 1 = 50 \text{ rad}$. Οι περιστροφές της σφαίρας στον αέρα θα είναι $N_2 = \theta / 2\pi = 25/\pi$ περιστροφές.

Μέχρι λοιπόν η σφαίρα να επιστρέψει στο τεταρτοκύκλιο για πρώτη φορά θα έχει εκτελέσει συνολικά $N_{\text{ολ}} = \{15,625 + 25/\pi\} \approx 23,59$ περιστροφές.

Γ) Την στιγμή που η σφαίρα επιστρέφει στο τεταρτοκύκλιο το σημείο επαφής της σφαίρας με το τεταρτοκύκλιο θα έχει ταχύτητα μεταφοράς με φορά προς τα κάτω και γραμμική ταχύτητα περιστροφής με φορά πάλι προς τα κάτω άρα συνολικό μέτρο ταχύτητας

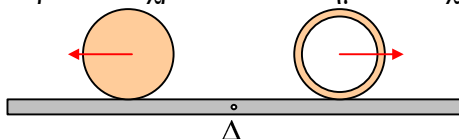
$$U_{\text{ολ}} = U_{\text{περ}} + U_{\text{μετ}} = 5 + 5 = 10 \text{ m/s}.$$



Άρα στην σφαίρα θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης την στιγμή της επαφής της με το τεταρτοκύκλιο. Ετσι λόγω της τριβής ολίσθησης θα χαθεί ενέργεια με αποτέλεσμα η σφαίρα να μη φτάσει ποτέ ξανά στην αρχική της θέση.

Μια σφαίρα, ένα δακτυλίδι και μια ράβδος που ισορροπεί

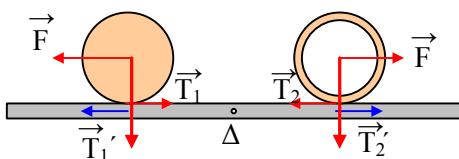
Πάνω σε ράβδο μάζας $M=20\text{Kg}$ που ισορροπεί σε οριζόντια θέση βρίσκονται ακίνητα μία σφαίρα και ένα δακτύλιος με μάζες $M_1=2\text{kg}$ και $M_2=2\text{Kg}$ αντίστοιχα. Η ράβδος που έχει μήκος $L=12\text{m}$ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια ενός οριζόντιου καρφιού που βρίσκεται στο κέντρο της ράβδου. Το κέντρο μάζας της σφαίρας βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $d_1=1\text{m}$ αριστερά του καρφιού ενώ το δακτυλίδι βρίσκεται δεξιά από το καρφί και σε απόσταση d_2 από το καρφί. Στο κέντρο της σφαίρας και του δακτυλιδιού ασκούμε με κατάλληλο τρόπο οριζόντιες δυνάμεις ώστε η σφαίρα και το δακτυλίδι να αρχίζουν να απομακρύνονται μεταξύ τους κυλιόμενα χωρίς να ολισθαίνουν πάνω στη οριζόντια ράβδο για χρονικό διάστημα $\Delta t=\sqrt{2}\text{ sec}$. Η ράβδος στο παραπάνω χρονικό διάστημα συνεχίζει να ισορροπεί.



- A) Να βρεθούν τα μέτρα των οριζόντιων δυνάμεων που ασκούνται στο κάθε στερεό.
- B) Να βρεθεί το μέτρο της συνολικής δύναμης που δέχεται η ράβδος από το καρφί για όσο χρόνο κινούνται τα στερεά πάνω στην ράβδο και ισορροπεί το σύστημα.
- Γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της οριζόντιας απόστασης των κέντρων μάζας των στερεών την στιγμή που χάνεται η ισορροπία του συστήματος.

Δίνεται το $I_{\text{cm sf}}=0.4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



A) Για την ισορροπία της ράβδου μαζί με τις σφαίρες θα έχουμε $\Sigma \tau(\Delta)=0$ άρα $-M_2gd_2+M_1g \cdot d_1=0$ άρα $d_2=1\text{m}$. Για να συνεχίσει η ισορροπία του συστήματος και μετά την εκκίνηση των στερεών θα πρέπει τα αποστήματα των δύο βαρών να είναι συνεχώς ίσα. Έτσι θα πρέπει το διανυόμενο διάστημα από το κάθε στερεό να είναι το ίδιο. Άρα και η επιτάχυνση των δύο στερεών θα πρέπει να είναι ίδια. Η ισορροπία θα καταστραφεί όταν τα στερεά χάσουν την επαφή τους με την ράβδο. Αυτό θα συμβεί όταν διανύσουν διάστημα :

$$S=L/2 -d_1=6-1=5\text{m}.$$
$$S=1/2 a_{\text{cm}1}t^2 \quad \text{άρα} \quad a_{\text{cm}1}=a_{\text{cm}2}=5\text{m/sec}^2.$$

Από τους νόμους του Newton για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα πάρουμε

Για την σφαίρα:

$$F_1 - T_{1στ} = M_1 \cdot a_{cm1} \quad (1) \quad T_{1στ} R_1 = 0,4 M R_1^2 \alpha_{γων1} \quad \text{και} \quad T_{1στ} = 0,4 M_1 a_{cm1} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \quad F_1 = 1,4 M a_{cm1} = 14 \text{ N}$$

Για τον δακτύλιο:

$$F_2 - T_{στ2} = M_2 \cdot a_{cm2} \quad (3) \quad T_{στ2} R_2 = M R_2^2 \alpha_{γων2} \quad \text{και} \quad T_{στ2} = M_2 a_{cm2} \quad (4)$$

$$\text{Από (3) και (4)} \quad F_2 = 2 M a_{cm2} = 20 \text{ N}$$

Β) Για να ισορροπεί η ράβδος στο ψψ' θα έχουμε:

$$F_{καρψψ'} = M_1 g + M_2 \cdot g + M g = 240 \text{ N}.$$

Από την (2) $T_{στ1} = 4 \text{ N}$ και από την (4) $T_{στ2} = 10 \text{ N}$.

Έτσι στον τον xx' άξονα της ράβδου ασκούνται οι αντιδράσεις των T_1 και T_2 και η δύναμη του καρφιοῦ στον xx' που θα πρέπει να έχουν συνισταμένη 0.

$$\text{Άρα } F_{καρxx'} = T_2 - T_1 = 6 \text{ N}.$$

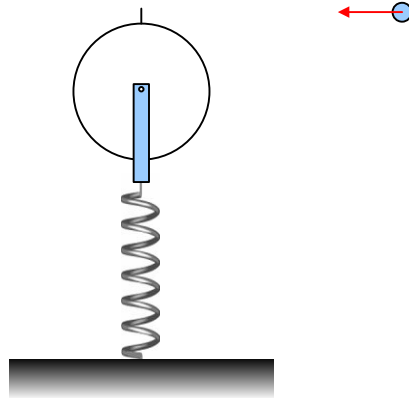
$$\text{Από το ΠΘ } F_{καρ} = \sqrt{240^2 + 6^2} = 240,075 \text{ N}$$

Γ) Ο ρυθμός μεταβολής της οριζόντιας απόστασης των κέντρων μάζας των στερεών θα δίνεται από την σχέση

$$\Delta(d_1 + d_2 + |x_1| + |x_2|) / \Delta t = |U_{cm1}| + |U_{cm2}| = a_{cm1} \cdot t + a_{cm2} \cdot t = 10\sqrt{2} \text{ m/sec}.$$

Μια σύνθετη κίνηση με διατήρηση στροφορμής.

Κύλινδρος μάζας $M=4\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ ισορροπεί κατακόρυφος με την βοήθεια κατακόρυφου ελατηρίου. Ο κύλινδρος έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και στηρίζεται σε κατακόρυφο ελατήριο όπως στο σχήμα. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος.



Στο ανώτερο άκρο του κυλίνδρου υπάρχει κατακόρυφο αβαρές καρφί μικρού μήκους. Ανεβάζουμε τον κύλινδρο, ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό μήκος του και θέτουμε σε περιστροφή τον κύλινδρο δίνοντάς του γωνιακή ταχύτητα $\omega=30\text{ rad/sec}$ και ταυτόχρονα τον αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί. Έτσι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί α.α.τ. ενώ ο κύλινδρος ταυτόχρονα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση αφού δεν υπάρχουν τριβές ανάμεσα στον άξονα περιστροφής και στον κύλινδρο. Όταν ο κύλινδρος έχει περιστραφεί κατά γωνία $6\pi\text{ rad}$ το ελατήριο επανέρχεται για πρώτη φορά στην θέση φυσικού μήκους του. Εκείνη τη στιγμή ένα σημειακό βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ που κινείται οριζόντια σφηνώνεται πάνω στο κατακόρυφο καρφί με αποτέλεσμα ο κύλινδρος και το βλήμα να ακινητοποιηθούν στιγμιαία.

Να βρεθούν:

- A) Η σταθερά K του ελατηρίου
- B) Η οριζόντια ταχύτητα του βλήματος
- Γ) Η απώλεια ενέργειας του συστήματος κατά την πλαστική κρούση
- Δ) Το νέο πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα κύλινδρος-βλήμα μετά την κρούση

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δίνεται από την σχέση $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A)Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί α.α.τ. και για να επανέλθει στην αρχική του ακραία θέση θα χρειασθεί χρόνο μίας περιόδου. Στον ίδιο χρόνο ο κύλινδρος εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση. Έτσι $\theta = \omega \cdot T$ άρα $T = \pi/5 \text{ sec}$. Από τον τύπο της περιόδου για την α.α.τ. θα έχουμε $T = 2\pi\sqrt{M/K}$ άρα $K = 400 \text{ N/m}$.

B)Μετά την κρούση βλήματος και κυλίνδρου το σύστημα ακινητοποιείται στιγμιαία. Άρα η τελική του στροφορμή είναι 0. Με εφαρμογή της ΑΔΣ θα έχουμε $L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$ άρα $I \cdot \omega - m v R = 0$ άρα $v = 30 \text{ m/sec}$.

Γ)Με εφαρμογή της ΑΔΕ για το σύστημα κυλίνδρου-βλήματος πριν και μετά την κρούση θα έχουμε $K_{\beta} + K_{\text{κυλ}} = Q_{\text{απ}}$ $1/2 m \cdot U^2 + 1/2 I \omega^2 = Q_{\text{απ}}$ $Q_{\text{απ}} = 675 \text{ J}$

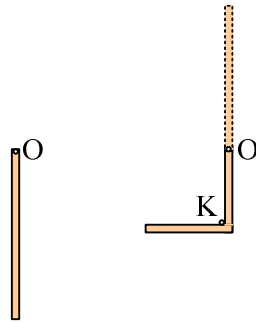
Δ)Μετά την κρούση του συστήματος θα αλλάξει η θέση ισορροπίας της α.α.τ. και θα μετακινηθεί λίγο πιο κάτω σε σχέση με την αρχική θέση ισορροπίας. Αυτό θα συμβεί γιατί έχουμε αύξηση της μάζας του συστήματος. Η νέα Θ.Ι.Τ. θα βρεθεί από την ισορροπία των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα.

$F_{\text{ελ}} = W_{\text{ολ}}$ άρα $K x_{\text{ελ}} = (M+m)g$ άρα $x_{\text{ελ}} = 0,125 \text{ m}$.

Το σύστημα στην παραπάνω θέση δεν έχει ταχύτητα άρα βρίσκεται στην Θ.Μ.Α άρα το νέο πλάτος της ταλάντωσης του είναι $A = 0,125 \text{ m}$.

Μια ράβδος που μετατρέπεται σε γωνία.

Μία λεπτή σιδερένια ράβδος έχει μήκος $L = 40\text{cm}$ και μάζα $M = 0,6\text{ kg}$. Για να λυγίσει την παραπάνω ράβδο ακριβώς στην μέση και να σχηματίσει γωνία 90° ο Μπάρμπα-Γιάννης ο σιδεράς χρειάζεται να δαπανήσει ελάχιστη χημική ενέργεια $1,5\text{ J}$. Η ράβδος συνδέεται με οριζόντιο καρφί O στο ανώτερό της σημείο και αφήνεται από την κατακόρυφη θέση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μόλις η ράβδος γίνει κατακόρυφη χτυπάει σε ακλόνητο καρφί K που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με την αρχική θέση της ράβδου και απέχει από το καρφί O απόσταση $L/2$. Η σύγκρουση της ράβδου με το καρφί K επιφέρει την παραμόρφωση της ράβδου με αποτέλεσμα η ράβδος να σταματήσει στιγμιαία μόλις σχηματίσει ορθή γωνία. Το καρφί K δεν ενσωματώνεται στη ράβδο και μετά τον σχηματισμό της ορθής γωνίας της ράβδου αφαιρείται ακαριαία. Να βρεθούν:

- A) Η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση της ράβδου με το καρφί K
- B) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου την στιγμή που σχηματίζεται η ορθή γωνία .
- Γ) Σε ποια γωνία σε σχέση με την κατακόρυφη το σύστημα θα αποκτήσει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα μετά τον σχηματισμό της ορθής γωνίας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση στην τελική κατάσταση θα έχουμε

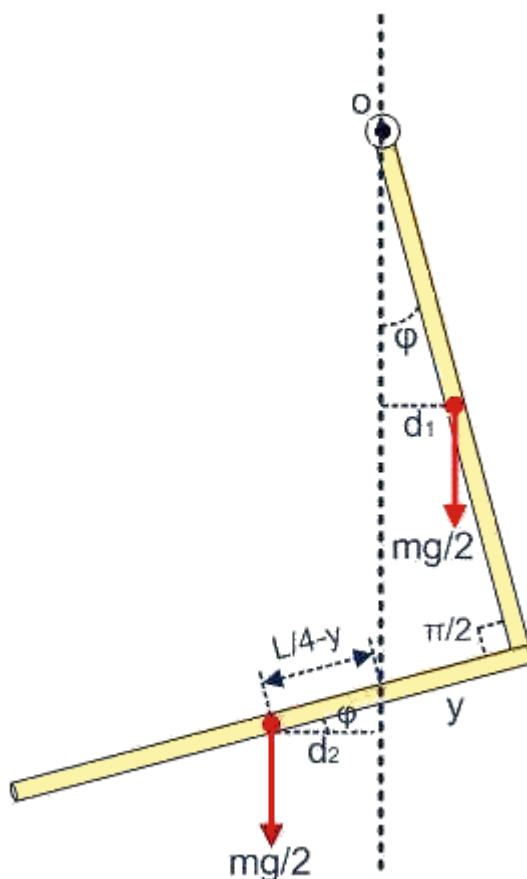
$$Mg(L+L/2) = M/2 \cdot g \cdot (L/2 + L/4) + M/2 \cdot g \cdot L/2 + U_{\text{παραμόρφωσης}} + Q_{\text{κρούσης}}$$

$$Q_{\text{κρούσης}} = 0,6\text{J}$$

Β)Την στιγμή που σχηματίζεται η ορθή γωνία η μοναδική δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η δύναμη του βάρους της οριζόντιας μισής ράβδου έτσι

$$\Delta L/\Delta t = M/2 \cdot g \cdot L/4 = 0,3 \text{ N.m}$$

Γ)Η δύναμη λοιπόν του βάρους της οριζόντιας μισής ράβδου θέλει να επιταχύνει την ράβδο ενώ η ροπή του βάρους της κατακόρυφης ράβδου θέλει να επιβραδύνει την ράβδο. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα επιτευχθεί την στιγμή που οι δύο ροπές γίνουν ίσες. Οι δυνάμεις είναι ίσες άρα όταν και τα αποστήματα των ροπών θα γίνουν ίσα. Με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος θα πάρουμε



Αν ονομάσω γωνία ϕ την γωνία ανάμεσα στην κατακόρυφη και το $L/2$ που συνδέεται με το καρφί Ο θα ισχύει για το απόστημα του βάρους $\eta \mu \phi = d_1/L/4$

Για την απέναντι πλευρά του τριγώνου θα ισχύει $\epsilon \phi \phi = \psi/L/2$

Για το απόστημα του βάρους της άλλης πλευράς θα ισχύει

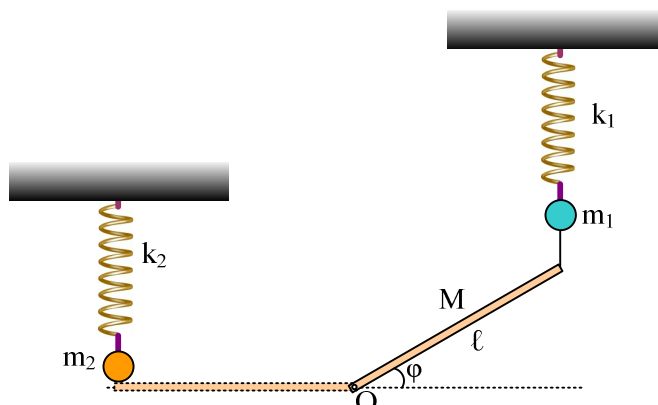
$$\sigma_{\text{syn}} = d_2 / (L/4 - \psi)$$

$$\text{Επειδή πρέπει } d_1 = d_2 \text{ θα έχουμε } L\eta_{\text{μφ}}/4 = (L/4 - L\epsilon_{\text{φφ}}/2)\sigma_{\text{syn}}$$

$$\text{άρα } \epsilon_{\text{φφ}} = 1/3$$

Μια ράβδος που κινούμενη προκαλεί δύο ταλαντώσεις

Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Η ράβδος έχει μάζα $M=10\text{Kg}$ και ισορροπεί με την βοήθεια νήματος και οριζόντιου καρφιού που βρίσκεται στο σημείο O . Το μήκος της ράβδου είναι $L=0,6\text{m}$ και η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\varphi=30^\circ$. Το ελατήριο έχει σταθερά $K_1=500\text{N/m}$ και είναι δεμένο με το σώμα μάζας $m_1=5\text{Kg}$ και το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα. Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο O ισορροπεί άλλο σώμα μάζας $m_2=10\text{Kg}$ δεμένο από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K_2=1000\text{N/m}$. Η απόσταση του m_2 από το O είναι $L=0,6\text{m}$. Κόβουμε το νήμα που συνδέει την ράβδο με το m_1 . Η ράβδος όταν φτάνει στην οριζόντια θέση συγκρούεται με την μάζα m_2 και μετά την κρούση τους η ράβδος σταματάει στιγμιαία. Αν θεωρηθεί θετική φορά προς τα πάνω να βρεθούν:

- Οι εξισώσεις απομάκρυνσης ταλάντωσης των m_1 και m_2 . Να θεωρηθεί $t=0$ η στιγμή που αρχίζει το κάθε σώμα την ταλάντωσή του.
- Να βρεθεί η απώλεια της ενέργειας του συστήματος κατά την διάρκεια της κρούσης της ράβδου με το σώμα m_2 .
- Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης που θα εκτελούσε ένα σώμα αν εκτελούσε ταυτόχρονα

δύο ταλαντώσεις με εξισώσεις απομάκρυνσης τις δύο παραπάνω του ερωτήματος α).

Δίνεται για την ράβδο $I_0 = 1/3 ML^2$. Το σώμα m_2 να θεωρηθεί σημειακό.

Απάντηση:

Α) Για την ισορροπία της ράβδου θα πάρουμε από την ισορροπία των ροπών γύρω από το σημείο Ο:

$$-Mg \cdot L \sin \varphi / 2 + T \cdot L \sin \varphi = 0$$

$$\text{άρα } T = 50 \text{ N}$$

Για την αρχική ισορροπία του m_1 θα έχουμε:

$$m_1 \cdot g + T = K_1 x_{ελ1} \quad \text{άρα } x_{ελ1} = 0,2 \text{ m.}$$

Μετά το κόψιμο του νήματος για την νέα θέση ισορροπίας του m_1 θα έχουμε $m_1 \cdot g = K_1 x_{ελ2}$ άρα $x_{ελ2} = 0,1 \text{ m.}$

Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα m_1 δεν έχει ταχύτητα άρα βρίσκεται στην ακραία θέση και μάλιστα στην Θ.Ε.Α αφού θετική φορά την ορίζουμε προς τα πάνω. Άρα $A_1 = 0,2 - 0,1 = 0,1 \text{ m.}$ Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης για το σώμα m_1 θα είναι:

$$\psi_1 = 0,1 \mu(10t + 3\pi/2) \quad (\text{S.I.})$$

Από την ΑΔΕ για την ράβδο από την αρχική θέση μέχρι την θέση που θα συγκρουσθεί με το m_2 θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot L/4 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

$$\text{άρα } \omega = 5 \text{ rad/sec.}$$

Για την κρούση θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$$

$$\text{άρα } I\omega = m_2 \cdot v_2 \cdot L$$

$$\text{Αρα } v_2 = 1 \text{ m/sec.}$$

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη για την δεύτερη ταλάντωση αφού το σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ και μάλιστα με θετική ταχύτητα $v_2 = \omega \cdot A_2$ άρα $A_2 = 0,1 \text{ m}$. Αρα η εξίσωση απομάκρυνσης θα είναι για το δεύτερο σώμα:

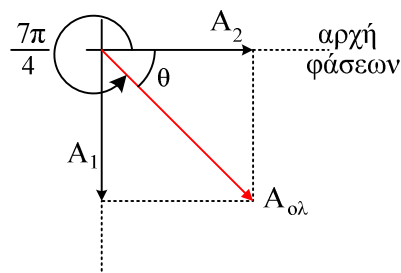
$$\psi_2 = 0,1 \eta \mu 10t \text{ (S.I.)}$$

Β) Από την ΑΔΕ για την κρούση θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + Q_{\text{κρούσης}}$$

$$\text{θα πάρουμε } Q = 5 \text{ J}$$

Γ) Με την βοήθεια του παρακάτω διαγράμματος με τα στρεφόμενα διανύσματα



θα έχουμε για την συνισταμένη ταλάντωση:

$$A_{\text{ολ}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0,1 \sqrt{2} \text{ m}$$

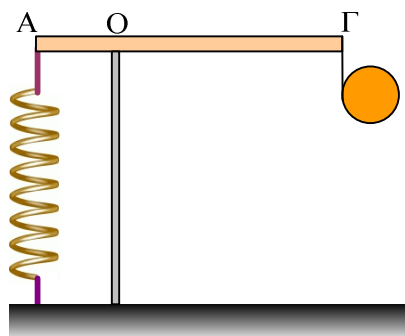
$$\text{και } \epsilon \phi \theta = A_1 / A_2 = 1 \text{ άρα } \theta = 45^\circ .$$

Άρα η συνολική εξίσωση:

$$\psi_{\text{ολ}} = 0,1 \sqrt{2} \eta \mu (10t + 7\pi/4) \text{ (S.I.)}$$

Μια ράβδος με γιο-γιο και ένα ελατήριο

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ μήκος $l=4\text{m}$ και μάζας $m=1\text{kg}$ ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια καρφιού στο σημείο Ο ενός υποστηρίγματος που απέχει από το άκρο Α απόσταση 1m . Το άκρο Α δένεται με ελατήριο φυσικού μήκους $l_0=1,4\text{ m}$ σταθεράς $K=200\text{ N/m}$ ενώ στο άλλο άκρο Γ δένεται αβαρές σκονί που είναι τυλιγμένο σε κύλινδρο μάζας $M=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,3\text{ m}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω στο σχήμα.



Την στιγμή $t=0$ ο κύλινδρος αφήνεται από το σημείο Γ. Κατά την πτώση του κυλίνδρου το σύστημα ισορροπεί οριζόντια. Την χρονική στιγμή $t_1=\sqrt{0,3}\text{sec}$ το νήμα κόβεται και ταυτόχρονα ο σύνδεσμος του ελατηρίου με την ράβδο στο άκρο Α σπάει.

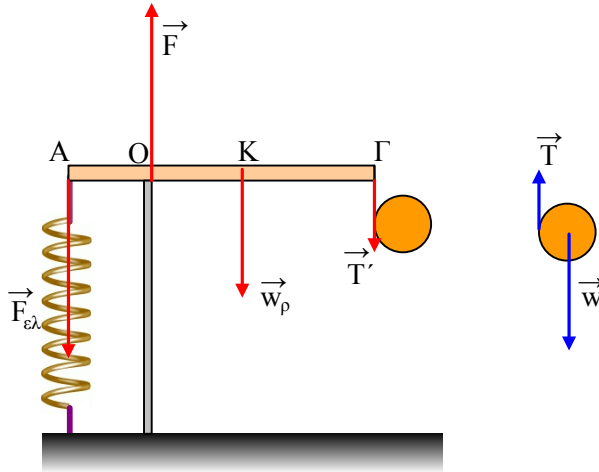
Να βρεθούν :

- A) Η κατακόρυφη απόσταση της ράβδου από το έδαφος.
- B) Την ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου όταν χτυπάει για πρώτη φορά στο έδαφος.
- Γ) Να εξεταστεί αν η ράβδος μπορεί να χτυπήσει πρώτη στο έδαφος πριν ο κύλινδρος φτάσει στο έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το άξονα περιστροφής του $I_{cm}=0,5MR^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm}=1/12ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για την κίνηση του κυλίνδρου όταν είναι δεμένος στο σκονί θα έχουμε :



$$Mg - T = macm \quad \text{και} \quad T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\text{γων}} \quad \text{θα πάρουμε:}$$

$$acm = 20/3 \text{ m/sec}^2 \quad \text{και} \quad T = 10/3 \text{ N.}$$

Για την ισορροπία της ράβδου θα πάρουμε

$$-mg(KO) - T \cdot (\Gamma O) + F_{\text{ελ}} \cdot (AO) = 0$$

Αρα $x_{\text{ελ}} = 0,1 \text{ m}$ Αρα το ύψος $H = l_0 + x_{\text{ελ}} = 1,4 + 0,1 = 1,5 \text{ m}$

Β) Για την κίνηση του κυλίνδρου όταν ήταν δεμένος με το σκοινί θα έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} acm \cdot t^2 = 1 \text{ m}$$

και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

$$U_{cm} = acm \cdot t = 20\sqrt{0,3/3} \text{ m/sec.}$$

Από την ΑΔΕ για την πτώση του κυλίνδρου μετά το κόψιμο του σκοινιού θα έχουμε :

$$K_{\text{περ}} + K_{\text{μετ}} + U_w = K_{\text{τελ}}$$

$$\text{άρα} \quad \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m U_{cm}^2 + mg(H - h - R) = K_{\text{τελ}}$$

και μετά από πράξεις $K_{\text{τελ}} = 12 \text{ J}$

Γ) Η ράβδος μετά το κόψιμο του σκοινιού και του συνδέσμου του ελατηρίου θα εκτελέσει επιταχυνόμενη στροφικά κίνηση μέχρι την κατακόρυφη θέση (αν έφτανε) εξαιτίας της ροπής του βάρους της. Η ροπή αυτή όμως μειώνεται συνεχώς αφού το απόστημα του βάρους μειώνεται. Την μέγιστη λοιπόν γωνιακή επιτάχυνση την έχει η ράβδος την στιγμή που κόβεται το νήμα και ο σύνδεσμος του ελατηρίου. Αν υποθέσουμε ότι η μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση ήταν σταθερή τότε η ράβδος θα χρειαζόταν ελάχιστο χρόνο που θα έβγαινε από τη σχέση:

$$\theta = 1/2 \alpha_{\omega\text{vmax}} \cdot t_{\text{min}}^2 \quad (1)$$

Για την κίνηση της ράβδου την στιγμή που κόβεται το νήμα και ο σύνδεσμος του ελατηρίου:

$$\Sigma \tau(O) = I \alpha_{\omega\text{vmax}} \quad m \cdot g \cdot (OK) = \{ 1/12 m \cdot l^2 + m(OK)^2 \} \alpha_{\omega\text{vmax}}$$

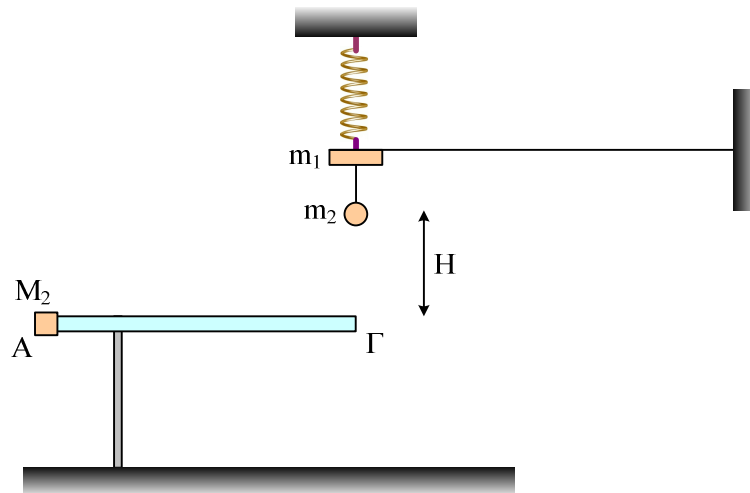
άρα μετά από πράξεις $\alpha_{\omega\text{vmax}} = 30/7 \text{ r/sec}^2$

Την στιγμή που η ράβδος χτυπάει στο έδαφος σχηματίζει γωνία με την κατακόρυφο γωνία φ με $\sin \varphi = 1,5/3$ δηλαδή $\varphi = 60^\circ$. Άρα η ράβδος θα έχει διαγράψει γωνία $\theta = \pi/6$ Με αντικατάσταση στην (1) θα έχουμε $t_{\text{min}} = \sqrt{(7\pi/90)} \text{ sec}$

Αυτός θα ήταν λοιπόν ο ελάχιστος χρόνος που θα μπορούσε να χτυπήσει η ράβδος στο έδαφος αν είχε συνεχώς την ίδια μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση. Στον παραπάνω όμως χρόνο ο κύλινδρος κινείται ομαλά στροφικά αλλά επιταχυνόμενα μεταφορικά με επιτάχυνση τη g . Έτσι στον ίδιο χρόνο θα είχε διανύσει διάστημα $H' = U \cdot t_{\text{min}} + 1/2 g \cdot t_{\text{min}}^2 \approx 3\text{m}$ που η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη από το $h_2 = H - h - R = 0,2\text{m}$ που απείχε ο κύλινδρος από το έδαφος. Τελικά πρώτος θα χτυπήσει στο έδαφος ο κύλινδρος.

Μια πραγματικά σύνθετη άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα $M=2\text{kg}$ και μήκος $L=6\text{m}$ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια καρφιού που βρίσκεται σε απόσταση $l=2\text{m}$ από το ένα της άκρο της Α. Στο άκρο Α υπάρχει κολλημένο πάνω στη ράβδο σώμα μάζας M_2 .



Πάνω στην ίδια κατακόρυφο με την άλλη άκρη Γ της ράβδου υπάρχει κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=200\pi^2\text{N/m}$ με την πάνω άκρη του στερεωμένη. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σώμα μάζας $m_1=0,5\text{kg}$ στο άκρο του οποίου είναι δεμένη οριζόντια ελαστική χορδή πάνω στην οποία μπορεί να διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα $U=2\text{ m/sec}$. Μέσω ενός δεύτερου κατακόρυφου νήματος το σώμα μάζας m_1 συνδέεται με δεύτερο σώμα μάζας $m_2=0,5\text{kg}$. Το σώμα μάζας m_2 απέχει κατακόρυφη απόσταση από το άκρο Γ της ράβδου ύψος $H=1,25\text{m}$. Στο σώμα μάζας m_1 υπάρχει ηχητική πηγή αρμονικών ήχων συχνότητας $F_s=680\text{Hz}$ ενώ στο σώμα μάζας m_2 υπάρχει ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων. Κάποια στιγμή το κατακόρυφο νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_2 συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο. Να βρεθούν:

A) Η μάζα M_2

B) Να βρεθεί η εξίσωση που περιγράφει την συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο σώμα μάζας m_2 μέχρι την στιγμή που αυτή συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο και να βρεθεί η συχνότητα του ανιχνευτή ελάχιστα πριν την κρούση.

Γ) Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την πλαστική καθώς και η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής αμέσως μετά την πλαστική κρούση αν υποθέσουμε ότι η κρούση ήταν ακαριαία.

Δ) Η μορφή της οριζόντιας ελαστικής χορδής την στιγμή που γίνεται η πλαστική κρούση.

Δίνεται για την ράβδο $I_{cm}=1/12 M.L^2$ η ταχύτητα του ήχου $U_{\eta\chi}=340\text{m/sec}$ το $g=10\text{m/sec}^2$ και $\pi^2=10$. Όλα τα σώματα εκτός της ράβδου να θεωρηθούν σημειακά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Για να ισορροπεί η ράβδος θα ισχύει η σχέση ισορροπίας $\Sigma\tau(O)=0$ άρα $-M.g.(L/2 -l) + M_2.g.l=0$ άρα $M_2=1\text{kg}$.

Β) Για την ισορροπία των σωμάτων m_1-m_2 με το ελατήριο θα ισχύει $(m_1+m_2).g=Kx_1$ άρα $x_1=1/200\text{ m}$ ενώ μετά το κόψιμο του νήματος θα ισχύει για την ισορροπία του σώματος m_1 $m_1.g=Kx_2$ άρα $x_2=1/400\text{ m}$. Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα m_1 δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης της και αν υποθέσουμε ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω θα βρίσκεται στην ΘΕΑ. Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A=x_1-x_2=1/400\text{ m}$ και η εξίσωση της ταχύτητας θα δίνεται από την σχέση $u=\pi/20 \sin(20\pi t+3\pi/2)$ (S.I)

Το σώμα m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση μέχρι να χτυπήσει την ράβδο. Ο χρόνος που θα χρειασθεί το σώμα m_2 για να χτυπήσει την ράβδο θα βρεθεί από την σχέση $H=1/2 g.t^2$ άρα $t=0,5\text{sec}$. Έτσι η ταχύτητα του σώματος m_2 θα δίνεται από την σχέση $V=10.t$ $t<0,5\text{sec}$. Από την σχέση για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε

$$F_{αν}=(U_{\eta\chi}-V).F_s/(U_{\eta\chi}+u)=(340-10t)680/\{340+\pi/20 \sin(20\pi t+3\pi/2)\} \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Η κρούση θα συμβεί την στιγμή $t=0,5\text{sec}$ άρα η συχνότητα θα είναι $F_{αν}=670\text{Hz}$.

Γ) Για την κρούση του m_2 με την ράβδο θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ

$$m_2.V.(L-l)=I_{ολ}.\omega_{\text{συστ}} \quad (2)$$

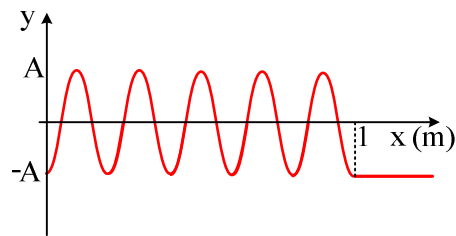
Το $I_{ολ}=1/12 .M.L^2 + M.(L/2 -l)^2 + M_2.l^2 + m_2.(L-l)^2=20\text{kg.m}^2$ άρα με αντικατάσταση στη σχέση (2) $\omega_{\text{συστ}}=0,5\text{r/sec}$

Η γραμμική ταχύτητα εκείνη τη στιγμή του σώματος m_2 είναι

$$V' = \omega \sin(\omega(L-l)) = 2 \text{ m/sec}$$

Ετσι από την σχέση (1) θα βρούμε $F_{αν'} = 676 \text{ Hz}$.

Δ) Το σώμα m_1 μετά το κόψιμο του νήματος θα γίνει η πηγή κύματος που θα διαδοθεί στην οριζόντια ελαστική χορδή. Ο χρόνος $t = 0,5 \text{ sec}$ αντιστοιχεί σε $5T$ άρα το κύμα έχει διαδοθεί στην χορδή 5λ . Από την σχέση $U = \lambda \cdot f$ άρα $\lambda = 0,2 \text{ m}$. Άρα το σχήμα της χορδής θα είναι

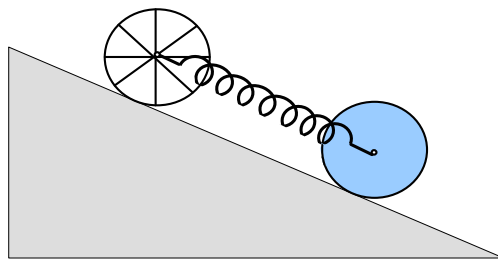


Μια παραλλαγή στο θέμα Δ

Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίση $\phi=30^\circ$ αφήνουμε να κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν ταυτόχρονα ένας δίσκος και ένας δακτύλιος ίδιας μάζας $M=1,4\text{kg}$ και ίδιας ακτίνας $R=0,1\text{m}$.

Α) Να υπολογιστεί ποιο από τα δύο σώματα θα αποκτήσει μεγαλύτερη επιτάχυνση.

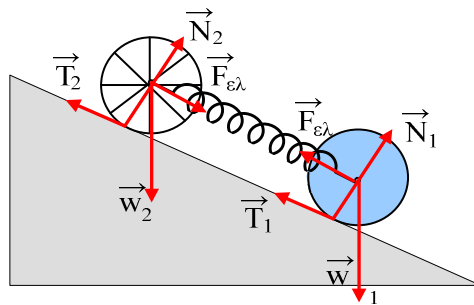
Β) Συνδέουμε με κατάλληλο τρόπο τα κέντρα μάζας των δύο στερεών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με ιδανικό ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς $K=100\text{N/m}$, το οποίο δεν εμποδίζει την περιστροφή και δεν προκαλεί κάθε είδους τριβές. Το σύστημα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατερχόμενο του κεκλιμένου επιπέδου με το ελατήριο να έχει σταθερό μήκος.



Να βρεθούν :

- 1) Η επιμήκυνση ή η συσπίρωση του ελατηρίου έτσι ώστε το σύστημα να κατέρχεται κυλιόμενο χωρίς να ολισθαίνει.
 - 2) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κάθε στερεού την χρονική στιγμή t_1 αν το σύστημα εκείνη την στιγμή έχει κατέλθει κατακόρυφη απόσταση $\Delta H=0,35\text{ m}$
 - 3) Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος την παραπάνω χρονική στιγμή t_1 .
- Για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5M\cdot R^2$ και για το δαχτυλίδι $I_{\text{cm}}=M\cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α) Από τους νόμους της μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot \eta \mu \phi - T = M a \quad \text{και}$$

$$T \cdot R = \lambda \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu}$$

θα βρούμε $a = g \eta \mu \phi / (\lambda + 1)$ και με αντικατάσταση του λ θα βρούμε $a_{\text{δίσκου}} = 10/3 \text{ m/sec}^2$ και $a_{\text{δακ}} = 2,5 \text{ m/sec}^2$.

B)

1) Επειδή η επιτάχυνση του δίσκου είναι μεγαλύτερη από αυτή του δαχτυλιδιού κατά την ελεύθερη κάθοδό τους για να κατεβαίνουν τώρα σαν σύστημα θα πρέπει να αποκτήσουν κοινή επιτάχυνση. Έτσι θα πρέπει η επιτάχυνση του δίσκου να γίνει πιο μικρή από την επιτάχυνση της ελεύθερης «κατάβασης» και του δακτυλίου πιο μεγάλη σε σχέση με την επιτάχυνση της ελεύθερης «κατάβασης». Έτσι το ελατήριο πρέπει να είναι συσπειρωμένο για να αυξήσει την επιτάχυνση του δακτυλίου και να μειώσει την επιτάχυνση του δίσκου.

Με την βοήθεια των νόμων της κίνησης για την μεταφορική και στροφική κίνηση θα έχουμε

$$\text{Για τον δίσκο} \quad M \cdot g \cdot \eta \mu \phi - T_{\sigma\tau 1} - F_{\epsilon\lambda} = M a_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad T_{\sigma\tau 1} \cdot R = 0,5 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu 1} \quad (2)$$

$$\text{Για το δαχτυλίδι} \quad M \cdot g \cdot \eta \mu \phi - T_{\sigma\tau 2} + F_{\epsilon\lambda} = M a_2 \quad (3) \quad \text{και} \quad T_{\sigma\tau 2} \cdot R = M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu 2} \quad (4)$$

Κάνοντας πράξεις θα βρούμε $F_{\epsilon\lambda} = 1 \text{ N}$ άρα $x_{\epsilon\lambda} = 0,01 \text{ m}$

2) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση

$$2M \cdot g \cdot H = 1/2 \cdot I_1 \cdot \omega_1^2 + 1/2 \cdot M \cdot U_1^2 + 1/2 I_2 \cdot \omega_2^2 + 1/2 \cdot M \cdot U_2^2$$

Με αντικατάσταση $U_{cm} = 2 \text{ m/sec}$

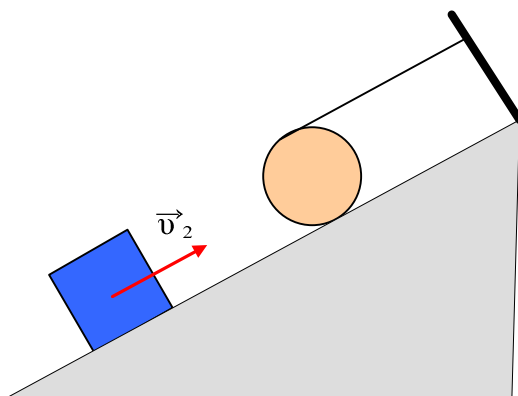
3) Με βάση την θεωρία ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος θα δίνεται από την σχέση

$$\Delta L / \Delta t = \sum \tau_{\epsilon\kappa\omega\tau\epsilon\rho} = T_{\sigma\tau 1} \cdot R + T_{\sigma\tau 2} \cdot R \quad (5) \quad \text{Με την βοήθεια των σχέσεων θα βρούμε} \quad T_{\sigma\tau 1} = 2 \text{ N} \quad \text{και} \quad T_{\sigma\tau 2} = 4 \text{ N} \quad \text{άρα} \quad \text{με αντικατάσταση στην σχέση (5) θα βρούμε}$$

$$\Delta L / \Delta t = 0,6 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec}$$

Μια νέα κρούση κυλίνδρου και κύβου.

Ο κύλινδρος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M=2\text{Kg}$ και ακτίνα $R=0,2\text{m}$. Το νήμα μπορεί να ξετυλίγεται από το κύλινδρο και να είναι συνεχώς παράλληλο και τεντωμένο με το κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ ($\eta\mu\phi=0,8$) που παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu=0,5$ με τον κύλινδρο.



Την στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα και ο κύλινδρος αρχίζει να κατέρχεται περιστρεφόμενος δεξιόστροφα, ενώ η ταχύτητα (ως προς ακίνητο παρατηρητή) του σημείου επαφής με το νήμα, της κάθετης στο επίπεδο διαμέτρου είναι συνεχώς μηδενική. Την στιγμή $t=3\text{sec}$ το νήμα κόβεται και ο κύλινδρος συγκρούεται κεντρικά μετωπικά και ελαστικά με κύβο μάζας $M=2\text{Kg}$ ακμής $a=0,4\text{m}$ που ανέρχεται με ταχύτητα μέτρου U_2 . Αν μετά την κρούση που διαρκεί ελάχιστα ο κύλινδρος αρχίζει αμέσως να κυλίεται χωρίς να περιστρέφεται ανερχόμενος να βρεθούν :

- Α) Το μέτρο της ταχύτητας του κύβου την στιγμή της κρούσης
- Β) Την απόσταση των κέντρων μάζας των δύο στερεών όταν ο κύλινδρος σταματήσει για πρώτη φορά μετά την κρούση.
- Γ) Θα μπορέσουν τα δύο σώματα να ξανασυγκρουστούν για δεύτερη φορά ή όχι;

Για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5 \cdot M \cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε

$$M \cdot g \eta\mu\phi - T - T_0 \lambda = M \cdot a \quad (1)$$

$$T \cdot R - T_0 \lambda \cdot R = 0,5 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Επειδή το σημείο επαφής με το κεκλιμένο επίπεδο έχει συνεχώς (πριν κοπεί το νήμα) ταχύτητα $2 U_{\text{cm}}$ θα δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης $T_0 \lambda = \mu \cdot N = \mu \cdot M \cdot g \sigma\upsilon\nu\phi = 6\text{N}$ (3) Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) θα βρούμε μετά από πράξεις $a = 4/3 \text{m/sec}^2$.

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση $U=a \cdot t_1=4\text{m/sec}$.

Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική άρα τα δύο σώματα που έχουν ίδιες μάζες θα πρέπει να ανταλλάξουν ταχύτητες. Ο κύλινδρος όμως πρέπει μετά την κρούση να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει προς τα πάνω. Έτσι το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο πρέπει να έχει συνολική ταχύτητα μηδέν. Η ταχύτητα περιστροφής είναι $U_{\text{περ}}=4\text{m/sec}$ έχει φορά προς τα κάτω και η κρούση δεν θα επηρεάσει την στροφική κίνηση του κυλίνδρου μιας και οι δυνάμεις επαφής είναι κεντρικές και δεν προκαλούν ροπή. Η ταχύτητα μεταφοράς μετά την κρούση πρέπει και αυτή να έχει μέτρο 4m/sec και φορά προς τα πάνω. Αυτή θα πρέπει να είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου μετά την κρούση. Έτσι και ο κύβος είχε πριν την κρούση ταχύτητα $U_2=4\text{m/sec}$.

Β) Από του νόμους τώρα της κίνησης για την περιστροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot \eta \mu \phi - T \sigma \tau = M \cdot a_2 \quad (4)$$

$$T \sigma \tau \cdot R = 0,5 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\text{γων2}} \quad (5)$$

μετά από πράξεις $a_2=16/3\text{m/sec}^2$ και $T \sigma \tau=16/3 \text{ N}$

Πρέπει όμως να δούμε αν ισχύει και η συνθήκη κύλισης της σφαίρας δηλαδή $T \sigma \tau < \mu \cdot N$.

Δηλαδή $16/3 < 0,5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,6$ άρα $16/3 < 6$ που ισχύει άρα ο κύλινδρος κυλιέται και προς την άνοδο και προς την κάθοδο γιατί οι δυνάμεις δεν αλλάζουν και για την κάθοδο.

Ο κύβος εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα $U_0=4\text{m/sec}$ και επιτάχυνση που θα βρεθεί από το νόμο της κίνησης

$$M \cdot g \cdot \eta \mu \phi - \mu \cdot M \cdot g \cdot \sigma \nu \eta \phi = M \cdot a_3 \quad \text{άρα } a_3=5\text{m/sec}^2.$$

Για την κίνηση του κυλίνδρου και από τους νόμους της ταχύτητας και του διαστήματος θα έχουμε $U=U_0-a_2 \cdot t_2$ άρα $t_2=0,75\text{sec}$ $S_1=U_0 \cdot t_2 - 1/2 \cdot a_2 \cdot t_2^2=1,5\text{m}$.

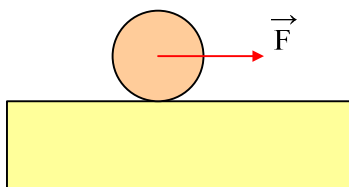
Στον ίδιο χρόνο t_2 ο κύβος θα έχει κινηθεί $S_2=U_0 \cdot t_2 + 1/2 \cdot a_3 \cdot t_2^2=4,40625\text{m}$.

Άρα η απόσταση των κέντρων μάζας των δύο στερεών θα είναι $D=R+a/2+S_1+S_2=6,30625\text{m}$

Γ) Μόλις ο κύλινδρος σταματήσει στιγμιαία θα αρχίσει να κυλιέται κατερχόμενος με επιτάχυνση και πάλι $a_2=16/3\text{m/sec}^2$ που είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του κύβου $a_3=5\text{m/sec}^2$. Έτσι μετά από λίγο και εφόσον το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου επαρκεί τα δύο στερεά θα ξανασυγκρουστούν.

Μια μπανιέρα Αγιοβασιλιάτικη!!!

Στο χωριό του Αι-Βασίλη υπήρχε μία παγωμένη οριζόντια μπανιέρα που παρουσίαζε συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,08-0,1x$ (S.I.). Πάνω στη μπανιέρα και στην θέση $x=0$ υπάρχει κύλινδρος με μάζα $M=1\text{kg}$. Ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου $F=1,5\text{N}$ και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται.



Να βρεθούν :

- A) Η θέση στην οποία ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει.
- B) Να βρεθεί η ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου σε εκείνη τη θέση.
- Γ) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στη θέση όπου το επίπεδο γίνεται λείο.

Για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5MR^2$.

Χωριό του Αι-Βασίλη δεν υπάρχει όπως φυσικά και η παραπάνω μπανιέρα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Για να αρχίσει να ολισθαίνει θα πρέπει να πάψει να ισχύει η συνθήκη κύλισης δηλαδή η σχέση $T_{στ}<\mu N$. Από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση όταν ο κύλινδρος κυλίεται θα πάρουμε:

$$F-T_{στ}=M \cdot a_{cm} \quad (1) \quad \text{και} \quad T_{στ} \cdot R=0,5MR^2 \cdot \alpha \quad \text{αγων άρα}$$

$$T_{στ}=0,5Ma_{cm} \quad (2)$$

με αντικατάσταση της (2) στην (1) θα έχουμε:

$$F-0,5Ma_{cm}=Ma_{cm} \quad \text{και}$$

$$a_{cm}=1\text{m/sec}^2$$

και από την (2) $T_{στ}=0,5N$.

Από την συνθήκη κύλισης $0,5<(0,08-0,1x)10$ άρα $x<0,3\text{m}$.

Ετσι ο κύλινδρος μέχρι τη θέση $x<0,3\text{m}$ κυλίεται και στην θέση $x=0,3\text{m}$ είναι έτοιμος να ολισθήσει.

- B) Η κίνηση του κυλίνδρου είναι επιταχυνόμενη άρα:

$$v_{cm} = a_{cm} \cdot t \quad (3) \quad \text{και} \quad x = 1/2 a_{cm} \cdot t^2$$

$$\text{άρα } 0,3 = 1/2 \cdot 1 \cdot t^2 \quad \text{άρα } t = \sqrt{0,6} \text{sec και από την (3)} \quad v_{cm} = \sqrt{0,6} \text{m/sec.}$$

$$K_{ολ} = K_{περ} + K_{μετ} = 1/2 M U_{cm}^2 + 1/2 I \omega^2 = 0,5 \cdot 0,6 + 1/4 \cdot 1 \cdot 0,6 = 0,45 \text{J}$$

Το ίδιο θα μπορούσε να προκύψει και από την ΑΔΕ με $W_F = K_{ολ}$ άρα

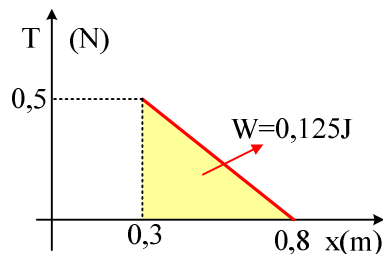
$$K_{ολ} = 1,5 \cdot 0,3 = 0,45 \text{J}$$

Γ) Μετά τη θέση $x = 0,3 \text{m}$ ο κύλινδρος αρχίζει να ολισθαίνει άρα δέχεται τριβή ολίσθησης μέχρι τη θέση που το επίπεδο γίνεται λείο δηλαδή την θέση όπου το $\mu = 0$ άρα $0,08 = 0,1x$ άρα $x = 0,8 \text{m}$.

Αν εφαρμόσουμε ΘΜΚΕ για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου θα πάρουμε

$$W_F - W_{\text{Τολίσ}} = K_{\text{τελμετ}} - K_{\text{αρχμετ}} \quad (4)$$

από $x = 0,3 \text{m}$ μέχρι το $x = 0,8 \text{m}$ το $W_F = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75 \text{J}$ η τριβή ολίσθησης έχει εξίσωση $T = \mu \cdot N = \mu Mg = 0,8 - x$ (S.I) το μεταφορικό της έργο θα βρεθεί από το παρακάτω διάγραμμα

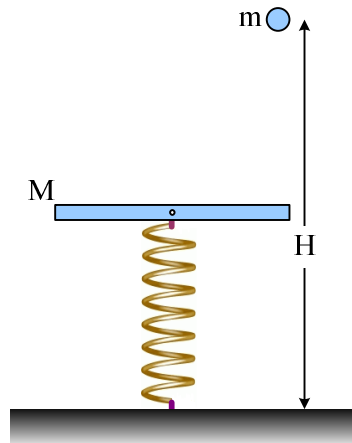


Έτσι αν αντικαταστήσουμε τις τιμές στην (4) θα έχουμε

$$0,75 - 0,125 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot U_{cm\text{τελ}}^2 - 1/2 \cdot 1 \cdot 0,6$$

$$\text{θα πάρω } U_{cm\text{τελ}} = \sqrt{1,85} \text{m/sec.}$$

Μια κρούση με ταλάντωση και στροφική κίνηση.



Στο παραπάνω σχήμα το κατακόρυφο ελατήριο έχει σταθερά $K=400\text{N/m}$ και φυσικό μήκος $L_0=0,9\text{m}$. Η οριζόντια πολύ λεπτή και ελαστική ράβδος έχει μήκος $L=1\text{m}$, μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο καρφί που είναι στερεωμένο στο ανώτερο σημείο του ελατηρίου. Ένα μικρό σώμα μάζας m αφήνεται από τον Βασίλη, που σκέφτηκε αυτή την άσκηση, σε απόσταση $H=1,6\text{m}$ από το έδαφος και μετά την ελαστική στιγμιαία κρούση με το ένα άκρο της εκτελεί ελεύθερη πτώση.

- Ποια η σχέση των δύο μαζών που συγκρούονται ελαστικά;
- Αν $m=1\text{Kg}$, κινδυνεύει η οριζόντια ράβδος να συγκρουστεί με το έδαφος;
- Πόσες περιστροφές έχει διαγράψει η ράβδος όταν το μικρό σώμα φτάνει στο έδαφος;
- Ποια η ταχύτητα του άκρου της ράβδου όπου έγινε η κρούση, όταν για πρώτη φορά η ράβδος γίνεται στιγμιαία κατακόρυφη;

Δίνεται ότι το ελατήριο παραμένει συνεχώς κατακόρυφο, $g=10\text{m/s}^2$ ενώ για τη ράβδο $I_{\text{cm}}=ML^2/12$.

Απάντηση:

- i) Με τη βοήθεια της ΑΔΟ για το σύστημα θα έχουμε $m \cdot v = M \cdot v_{\text{cm}}$ (1)

Με τη βοήθεια της ΑΔΣ γύρω από τον άξονα περιστροφής της ράβδου

$$M \cdot v \cdot L/2 = I_{\text{cm}} \omega \quad \text{άρα} \quad \omega = \frac{6mv}{ML} \quad (2)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική από την ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} M \cdot v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) θα πάρουμε $M=4m$.

- ii) Το ελατήριο με τη ράβδο ισορροπούν άρα ισχύει η σχέση $K \cdot x_1 = M \cdot g$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$

Έτσι η ράβδος ισορροπεί σε ύψος $L_0 - x_1 = 0,8\text{m}$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της σφαίρα θα έχουμε $m \cdot g \cdot (H - L_0 + x_1) = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ άρα $v = 4\text{m/s}$ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) $v_{\text{cm}} = 1\text{m/s}$ και της σχέσης (2) $\omega = 6\text{r/s}$

Η ράβδος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το οριζόντιο καρφί που είναι δεμένο στο ελατήριο και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της ράβδου θα εκτελεί γατ με μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας $(v_{\text{cm}})_{\text{max}} = 1\text{m/s}$ και άρα πλάτους $A = (v_{\text{cm}})_{\text{max}} / \omega = 0,1\text{m}$. Το κέντρο μάζας της ράβδου εκτελεί γατ με πλάτος

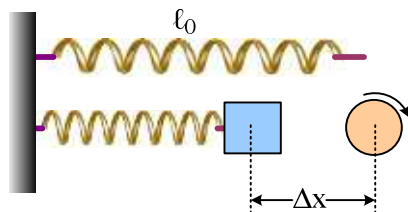
$A=0,1\text{m}$ άρα το χαμηλότερο σημείο του απέχει από το έδαφος είναι $L_0-x_1-A=0,7\text{m}$ που είναι μεγαλύτερο από το $L/2$ άρα η ράβδος δεν κινδυνεύει να χτυπήσει σε αυτό.

iii) Η μάζα m εκτελεί ελεύθερη πτώση άρα θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t' που θα βρεθεί από τη σχέση $H' = \frac{1}{2} g \cdot t'^2$ άρα $t'=0,4\text{s}$. Επομένως στον χρόνο αυτό η ράβδος θα έχει διαγράψει $N=\theta/2\pi=\omega \cdot t'/2\pi=1,2/\pi$ περιστροφές.

iv) Για να γίνει η ράβδος κατακόρυφη για πρώτη φορά θα πρέπει να περάσει χρόνος $t_0=\theta/\omega=\pi/12\text{sec}$. Την στιγμή αυτή το κέντρο μάζας άρα και οποιαδήποτε σημείο της ράβδου θα έχει κατακόρυφη ταχύτητα που θα δίνεται από την σχέση $v_\psi=(v_{\text{cm}})_{\text{max}}\sin\omega t_0$ (αν δεχθούμε ως θετική φορά την προς τα κάτω) άρα $v_\psi=1\sin 10\pi/12=-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ m/s}$. Έτσι η συνολική ταχύτητα του άκρου της ράβδου θα δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής $v_x=\omega L/2$ αλλά και της κατακόρυφης ταχύτητας v_ψ λόγω της γατ. Έτσι $v_{\text{ολ}}=\sqrt{9,75}\text{ m/s}$.

Μια κρούση με περιστροφή

Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλου μήκους και στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου του παρακάτω σχήματος μία σφαίρα μάζας $M_2=3\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ εκτελεί ελεύθερη ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{r/sec}$.



Συσπειρώνουμε το ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ κατά Δx και δένουμε στο ελατήριο κύβο μάζας $M_1=1\text{Kg}$ που έχει το μήκος της ακμής του ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας. Ο κύβος έχει στερεωμένο στο κέντρο του αβαρή ανιχνευτή ήχων ενώ η σφαίρα έχει στο κέντρο της πηγή αρμονικών κυμάτων που μπορεί να εκπέμπει συχνότητα $f_s=684\text{Hz}$. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα ελατηρίου-κύβου και την στιγμή $t=0$ συμβαίνει η κρούση του κύβου με την σφαίρα που είναι κεντρική - ελαστική και διαρκεί ελάχιστο χρόνο, η σφαίρα δε, μετά την κρούση με τον κύβο, κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθούν:

- A) Η αρχική συσπείρωση του ελατηρίου
- B) Η γραφική παράσταση της συχνότητας που καταγράφει ο ανιχνευτής σε συνάρτηση με το χρόνο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για να αρχίσει η σφαίρα να κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο θα πρέπει να ισχύει η σχέση $U_{cm}=U_{περ}$ άρα $U_2'=\omega_0 \cdot R=2\text{m/sec}$.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας θα προέλθει από την ελαστική κρούση με τον κύβο. Η κρούση είναι κεντρική έτσι οι δυνάμεις την στιγμή της κρούσης δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας να μην αλλάξει. Με τη βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης θα βρούμε την ταχύτητα του κύβου πριν την κρούση $U_2'=2M_1 \cdot U_1/(M_1+M_2)$ άρα $U_1=4\text{m/sec}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την αρχική κίνηση του κύβου θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta x^2 = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot U_1^2 \quad \text{άρα } \Delta x = 0,4\text{m}$$

B) Μετά την κρούση η ταχύτητα του κύβου θα βρεθεί με την βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης

$$U_1' = (M_1 - M_2) \cdot U_1 / (M_1 + M_2) = -2\text{m/sec}$$

ο κύβος δηλαδή γυρίζει προς τα πίσω. Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη γιατί ο κύβος βρίσκεται στη Θ.Ι.Τ. Αν θεωρήσουμε θετική φορά τη φορά προς τα αριστερά τότε η εξίσωση της ταχύτητας του κύβου θα είναι

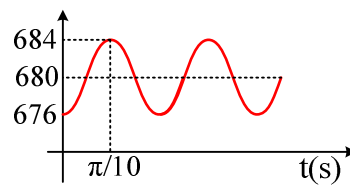
$$U=2\sigma\upsilon\nu 10t \text{ (S.I.)}$$

Η σφαίρα που είναι ταυτόχρονα και η πηγή των αρμονικών κυμάτων θα εκτελεί ομαλή μεταφορική και στροφική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $U_2'=2\text{m/s}$.

Με την βοήθεια του τύπου για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε την εξίσωση της συχνότητας του ανιχνευτή

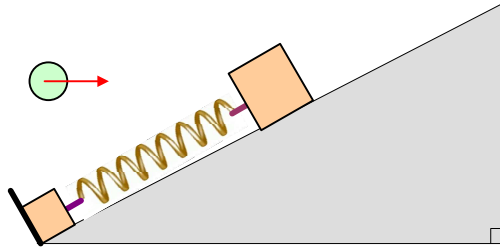
$$F=(340-2\sigma\upsilon\nu 10t).684/(340+2)=680-4\sigma\upsilon\nu 10t \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση θα είναι



Μια κρούση με Doppler

Πάνω σε ένα λείο κεκλιμένο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ και στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου βρίσκεται σώμα μάζας M_1 που συνδέεται με ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο δεύτερο σώμα μάζας $M_2=1\text{Kg}$ όπως στο σχήμα.

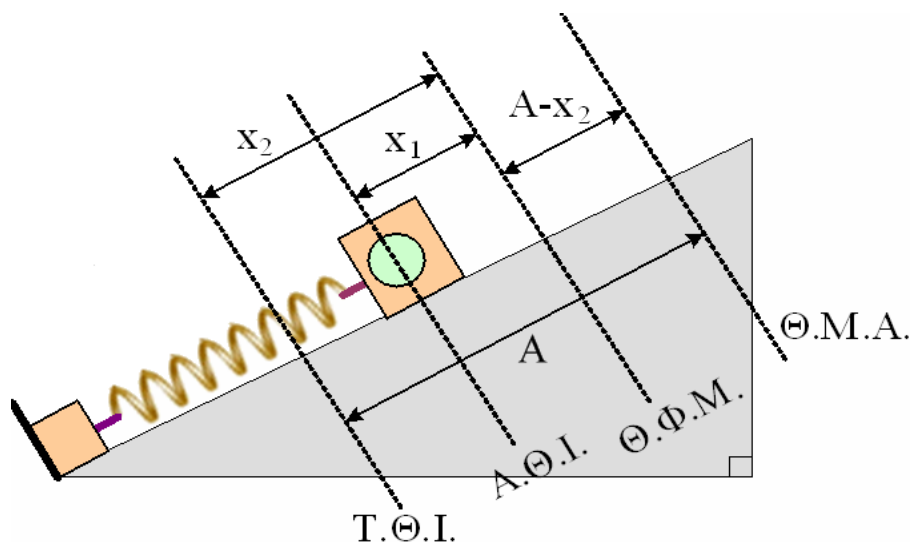


Ένα τρίτο σώμα κινείται οριζόντια με ταχύτητα $U=\sqrt{3}\text{m/sec}$ έχει μάζα $M_3=2\text{ Kg}$ σφηνώνεται στο σώμα μάζα M_2 . Το σώμα μάζας M_1 έχει ενσωματωμένη πάνω του μία πηγή παραγωγής ήχων με συχνότητα $F_s=680\text{Hz}$. Μετά την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων το σώμα M_1 μόλις και δεν χάνει την επαφή του με το κάθετο τμήμα της βάσης του κεκλιμένου επιπέδου.

Να βρεθούν :

- A) Το πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα
- B) Η μάζα M_1
- Γ) Η εξίσωση της συχνότητας που καταγράφει ένας ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο σώμα M_2 που δεν καταστρέφεται από την πλαστική κρούση.
- Δ) Η γραφική παράσταση της συχνότητας με το χρόνο
Δίνεται το $U_{\text{ηχ}}=340\text{m/sec}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α) Για την ισορροπία του σώματος M_2 πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε:

$$M_2 \cdot g \cdot \eta\mu\phi = K \cdot x_1 \quad \text{άρα } x_1 = 0,05\text{m}$$

Για την κρούση των δύο σωμάτων και για το άξονα xx' παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε $M_3 \cdot U \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = (M_3 + M_2)U_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$ άρα $U_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 1\text{m/sec}$

Έχουμε αλλαγή της μάζας του συστήματος άρα και αλλαγή της θέσης ισορροπίας.

Για την νέα θέση ισορροπίας του συστήματος $M_2 - M_3$ θα ισχύει:

$$(M_2 + M_3) \cdot g \cdot \eta\mu\phi = K \cdot x_2 \quad \text{άρα } x_2 = 0,15\text{m.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για μετά την κρούση ταλάντωση του συστήματος θα έχουμε

$$\frac{1}{2} D(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} (M_2 + M_3) \cdot U_{\sigma\upsilon\sigma\tau}^2 = \frac{1}{2} D \cdot A^2 \quad \text{άρα } A = 0,2\text{m}$$

Β) Αφού η επαφή του M_1 μόλις και χάνεται με το κάθετο τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου σημαίνει ότι όταν το σύστημα θα φτάσει στην θέση μέγιστη απομάκρυνσης εκείνη τη στιγμή το σώμα M_1 θα είναι έτοιμο να κινηθεί δηλαδή η $F_{\epsilon\lambda} = M_1 g \cdot \eta\mu\phi$ άρα:

$$K(A - x_2) = M_1 \cdot g \cdot \eta\mu\phi$$

$$100 \cdot 0,05 = M_1 \cdot 10 \cdot 0,5 \quad \text{άρα } M_1 = 1\text{Kg}$$

Γ) Η εξίσωση της ταχύτητα ταλάντωσης του συστήματος

$M_2 - M_3$ θα έχει μορφή $U = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$ με $\omega = \sqrt{K/M_0\lambda}$ άρα

$\omega = 10\sqrt{3}/3 \text{ r/sec}$ την στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην θέση

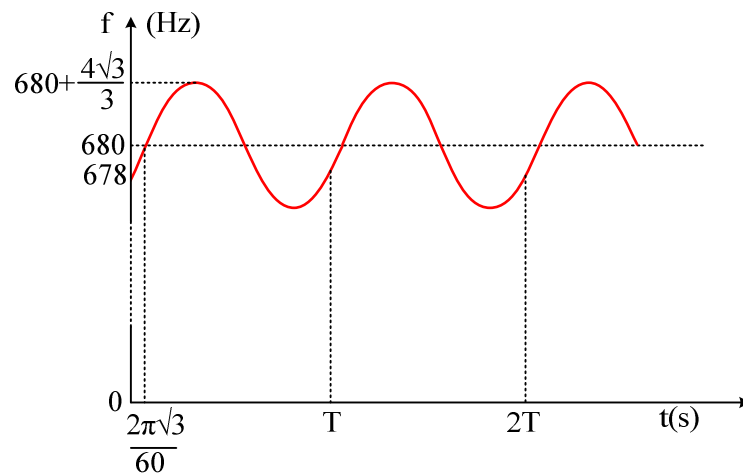
$x=x_2-x_1=0,1\text{m}$ $U>0$ άρα $\varphi_0=\pi/6$ θα έχουμε εξίσωση:

$$v=2\sqrt{3}/3\sin(10\sqrt{3}/3t+\pi/6) \text{ (S.I.)}$$

Η εξίσωση της συχνότητας που ανιχνεύει ο ανιχνευτής ήχου θα είναι:

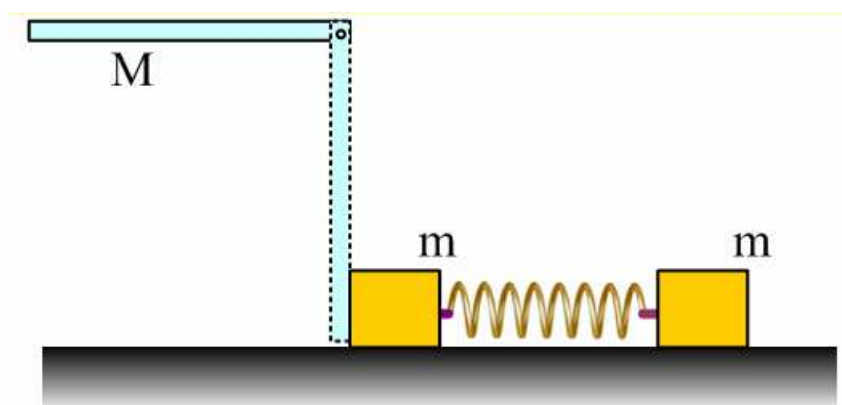
$$F_A=\{340-2\sqrt{3}/3\sin(10\sqrt{3}/3t+\pi/6)\}\cdot 680/340=680-4\sqrt{3}/3\sin(10\sqrt{3}/3t+\pi/6) \text{ (S.I.)}$$

Δ) Το σώμα για να φτάσει από την θέση $x=A/2$ στην θέση $x=A$ θα χρειασθεί χρόνο $T/6$ όπου T η περίοδος ταλάντωσης του συστήματος. Έτσι η γραφική παράσταση θα έχει μορφή



Μια κρούση και ράβδου και ένα μηχανικό σύστημα με Doppler

Ράβδος μάζας $M=3\text{Kg}$ και μήκους $L=1,2\text{m}$ αφήνεται από την οριζόντια θέση. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται από το ένα της άκρο γύρω από οριζόντιο άξονα. Όταν ράβδος γίνει κατακόρυφη συγκρούεται με ακίνητο σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ που ισορροπεί στο οριζόντιο λείο δάπεδο δεμένο με ελατήριο σταθεράς K που το άλλο του άκρο είναι στερεωμένο σε άλλο σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$. Μετά την κρούση της ράβδου με το σώμα μάζας m η ράβδος παραμένει ακίνητη. Στο πρώτο σώμα είναι στερεωμένη πηγή ηχητικών ήχων συχνότητας $F_s=680\text{Hz}$ ενώ στο δεύτερο σώμα m υπάρχει στερεωμένος ανιχνευτής ήχων.



Να βρεθούν :

- A) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου πριν την κρούση καθώς και η ταχύτητα μετά την κρούση με τη ράβδο του σώματος m . Πως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την κρούση της ράβδου με το σώμα m ;
- B) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συχνότητας που θα ανιχνεύσει ο ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο δεύτερο σώμα m .
- Γ) Ποιο το μέγιστο ποσοστό της κινητικής ενέργειας της ράβδου λίγο πριν την κρούση που μπορεί να αποθηκεύσει το ελατήριο κατά την διάρκεια της κίνησης των δύο σωμάτων με μάζες m . Ποια είναι τότε η συχνότητα που ανιχνεύει ο ανιχνευτής;

Για την ράβδο $I_A=1/3ML^2$. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $v_{\text{ηχ}}=340\text{m/sec}$.

Απάντηση:

A) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της ράβδου θα βρούμε:

$$M \cdot g \cdot L/2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

θα βρούμε $\omega=5\text{r/s}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την κρούση θα έχουμε $I\cdot\omega=m\cdot v\cdot L$ άρα $v=6\text{m/sec}$.

Η $K_{\text{ραβ}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = 18\text{J}$ η κινητική ενέργεια του σώματος $K_m = \frac{1}{2} m\cdot v^2 = 18\text{J}$ παρατηρούμε δηλαδή ότι δεν χάθηκε ενέργεια κατά την κρούση. Θα μπορούσαμε δηλαδή να χαρακτηρίσουμε την κρούση ελαστική.

- Β) Επειδή τα δύο σώματα που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους έχουν ίδιες μάζες και η «κρούση» μεταξύ τους μπορεί να θεωρηθεί ελαστική τα σώματα συνεχώς θα ανταλλάσσουν ταχύτητες από 0m/sec σε 6m/sec και από 6m/sec σε 0m/sec με βάση την θεωρία για τα σώματα που συγκρούονται ελαστικά και έχουν ίσες μάζες. Έτσι θα επαναλαμβάνεται το φαινόμενο περιοδικά. Η συχνότητα που θα ανιχνεύει ο ανιχνευτής θα δίνεται από τη σχέση με βάση τον τύπο του Doppler:

$$F_{\text{παρατηρητή}} = (340 - v_1) \cdot 680 / (340 - v_2).$$

Ο παρατηρητής θα θέλει να ξεφύγει από την πηγή και η πηγή θα θέλει να πλησιάσει τον παρατηρητή....

Με τις ταχύτητες v_1 και v_2 να παίρνουν τιμές από 0 έως 6m/sec .

Η μέγιστη συχνότητα που θα ανιχνεύει ο ανιχνευτής θα είναι όταν ο ανιχνευτής είναι ακίνητος και η πηγή πλησιάζει με ταχύτητα $v=6\text{m/s}$

άρα $F_{\text{max}} = 340 \cdot 680 / (340 - 6) \approx 692,2\text{Hz}$ και η ελάχιστη συχνότητα θα είναι όταν ο ανιχνευτής απομακρύνεται με ταχύτητα $v=6\text{m/sec}$ και η πηγή είναι ακίνητη.

$$F_{\text{min}} = (340 + 6) \cdot 680 / 340 = 668\text{Hz}$$

- Γ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα γίνει μέγιστη όταν η απόσταση των δύο σωμάτων θα γίνει η ελάχιστη αυτό θα συμβεί όταν οι δύο ταχύτητες των σωμάτων γίνουν ίσες. Με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε $m\cdot v = 2m\cdot v_{\text{κοινή}}$ άρα $v_{\text{κοινή}} = 3\text{m/sec}$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 2m \cdot v_{\text{κοινή}}^2 + U_{\text{ελmax}} \quad \text{άρα } U_{\text{ελmax}} = 9\text{J}.$$

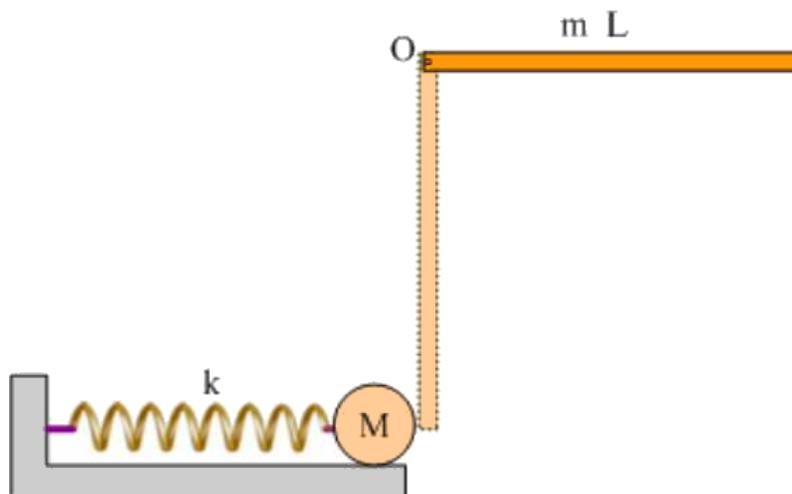
Άρα το μέγιστο ποσοστό της κινητικής ενέργειας της ράβδου που έγινε

δυναμική ενέργεια είναι $\Pi = U_{\text{ελmax}} \cdot 100\% / K_{\text{ραβ}} = 50\%$.

Επειδή το μέγιστο ποσοστό αποθήκευσης στο ελατήριο συμβαίνει όταν τα σώματα έχουν ίδιες ταχύτητες η συχνότητα θα είναι $F_{\text{παρ}} = F_{\text{πηγ}} = 680\text{Hz}$.

Μια ελαστική κρούση και δυο ταλαντώσεις

Στο παρακάτω σχήμα η θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι η θέση όπου η ράβδος μήκους L και μάζας m είναι κατακόρυφη.



Η ράβδος είναι στερεωμένη με την βοήθεια οριζόντιου καρφιού που βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με την Θ.Φ.Μ.Ε και σε ύψος L πάνω από το άκρο του ελατηρίου.

Στην άκρη του ελατηρίου δένουμε σημειακό σώμα μάζας M και συμπιέζουμε το ελατήριο κατά A από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αφήνουμε ταυτόχρονα το σώμα M και την ράβδο από την οριζόντια θέση και τα δύο σώματα συγκρούονται ελαστικά όταν η ράβδος γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά και το σώμα M όταν φτάνει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας του. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται περιοδικά κάθε φορά που το σώμα M φτάνει στην ΘΦΜΕ όπως και την πρώτη φορά.

Να βρεθούν:

- A) Η περίοδος των κρούσεων της ράβδου με το σώμα M μετά την πρώτη κρούση τους.
- B) Ποια πρώτη σχέση πρέπει να έχουν μεταξύ τους τα M, m, L, K, A για να υπάρχει το περιοδικό αυτό φαινόμενο.

Δίνεται για την ράβδο το $I_A = \frac{1}{3} m \cdot L^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να γίνει η πρώτη κρούση του σώματος Μ και της ράβδου πέρασε χρονικό διάστημα $T/4$ όπου $T=2\pi\sqrt{M/K}$ η περίοδος ταλάντωσης του σώματος Μ. Τόσο χρόνο έκανε και η ράβδος για να φτάσει στην κατακόρυφη θέση. Για να επαναλαμβάνεται το συγκεκριμένο γεγονός στην συγκεκριμένη θέση θα πρέπει η ράβδος και το σώμα να ξαναφτάνουν ταυτόχρονα στην ίδια θέση. Το σώμα Μ θα ξαναφτάνει στην ίδια θέση μετά από χρόνο $T/2$. Αυτός ο χρόνος είναι και η περίοδος των κρούσεων στην συγκεκριμένη θέση.

Β) Τον ίδιο χρόνο $T/2$ θα χρειάζεται και η ράβδος για να ξαναφτάσει στην κατακόρυφη θέση. Ο χρόνος ανόδου της ράβδου θα είναι ίσος με τον χρόνο καθόδου αφού η ροπή του βάρους κατά την άνοδο και κάθοδο είναι ακριβώς η ίδια άρα και η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση-επιβράδυνση της ράβδου θα ίσες κατά μέτρο είναι. Θα πρέπει λοιπόν η ράβδος να ξαναφτάνει στην αρχική της θέση άρα μετά την κρούση να έχει την αρχική γωνιακή ταχύτητα που είχε πριν την κρούση με το σώμα Μ.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την ράβδο θα έχουμε

$$m \cdot g \cdot L/2 = 1/2 \cdot I \cdot \omega^2 \quad \text{άρα } \omega = \sqrt{3 \cdot g/L}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και η ράβδος διατηρεί το μέτρο της αρχικής της γωνιακής ταχύτητας θα πρέπει και το σημειακό σώμα Μ να διατηρεί το μέτρο της ταχύτητά του μετά την κρούση.

Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την παραπάνω κρούση θα έχουμε

$$I \cdot \omega - M \cdot U_{\max} \cdot L = -I \cdot \omega + M \cdot U_{\max} \cdot L$$

$$\text{άρα } I \cdot \omega = M \cdot U_{\max} \cdot L$$

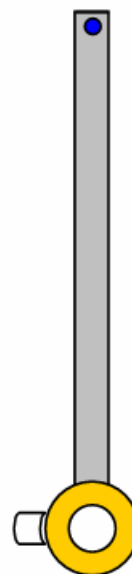
$$\text{άρα } 1/3 \cdot m \cdot L^2 \cdot \sqrt{3 \cdot g/L} = M \cdot \sqrt{K/M} \cdot A \cdot L$$

$$\text{άρα } m^2 \cdot L \cdot g/3 = M \cdot K \cdot A^2$$

Μια δύσκολη ροπή αδράνειας και ο φελλός που πετάγεται.

Κατακόρυφη ράβδος μήκους $L=1\text{m}$ και μάζας $M=3\text{Kg}$ συγκολλάται στο ένα της άκρο με σφαίρα μάζας $M'=0,8\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$ έτσι ώστε ο κατακόρυφος άξονας της ράβδου να περνάει από το κέντρο της σφαίρας. Το άλλο άκρο της ράβδου το στερεώνουμε με οριζόντιο καρφί. Αφαιρούμε από το εσωτερικό της σφαίρας όλη της ποσότητα της ύλης που βρίσκεται στο κέντρο και σε ακτίνα $R/2$ από αυτό και δημιουργούμε μία καινούργια κοίλη σφαίρα.

Δημιουργούμε μία πολύ μικρή οριζόντια οπή που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και γεμίζουμε το κοίλο χώρο με μικρή ποσότητα ιδανικού αερίου. Ταπώνουμε τη μικρή οπή με φελλό μάζας $m=0,1\text{kg}$. Θερμαίνουμε την σφαίρα οπότε κάποια στιγμή ο φελλός εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου v . Αν το σύστημα ράβδου-σφαίρας μόλις και φτάνει σε οριζόντια θέση, να βρεθούν:



- Α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-κοίλης σφαίρας γύρω από τον άξονα περιστροφής του.
- Β) Την μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-κοίλης σφαίρας.
- Γ) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε από το αέριο στο μηχανικό σύστημα φελλός-ράβδο-κοίλη σφαίρα.

Δίνονται $I_{\text{cm}} \text{ράβδου} = 1/12 M L^2$ και $I_{\text{cm}} \text{σφαίρας} = 0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Α) Αν η σφαίρα ήταν γεμάτη θα είχε $I_{\text{cm}} = 0,4MR^2$. Τώρα όμως έχουμε αφαιρέσει μάζα άρα η ροπή αδράνειας της κοίλης σφαίρας θα είναι:

$$I_{\text{cm}}' = I_{\text{cm}} - I_{\text{αφαιρ}} = 0,4MR^2 - 0,4M_{\text{αφ}} \cdot (R/2)^2.$$

Η πυκνότητα της σφαίρας που αφαιρέσαμε ήταν ίδια με την πυκνότητα της σφαίρας που έμεινε αφού το υλικό είναι το ίδιο έτσι $M/V = M_{\text{αφ}}/V_{\text{αφ}}$ άρα:

$$M/4/3\pi R^3 = M_{\text{αφ}}/4/3\pi (R/2)^3 \quad \text{έτσι} \quad M_{\text{αφ}} = M/8$$

$$I_{cm'} = I_{cm} - I_{αφαιρ} = 0,4MR^2 - 0,4Maφ.(R/2)^2 = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,4^2 - 0,4 \cdot 0,1 \cdot 0,2^2 = 0,0496 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε κανόνα Στάινερ και για την ράβδο και για την σφαίρα θα βρούμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος:

$$I_{ολ} = 1/12 ML^2 + M(L/2)^2 + I_{cm'} + M_{κοιλ.}(L+R)^2 \rightarrow$$

$$I_{ολ} = 1/3 \cdot 3 \cdot 1^2 + 0,0496 + 0,7 \cdot 1,4^2 = 2,4216 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$$

Β) Η μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-κοίλης σφαίρας θα συμβεί όταν τα αποστήματα των βαρών της σφαίρας και της ράβδου γίνουν μέγιστα. Αυτό θα συμβεί όταν το σύστημα βρεθεί στην οριζόντια θέση.

$$|\Delta L / \Delta t|_{\max} = MgL/2 + M_{κοιλ.} \cdot g \cdot (L+R) = 24,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Γ) Το αέριο έδωσε την ενέργεια για να καταφέρουν να κινηθούν ο φελλός η ράβδος και η κοίλη σφαίρα.

$$E_{αερίου} = K_{φελ} + K_{συστ} \quad (1)$$

Για την άνοδο του στερεού θα πάρουμε από την ΑΔΕ $K_{συστ} = U_{ραβ} + U_{σφ}$ άρα

$$\text{Άρα } \frac{1}{2} I_{ολ} \cdot \omega^2 = MgL/2 + M_{κοιλ.} \cdot g \cdot (L+R) \quad \text{άρα μετά από πράξεις } \omega = 4,5 \text{ r/s}$$

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε

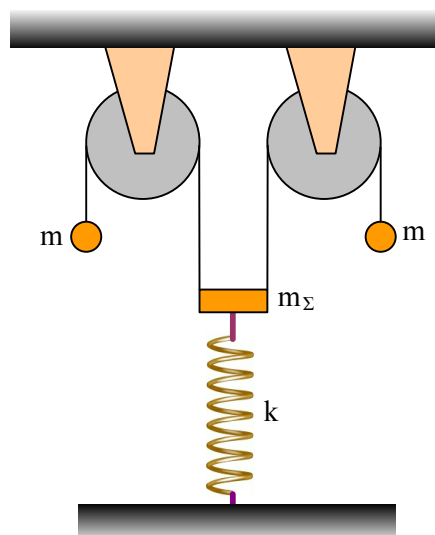
$$L_{αρχ} = L_{τελ} \quad 0 = mU(L+R) - I_{ολ} \cdot \omega$$

θα βρούμε μετά από πράξεις $v = 77,8 \text{ m/sec}$

$$\text{Με αντικατάσταση στην (1) } E_{αερ} = \frac{1}{2} I_{ολ} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 327,1 \text{ J}$$

Μια διπλή τροχαλία και μια α.α.τ.

Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Οι τροχαλίες και τα σώματα m είναι πανομοιότυπα και έχουν μάζες $M_T=4\text{kg}$ και $m=1\text{Kg}$ βρίσκονται δε στο ίδιο ύψος από το οριζόντιο έδαφος. Το σώμα Σ έχει μάζα $M=2\text{Kg}$ και όλο το σύστημα ισορροπεί. Ανεβάζουμε το σώμα Σ κατά $\Delta h=0,1\text{m}$ και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο

- A) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ θα εκτελέσει γ.α.τ. και να βρείτε την περίοδό του.
 - B) Να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης για το σώμα Σ αν θεωρηθεί θετική φορά η φορά προς τα πάνω.
 - Γ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που οι δύο τροχαλίες έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής.
 - Δ) Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια της κάθε τροχαλίας
- Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου $K=800\text{N/m}$ και για την τροχαλία η ροπή αδράνειας $I_{cm}=0,5M_T.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Για την ισορροπία των σωμάτων με μάζα m $T=m \cdot g$ και την ισορροπία του σώματος Σ :

$$2T=Mg+F_{ελ}$$

άρα $F_{ελ}=0$ δηλαδή το σώμα βρίσκεται στη Θ.Φ.Μ.Ε.

Μετά την απομάκρυνση για το σώμα Σ θα έχω $\Sigma F=-F_{ελ}+T_1+T_1-M \cdot g$ (1)

Για το κάθε σώμα m :

$$T_2-mg=ma \quad (2)$$

και για την κάθε τροχαλία

$$T_1R-T_2R=0,5M\tau \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων} \quad (3)$$

Με συνδυασμό των (2) και (3) θα πάρουμε $T_1=3a+10$ (S.I) (4)

Για την μεταφορική κίνηση του Σ ο νόμος της μεταφορικής κίνησης θα μας δώσει:

$$M \cdot g+F_{ελ}-2T_1=M \cdot a$$

(5) από την (4) και (5)

θα έχουμε $a=Kx/8$ (S.I) (6)

Με αντικατάσταση στην (1) των (4) και (6) θα έχουμε

$$\Sigma F=-Kx/4=-200x \quad (S.I)$$

Αρα το σώμα Σ κάνει γ.α.τ. με $D=200N/m$.

Αρα η περίοδος του σώματος Σ είναι $T=2\pi\sqrt{M/D}=\pi/5 \text{ sec.}$

Β) Η εξίσωση απομάκρυνσης για το σώμα Σ θα δίνεται από την γενική σχέση:

$$\psi = A \eta \mu(\omega t + \phi_0).$$

Την στιγμή που αφήνουμε το σώμα αυτό δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην Θ.Μ.Α άρα $\Delta h = A = 0,1\text{m}$ $\omega = 2\pi/T = 10\text{r/s}$ και $\phi_0 = \pi/2$ άρα η εξίσωση:

$$\psi = 0,1 \eta \mu(10t + \pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Γ) Οι τροχαλίες θα έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια όταν έχει και μέγιστη κινητική ενέργεια το σώμα Σ αφού συνδέονται με το σώμα Σ μέσω των νημάτων. Ο χρόνος αυτός θα είναι φυσικά $T/4 = \pi/20 \text{ sec.}$

Δ) Η μέγιστη ταχύτητα για το σώμα Σ θα είναι $v_{\max} = \omega \cdot A = 1\text{m/sec.}$

$$\text{Έτσι } K_{\text{τρmax}} = 1/2 I \omega^2 = 1/4 \cdot M \tau \cdot U_{\max}^2 = 1\text{J.}$$

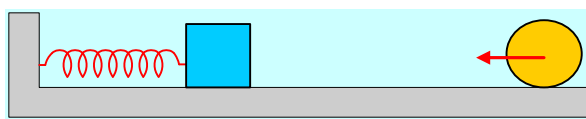
Η ίδια σχέση θα μπορούσε να προκύψει και με την βοήθεια της ΑΔΕ για όλο το σύστημα

$$M \cdot g \cdot \Delta h + 1/2 K (\Delta h)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m \cdot v_{\max}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I \omega^2 + 2m \cdot g \cdot \Delta h + 1/2 M \cdot v_{\max}^2$$

$$\text{άρα } v_{\max} = 1\text{m/sec} \quad \text{άρα } K_{\text{τρmax}} = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 4 \cdot 1^2 = 1\text{J}$$

Μια σφαίρα που πήρε ανάποδες στροφές.

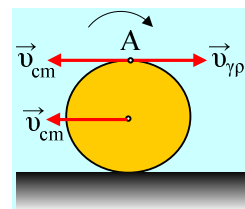
Η σφαίρα του παρακάτω σχήματος έχει ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και μάζα $m=1\text{kg}$. Η σφαίρα την χρονική στιγμή $t=0$ βάλλεται με αρχική ταχύτητα $v_{cm}=10\text{m/sec}$ και ταυτόχρονα με την βοήθεια στιγμιαίας εξωτερικής ροπής δίνεται στη σφαίρα κατάλληλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε το ανώτερο σημείο της σφαίρας να έχει μηδενική ταχύτητα. Η σφαίρα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να συγκρουστεί μετωπικά ακαριαία κεντρικά και ελαστικά με κύβο ακμής $a=0,4\text{m}$ και μάζας $m=1\text{Kg}$ που είναι ακίνητος και δεμένος με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=\pi^2\text{N/m}$. Αν η αρχική απόσταση των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων ήταν $x=10,4\text{m}$ να βρεθούν:



- A) Ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει η σφαίρα μέχρι να επιστρέψει στην αρχική της θέση.
- B) Αν η σφαίρα τελικά κυλίστα χωρίς να ολισθαίνει ή όχι
- Γ) Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας τη σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο καθώς η γραφική παράσταση της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας σαν συνάρτηση του χρόνου αν θετική φορά θεωρηθεί η αρχική φορά της ταχύτητας του κέντρου μάζας.

Απάντηση:

A) Το ανώτερο σημείο της σφαίρας δεν έχει συνολικά ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι τέτοια ώστε η γραμμική ταχύτητα περιστροφής και η ταχύτητα λόγω της μεταφορικής κίνησης της σφαίρας έχουν στο ανώτερό της σημείο συνισταμένη 0. Έτσι η σφαίρα ενώ εκτελεί μεταφορική κίνηση προς τα αριστερά θα εκτελεί και δεξιόστροφη περιστροφική κίνηση.



Η κίνηση εκτελείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με αποτέλεσμα και η μεταφορική αλλά και η στροφική κίνηση της σφαίρας να μην μπορούν να αλλάξουν. Έτσι η σφαίρα θα εκτελεί ομαλή μεταφορική κίνηση προς τα αριστερά και ταυτόχρονα να εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση δεξιόστροφη

με $\omega = \frac{v_{cm}}{R} = 50\text{r/s}$. Η σφαίρα θα συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με τον κύβο, μετά από χρόνο:

$$t_1 = \frac{x - R - \frac{a}{2}}{v_{cm}} = 1\text{s}$$

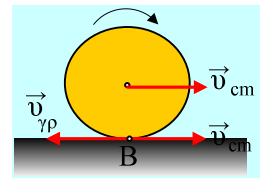
Επειδή οι δυνάμεις την στιγμή της κρούσης είναι κεντρικές δεν θα επηρεάσουν και πάλι την στροφική κατάσταση της σφαίρας μιας και δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Η κρούση όμως των δύο σωμάτων

είναι ελαστική και τα σώματα έχουν τις ίδιες μάζες. Έτσι τα σώματα θα ανταλλάξουν τις μεταφορικές τους ταχύτητες. Η σφαίρα θα μείνει μεταφορικά ακίνητη και ο κύβος θα πάρει την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας. Ο κύβος θα εκτελέσει ΓΑΤ και σε χρόνο $t_2 = T/2 = 1\text{s}$ θα επιστρέψει στην αρχική του θέση για να ξανασυγκρουστεί με τη σφαίρα που παραμένει υπομονετικά στην θέση της περιστρεφόμενη γύρω από το κέντρο μάζας της δεξιόστροφα. Τότε θα συμβεί και η δεύτερη κρούση μεταξύ του κύβου και της σφαίρας οπότε τα δύο σώματα τα ανταλλάξουν και πάλι ταχύτητες με την σφαίρα όμως αυτή τη φορά να κινείται προς τα δεξιά. Ο χρόνος που θα κάνει για να φτάσει στην αρχική

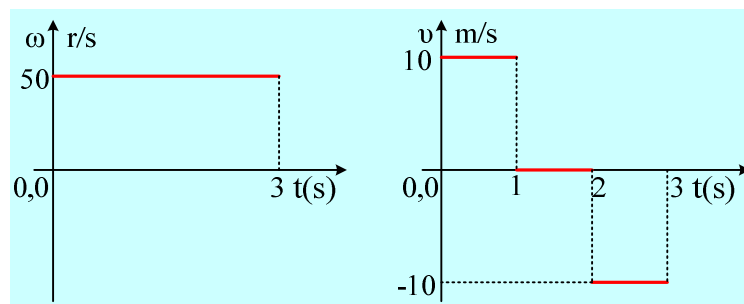
της θέση θα είναι και πάλι $t_3 = \frac{x - R - \frac{a}{2}}{v_{cm}} = 1\text{s}$. Τελικά η συνολική γωνία στροφής της σφαίρας ήταν

$\theta = \omega \cdot t_{\text{ολ}} = 50.3 = 150\text{rad}$ ή $N = 75/\pi$ περιστροφές.

Β) Μετά την κρούση η κατεύθυνση της ταχύτητας του κέντρου μάζας έχει αλλάξει χωρίς όμως να αλλάξει η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Έτσι το κατώτερο σημείο της σφαίρας θα έχει τώρα συνολικά ταχύτητα 0. Αρα η σφαίρα τώρα θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

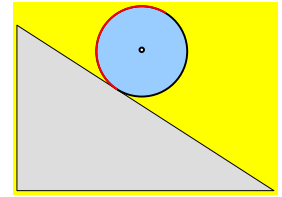


Γ) Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι συνεχώς σταθερή μιας και δεν ασκήθηκε καμία ροπή στην σφαίρα σε όλη την διάρκεια της κίνησής της. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας άλλαξε εξαιτίας των δύο κρούσεων της σφαίρας με τον κύβο. Έτσι η γραφικές παραστάσεις θα έχουν την παρακάτω μορφή



Μια σφαίρα με λιπαντικό

Μία σφαίρα με μάζα $M=1\text{Kg}$ και ακτίνας $R=2,5/\pi\text{ m}$ την ρίχνουμε μέσα σε μία λιπαντική ουσία μέχρι η μισή ακριβώς να λιπανθεί ενώ η υπόλοιπη να μείνει χωρίς λιπαντική ουσία. Το στρώμα της λιπαντικής ουσίας είναι λεπτότατο και δεν μπορεί να μετακινηθεί. Ανεβάζουμε τη σφαίρα πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο μεγάλου μήκους με γωνίας κλίσης ϕ με $\eta\mu\phi=0,7$ και με το χαμηλότερο σημείο της σφαίρας να είναι σε επαφή με τη διαχωριστική επιφάνεια της σφαίρας που έχει το λιπαντικό. Αφήνουμε τη σφαίρα ελεύθερη και αρχικά η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Μόλις η σφαίρα εκτελέσει μισή περιστροφή έρχεται σε επαφή η λιπαντική ουσία με το κεκλιμένο επίπεδο. Η λιπαντική ουσία επιτρέπει την σφαίρα να κινείται χωρίς τριβές όταν φυσικά είναι σε επαφή εκείνο το κομμάτι της σφαίρας που έχει το λιπαντικό. Όταν η σφαίρα θα έχει διαγράψει μία πλήρη περιστροφή να βρεθούν:



A) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας .

B) Η ταχύτητα του πιο απομακρυσμένου σημείου της σφαίρας από το κεκλιμένο επίπεδο καθώς και του σημείου που βρίσκεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο.

Γ) Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας.

Δ) Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο μέχρι η σφαίρα να εκτελέσει μία πλήρη περιστροφή.

Για τη σφαίρα δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$

Απάντηση:

A) Για την κύλιση χωρίς ολίσθηση της σφαίρας θα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα για την μεταφορική και την περιστροφική

$$Mg\eta\mu\phi - T = Ma_{cm} \quad (1) \quad TR = 0,4MR^2\alpha_{γων} \quad (2)$$

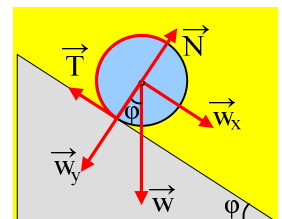
Μετά τις πράξεις η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας θα βρεθεί $a_{cm}=5\text{m/sec}^2$

Από το νόμο του διαστήματος για την αρχικά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$S = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad \text{και με } S = 2\pi R/2 \quad \text{θα βρούμε } t=1\text{sec.}$$

Ετσι με την βοήθεια του νόμου της ταχύτητας στην επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα βρούμε:

$$v_{cm} = a_{cm} \cdot t = 5\text{m/s} \quad \text{και } \omega = v_{cm}/R = 2\pi \text{ r/s.}$$



Εκείνη την στιγμή έρχεται σε επαφή η λιπαντική ουσία με το κεκλιμένο επίπεδο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην υπάρχει πλέον τριβή. Η κίνηση πλέον της σφαίρας είναι επιταχυνόμενη μεταφορική αλλά ομαλά στροφική μιας και δεν υπάρχει πλέον δύναμη που να μπορεί να προκαλέσει ροπή.

Από το νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$Mg\eta\mu\phi = Ma_{cm2} \quad \text{άρα } a_{cm2} = 7\text{m/sec}^2.$$

Η σφαίρα θα περιστραφεί κατά μισή στροφή ακόμη μετά από χρόνο $t' = \theta/\omega = 0,5\text{sec}$.

Από το νόμο της ταχύτητας για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε $u_{cmτελ} = u_{cm} + a_{cm2} \cdot t' = 8,5\text{m/sec}$.

Β) Όλα τα σημεία της σφαίρας θα έχουν ταχύτητα που θα προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας και της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής της σφαίρας.

Ετσι το ανώτερο σημείο θα έχει

$$u = u_{cmτελ} + \omega R = 13,5\text{m/sec}$$

Ενώ το σημείο επαφής με το κεκλιμένο επίπεδο θα έχει

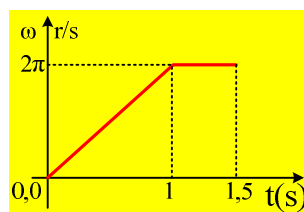
$$u = u_{cmτελ} - \omega R = 3,5\text{m/sec}$$

Γ) Το συνολικό διάστημα που μετακινήθηκε το κέντρο μάζας ήταν $S = 2\pi R/2 + ut' + 1/2 a_{cm2} \cdot t'^2 = 5,875\text{m}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετακίνηση της σφαίρας θα έχουμε

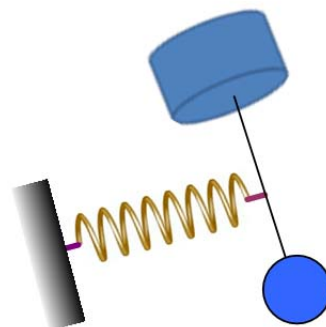
$$MgH = K_{ολ} \quad \text{θα βρούμε } K_{ολ} = 41,125\text{J}$$

Δ) Αρχικά η περιστροφική κίνηση της σφαίρας ήταν στροφικά επιταχυνόμενη με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέχρι να φτάσει το σημείο της σφαίρας που περιέχει το λιπαντικό και η στροφική κίνηση της σφαίρας να γίνει ομαλή. Ετσι η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας θα είναι



Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος σε ταλάντωση

Ένας λεπτότατος δίσκος μάζας $M_1=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=40\text{cm}$ και μία σφαίρα μάζας $M_2=5\text{kg}$ και ακτίνας $R=40\text{cm}$ συνδέονται μεταξύ τους με λεπτότατη άκαμπτη οριζόντια αβαρή ράβδο μήκους $L=1\text{m}$ που διέρχεται από τα κέντρα του δίσκου και της σφαίρας. Η σφαίρα και ο δίσκος μπορούν να κυλίσουν χωρίς να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από την λεπτή ράβδο πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Σε κάποιο σημείο της ράβδου περνάμε ένα δαχτυλίδι που ενώνεται με ένα οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=5000/7\text{ N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου το έχουμε στερεώσει σε ακλόνητο τοίχωμα. Ο άξονας του ελατηρίου και η ράβδος είναι μεταξύ τους κάθετα. Απομακρύνουμε τη ράβδο έτσι ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά Δx και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Παρατηρούμε τότε ότι οι ταχύτητες των κέντρων μάζας του κυλίνδρου και της σφαίρας είναι συνεχώς παράλληλες με την ταχύτητα του δαχτυλιδιού. Να βρεθούν:

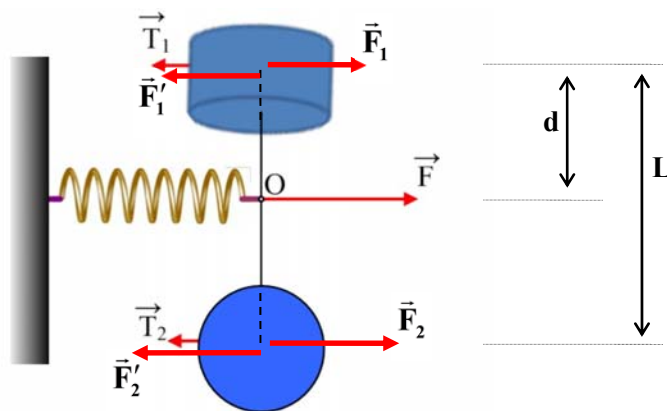


A) Η απόσταση του δαχτυλιδιού από το ένα άκρο της ράβδου όπου βρίσκεται ο δίσκος.

B) Να βρεθεί η περίοδος της κίνησης του δαχτυλιδιού.

Δίνονται για το δίσκο $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$ και για τη σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4MR^2$.

Απάντηση:



ΚΑΤΟΨΗ

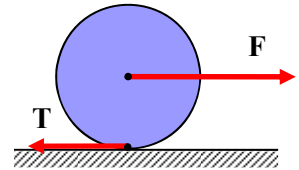
Ας υποθέσουμε ότι το μήκος L της αβαρούς ράβδου συμπίπτει με την απόσταση ανάμεσα στα κέντρα μάζας δίσκου και σφαίρας και d είναι η απόσταση από το κέντρο μάζας του δίσκου μέχρι το δαχτυλίδι σύνδεσης με το ελατήριο.

Η αβαρής ράβδος δέχεται δύναμη $\vec{F} = -\mathbf{k} \cdot \vec{x}$ από το ελατήριο, ή κατά μέτρο $F = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ (όπου $\mathbf{x}$ η παραμόρφωσή του), που την αναγκάζει να κινηθεί, και συμπαρασύρει έτσι τα δύο σώματα (δίσκο και σφαίρα) ασκώ-

ντας τους αντίστοιχα οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2 που έχουν τη φορά της τάσης του ελατηρίου. Οι αντιδράσεις F_1' και F_2' ασκούνται από τα δύο σώματα στα άκρα της ράβδου και ισχύει (αβαρής ράβδος):

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F - F_1' - F_2' = 0 \rightarrow F = F_1' + F_2' \rightarrow \boxed{k \cdot x = F_1 + F_2} \quad (1)$$

Το καθένα τώρα από τα δύο σώματα κυλίζει χωρίς ολίσθηση και αν ονομάσουμε T_1, T_2 τις αντίστοιχες στατικές τριβές, έχουμε (κοινή a_{cm}):



Δίσκος:

$$F_1 - T_1 = M_1 \cdot a_{cm}$$

$$T_1 R = I_1 \cdot a_{γων} \rightarrow T_1 R = 0,5 M_1 \cdot R^2 \cdot a_{cm} / R \rightarrow T_1 = 0,5 M_1 \cdot a_{cm}$$

Συνδυάζοντας:

$$F_1 - 0,5 M_1 \cdot a_{cm} = M_1 \cdot a_{cm} \rightarrow \boxed{F_1 = 1,5 M_1 \cdot a_{cm}} \quad (2)$$

$$\text{και } \boxed{T_1 = F_1 / 3} \quad (3)$$

Σφαίρα:

$$F_2 - T_2 = M_2 \cdot a_{cm}$$

$$T_2 R = I_2 \cdot a_{γων} \rightarrow T_2 R = 0,4 M_2 \cdot R^2 \cdot a_{cm} / R \rightarrow T_2 = 0,4 M_2 \cdot a_{cm}$$

Συνδυάζοντας:

$$F_2 - 0,4 M_2 \cdot a_{cm} = M_2 \cdot a_{cm} \rightarrow \boxed{F_2 = 1,4 M_2 \cdot a_{cm}} \quad (4)$$

$$\text{και } \boxed{T_2 = 2 \cdot F_1 / 7} \quad (5)$$

Από τις (2) και (4) βρίσκουμε σχέση μεταξύ των F_1, F_2 :

$$F_1 / F_2 = 15 \cdot M_1 / (14 \cdot M_2) \rightarrow \boxed{F_1 = 3 \cdot F_2 / 7} \quad (6)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την (1) και κατόπιν τις (3) και (5) εκφράζουμε όλες τις δυνάμεις σε συνάρτηση με την παραμόρφωση x του ελατηρίου:

$$\boxed{F_1 = 0,3 \cdot k \cdot x} \quad \boxed{F_2 = 0,7 \cdot k \cdot x} \quad \boxed{T_1 = 0,1 \cdot k \cdot x} \quad \boxed{T_2 = 0,2 \cdot k \cdot x} \quad (7)$$

Υπολογισμός του d :

Η ράβδος ισορροπεί στρωφικά, επομένως:

$$\Sigma \tau_{(0)} = 0 \rightarrow F_1' \cdot d = F_2' \cdot (L - d) \rightarrow \boxed{d = 0,7 \text{ m}}$$

Υπολογισμός της περιόδου της κίνησης:

Η μεταφορική κίνηση του συστήματος «ράβδος – δίσκος – σφαίρα» είναι ΓΑΤ που γίνεται με τη βοήθεια του ελατηρίου. Πράγματι:

$$\Sigma F = F - T_1 - T_2 = k \cdot x - 0,1 \cdot k \cdot x - 0,2 \cdot k \cdot x = 0,7 \cdot k \cdot x$$

$\Sigma \vec{F}$ και $\vec{x}$ αντίρροπες, άρα ΓΑΤ με $D = 0,7 \cdot k$ και περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{0,7 \cdot k}}$$

Παρατήρηση:

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν εξετάζαμε μόνη της τη μεταφορική κίνηση του δίσκου ή της σφαίρας. Π.χ. για το δίσκο:

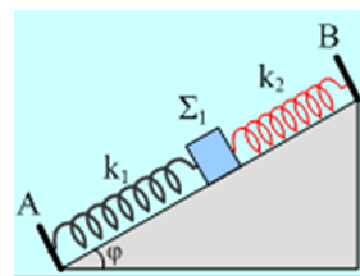
$$\Sigma F = F_1 - T_1 = 0,3 \cdot k \cdot x - 0,1 \cdot k \cdot x = 0,2 \cdot k \cdot x$$

άρα ΓΑΤ με $D_1 = 0,2 \cdot k$ και περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M_1}{D_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{M_1}{0,2 \cdot k}}$$

Μια παραλλαγή με κρούση.

Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\varphi=30^\circ$. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1=100\text{N/m}$ και $k_2=20\text{N/m}$ αντίστοιχα. Ανάμεσα στα δύο ελατήρια κρατάμε χωρίς να δένουμε (με τα ελατήρια) το σώμα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$ στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα). Κάποια στιγμή εκτοξεύουμε το σώμα Σ_1 με αρχική ταχύτητα $v_0=2\text{m/sec}$ με φορά προς το σημείο Α.



i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 .

Κάποια άλλη χρονική στιγμή αφήνουμε ελεύθερο από ύψος $H=0,8\text{m}$ πάνω από την αρχική θέση του σώματος Σ_1 ένα δεύτερο σώμα πάνω στην ίδια κατακόρυφο που περνάει από το σώμα Σ_1 . Ενώ το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην αρχική του θέση και κινείται προς το σημείο Β το δεύτερο σώμα μάζας $m_2=2\text{kg}$ σφηνώνεται ακαριαία πέφτοντας κατακόρυφα στο σώμα Σ_1 .

ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

iii) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών των δύο ελατηρίων σε συνάρτηση με το χρόνο θεωρώντας στιγμή $t=0$ την στιγμή της κρούσης των δύο σωμάτων.

Δίνεται $\sqrt{0,65} = 0,8$

Απάντηση:

i) Αν το σώμα Σ_1 ήταν δεμένο με το ελατήριο σταθεράς K_1 θα ισορροπούσε σε απόσταση x_1 από την αρχική θέση που θα δινόταν από την σχέση $m_1 g \sin \varphi = K_1 x_1$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ θα έχουμε

$$\frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} k_1 A_1^2$$

θα βρούμε μετά τις πράξεις $A_1 = 0,3\text{m}$

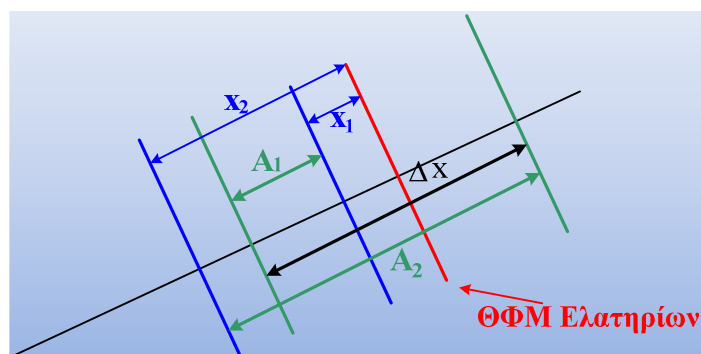
Αν το σώμα Σ_1 ήταν δεμένο με το ελατήριο σταθεράς k_2 θα ισορροπούσε σε απόσταση x_2 από την αρχική θέση που θα δινόταν από την σχέση $m_1 g \sin \varphi = k_2 x_2$ άρα $x_2 = 0,5\text{m}$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ θα έχουμε

$$\frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} k_2 A_2^2$$

θα βρούμε μετά τις πράξεις $A_2 = 0,8\text{m}$

Με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος η απόσταση των θέσεων όπου το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα είναι $\Delta x = 0,7\text{m}$



- ii) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση του δεύτερου σώματος θα έχουμε $m_2 g H = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ θα βρούμε $v_2 = 4 \text{ m/s}$

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ στον άξονα της κίνησης του σώματος Σ_1 θα έχουμε

$$m_1 v_0 - m_2 v_2 \eta \mu \varphi = (m_1 + m_2) v_{\text{συσ}} \text{ θα βρούμε } v_{\text{συσ}} = 0 \text{ m/s.}$$

- iii) Η αλλαγή της μάζας του συστήματος θα επιφέρει και αλλαγή στην θέση ισορροπίας ταλάντωσης για την νέα θέση θα ισχύει

$$(m_1 + m_2) g \eta \mu \varphi = k_1 x_3 \text{ άρα } x_3 = 0,2 \text{ m}$$

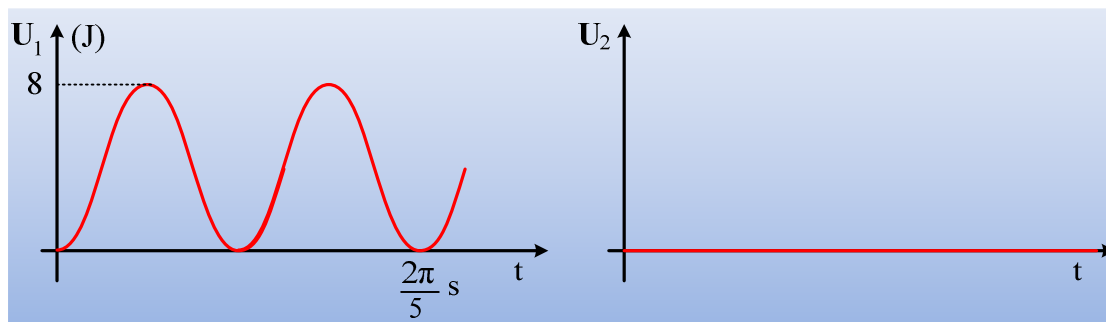
Επειδή την στιγμή της κρούσης το σύστημα δεν έχει ταχύτητα το x_3 θα ταυτίζεται με το νέο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος. Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος θα δίνεται από τη σχέση

$$x = 0,2 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I)}$$

Η ενέργεια του ελατηρίου με σταθερά k_1 θα δίνεται από τη σχέση

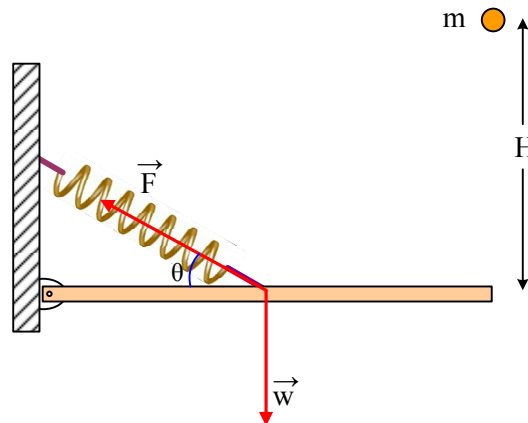
$$U_{\varepsilon \lambda 1} = \frac{1}{2} k_1 x_{\varepsilon \lambda 1}^2 = 50 \left(0,2 - 0,2 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \right)^2$$

Το δεύτερο ελατήριο είναι συνεχώς στο φυσικό μήκος του μιας και η ανώτερη θέση ταλάντωσης του συστήματος ισοδυναμεί με φυσικό μήκος του δεύτερου ελατηρίου. Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών των δύο ελατηρίων θα είναι



Μετά την κρούση το ελατήριο γίνεται κατακόρυφο.

Ομογενής ράβδος μάζας $M=2\text{Kg}$ και μήκους $L=2\text{m}$ ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια άρθρωσης και ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=200\text{N/m}$ όπως στο παρακάτω σχήμα.



Το ελατήριο σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τον ορίζοντα στερεώνεται στο μέσο της ράβδου και η άλλη άκρη του βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με την άρθρωση. Από ύψος H πάνω από ένα άκρο της ράβδου αφήνεται σημειακό σώμα μάζας $m=0,2\text{Kg}$. Μετά την πλαστική κρούση του σώματος m με την ράβδο η ράβδος μόλις και φτάνει να γίνει κατακόρυφη.

- A) Να βρεθεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου- m αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
- B) Το ύψος πάνω από την ράβδο που αφέθηκε το μικρό σώμα m .
- Γ) Πόση ελάχιστη μάζα θα μπορούσαμε να κολλήσουμε χωρίς αρχική ταχύτητα στο άκρο της ράβδου έτσι ώστε η ράβδος μόλις να διαγράψει γωνία 90° ;

Δίνεται το $I_a = \frac{1}{3}ML^2 \cdot \sqrt{3} \approx 1,7$

Απάντηση:

A) Από την συνθήκη ισορροπίας για την ράβδο θα έχουμε $-MgL/2 + F_{\text{ελ}} \mu 30^\circ L/2 = 0$
άρα $F_{\text{ελ}} = 40\text{N}$ έτσι $x_{\text{ελ}} = 0,2\text{m}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτεινούσα το μήκους του ελατηρίου θα πάρουμε $\sin 30^\circ = L/2 / l_0 + x$ άρα $l_0 \approx 1\text{m}$.

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής για το σύστημα μετά την κρούση θα είναι

$$\Delta L/\Delta t = \left| -MgL/2 + F_{\epsilon\lambda}\mu 30^\circ L/2 - mgL \right| = 4N \cdot m.$$

Β) Από την ΑΔΕ για την πτώση του σώματος m θα έχουμε $MgH = \frac{1}{2} M \cdot v^2$ (1)

Από την ΑΔΣ για την κρούση θα πάρουμε $m v L = I_0 \lambda \cdot \omega_{\sigma\upsilon}$ (2)

Από την ΑΔΕ για το σύστημα ράβδο-m μέχρι την τελική θέση θα έχουμε

$$W_B + U_{\epsilon\lambda} + K_{\pi\epsilon\rho} + U_m = U_{\epsilon\lambda'} \rightarrow$$

$$MgL/2 + 1/2 k x_{\epsilon\lambda}^2 + 1/2 I_0 \lambda \cdot \omega_{\sigma\upsilon}^2 + mgL = 1/2 K \cdot x_{\tau\epsilon\lambda}^2$$

$$\text{Το } I_0 \lambda = 1/3 M L^2 + m L^2 = 10,4/3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

το $x_{\tau\epsilon\lambda} = (l_0 + x) \eta \mu 30^\circ + L/2 - l_0$ με αντικατάσταση:

$$2 \cdot 10 \cdot 2/2 + \frac{1}{2} 200 \cdot 0,2^2 + 1/2 \cdot 10,4/3 \cdot \omega_{\sigma\upsilon}^2 + 0,2 \cdot 10 \cdot 2 = 1/2 \cdot 200 (1,2 \cdot \eta \mu 30^\circ + 2/2 - 1)^2$$

$$\text{Θα πάρουμε } \omega_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \sqrt{60/13} \text{ r/sec.}$$

Από της σχέση (2) θα έχουμε $0,2 \cdot v \cdot 2 = 10,4/3 \cdot \sqrt{60/13}$

$$\text{Άρα } v = \sqrt{1040/3} \text{ m/sec.}$$

Από την σχέση (1) θα έχουμε $H = 52/3 \text{ m.}$

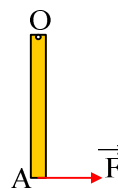
Γ) Αν υποθέσουμε ότι κολλάμε αυτόματα μία μάζα M' στην άκρη της ράβδου χωρίς να της δώσουμε αρχική ταχύτητα η ΑΔΕ θα μας έδινε

$$MgL/2 + 1/2 k x_{\epsilon\lambda}^2 + M' g L = 1/2 K \cdot x_{\tau\epsilon\lambda}^2$$

$$M' = 0,6 \text{ kg}$$

Μεταβλητή ροπή σε ράβδο.

Μία κατακόρυφη ομογενής ράβδος ΟΑ έχει μήκος $L=1\text{m}$ και μάζα $M=4\text{Kg}$ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της Ο. Η ράβδος αρχικά ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Κάποια στιγμή εφαρμόζουμε στο άκρο της ράβδου Α κάθετη στη ράβδο μεταβλητή δύναμη που η σχέση της είναι $F=100-160\theta/\pi$ (S.I.) όπου θ η γωνία που διαγράφει η ράβδος σε σχέση με την αρχική της κατακόρυφη θέση. Η δύναμη καταργείται μόλις η ράβδος έχει διαγράψει γωνία 90° . Να βρεθούν:



- A) Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου για το χρονικό διάστημα που υπήρχε η δύναμη F .
 - B) Θα καταφέρει η ράβδος να κάνει ανακύκλωση;
 - Γ) Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κατάργηση της δύναμης.
- $\pi=3,14$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι δυνάμεις που προκαλούν ροπή στην ράβδο είναι η F και το βάρος της ράβδου. Το μέτρο της ροπής της F συνεχώς μειώνεται εξαιτίας της σχέσης της ενώ το μέτρο της ροπής του βάρους αυξάνει μέχρι την οριζόντια θέση γιατί αυξάνει το απόστημα του βάρους. Για το χρονικό διάστημα όπου ισχύει η σχέση $\tau_F > \tau_W$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στροφικά. Παρατηρώ ότι για

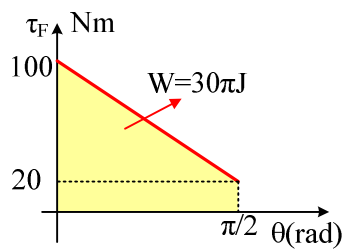
$$\theta = \pi/2 \quad \tau_F = (100 - 160\theta/\pi)L = 20\text{N.m}$$

$$\text{ενώ } \tau_W = M \cdot gL/2 = 20\text{N.m.}$$

Ετσι για οποιαδήποτε γωνία μικρότερη των 90° η κίνηση της ράβδου ήταν επιταχυνόμενη στροφικά με όλο και μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση σε σχέση με την γωνία διαγραφής.

Ετσι η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα συμβεί όταν η ράβδος φτάσει σε οριζόντια θέση γιατί εκεί η δύναμη καταργείται και η ροπή του βάρους από εκεί και μετά επιβραδύνει στροφικά την ράβδο. Η σχέση της ροπής της δύναμης θα είναι $\tau_F = F \cdot L = 100 - 160\theta/\pi$ (S.I.)

Για να βρω την μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα εφαρμόσουμε ΑΔΕ για την κίνηση της ράβδου από την αρχική θέση στην οριζόντια θέση θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το σημείο Α αρχικά. Το έργο της ροπής της δύναμης θα το υπολογίσουμε από την γραφική παράσταση της ροπής της δύναμης με την γωνία διαγραφής θ .



Από την ΑΔΕ

$$W_{\tau F} + U_W = K_{\max} + U_W'$$

$$\text{Άρα } 30\pi + 4 \cdot 10 \cdot 0,5 = K_{\max} + 4 \cdot 10 \cdot 1 \quad \text{άρα } K_{\max} = 74,2J$$

Β) Αν έκανε ανακύκλωση η ράβδος θα έφτανε στο ανώτερό της σημείο έχοντας κινητική ενέργεια. Αν υποθέσουμε ότι φτάνει θα έπρεπε να ισχύει η ΑΔΕ από την κατώτερη θέση στην ανώτερη θα έχουμε

$$W_{\tau F} + U_W = K_{\text{ανωτ}} + U_{W''} \quad \text{άρα}$$

$$30\pi + 4 \cdot 10 \cdot 0,5 = K_{\text{ανωτ}} + 4 \cdot 10 \cdot 1,5$$

$$\text{Άρα } K_{\text{ανωτ}} = 54,2J.$$

Εκτελεί λοιπόν ανακύκλωση η ράβδος αφού έχει κινητική ενέργεια στην ανώτερή της θέση.

Γ) Την μέγιστη κινητική ενέργεια η ράβδος μετά την κατάργηση της δύναμης θα την έχει σε εκείνη τη θέση όπου η δυναμική της ενέργεια είναι ελάχιστη αφού δεν ενεργούν πλέον άλλες δυνάμεις που να παράγουν έργο εκτός του Βάρους. Η θέση αυτή θα είναι φυσικά η αρχική.

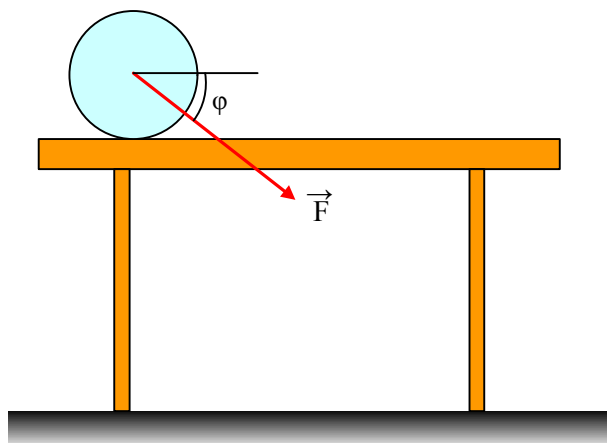
Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση θα έχουμε

$$W_{\tau F} + U_W = K_{\max \text{τελ}} + U_W$$

$$\text{Άρα } K_{\max \text{τελ}} = 30\pi J.$$

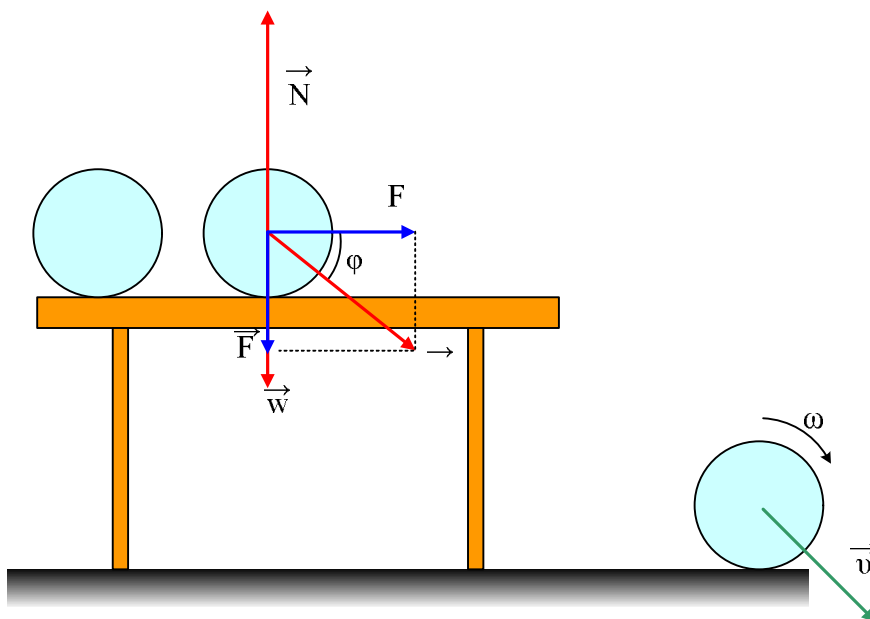
Ο Κύλινδρος κυλίνεται και τελικά χάνει την επαφή.

Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας $M=4\text{Kg}$ ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο τραπέζι ύψους $H=1,25\text{m}$ και μήκους $l=30\text{m}$ και στο ένα άκρο του στην θέση $x=0$. Ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου μεταβλητή δύναμη μέτρου $F=10\sqrt{2}+\sqrt{2}x$ (S.I.) όπου x η οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου πάνω στο τραπέζι. Η δύναμη σχηματίζει γωνία 45° με το οριζόντιο άξονα και έχει φορά προς τα κάτω. Ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο τραπέζι. Τη στιγμή που ο κύλινδρος φτάνει στην άλλη άκρη του τραπεζιού η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα. Να βρεθούν:



- A) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός φτάνει στην άκρη του τραπεζιού
 - B) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός φτάνει στην άκρη του τραπεζιού
 - Γ) Το έργο της ροπής της στατικής τριβής
 - Δ) Η σχέση που πρέπει να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής με την μετατόπιση x κυλίνδρου πάνω στο τραπέζι για να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει ο κύλινδρος.
 - Ε) Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφής του κυλίνδρου προς την ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου όταν αυτός φτάνει στο έδαφος.
- Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς το άξονα περιστροφής του $I_{cm}=0,5MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



- A) Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου και με θετική φορά αυτή της επιτάχυνσης κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα πάρουμε

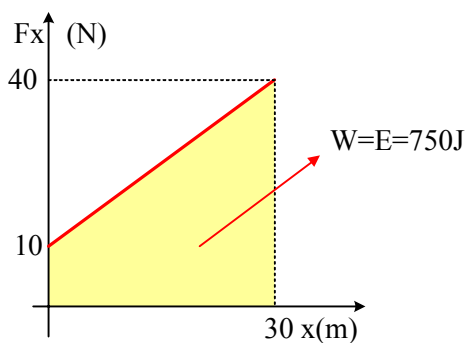
$$Fx - T\sigma\tau = m \cdot a_{cm} \quad \text{άρα} \quad 10 + x - T\sigma\tau = 4a_{cm} \quad (1)$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στρωφικής κίνησης προκύπτει

$$T\sigma\tau \cdot R = 0,5MR^2 \cdot a_{cm} \quad \text{άρα} \quad T\sigma\tau = 2a_{cm} \quad (2)$$

Από (1) και (2) $10 + x - 2a_{cm} = 4a_{cm}$ (S.I.) θα πάρουμε $a_{cm} = 20/3 \text{ m/sec}^2$.

- B) Για την κίνηση του κυλίνδρου πάνω στο τραπέζι το θα εφαρμόσουμε ΑΔΕ και θα πάρουμε $W_F = K_{μετ} + K_{περ}$ (3) αφού το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι 0. Το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί από την παρακάτω γραφική παράσταση και από το εμβαδό θα βρεθεί 750J.

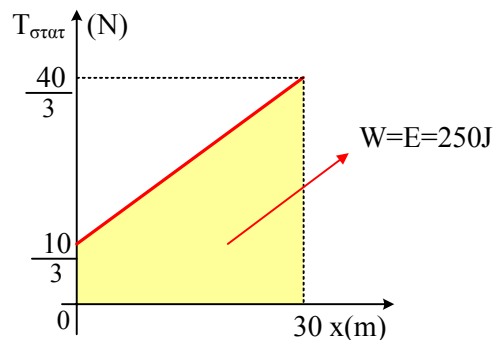


$$\text{Από την (3)} \quad 750 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot U^2 \quad U = 5\sqrt{10} \text{ m/sec.}$$

Γ) Κατά το σχολικό μας βιβλίο το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν. Η στατική τριβή αφαιρεί ενέργεια μέσω του έργου της από την μεταφορική κίνηση και προσδίδει ίση ποσότητα ενέργειας μέσω του έργου της ροπής της στατικής τριβής στην στροφοική κίνηση.

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) θα πάρουμε $T_{\text{στ}} = (10+x)/3$ (S.I.)

Το έργο της λοιπόν θα βρεθεί πάλι από της γραφική παράσταση



Το έργο των 250J το αφαιρεί η στατική τριβή από την μεταφορική κίνηση άρα το έργο που θα δίνει η στατική τριβή μέσω της ροπής της δύναμης της στην στροφοική κίνηση θα είναι $W_{\tau} = 250 \text{ J}$.

Δ) Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο κύλινδρος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$T_{\text{στ}} < \mu_s \cdot N$$

$$\text{αλλά } F_{\psi} + W = N \quad \text{άρα } 10 + x + 40 = N \quad \text{έτσι}^*$$

$$(10+x)/3 < \mu(50+x)$$

$$\text{Αρα θα πρέπει } (10+x)/(150+x) < \mu_s \quad (\text{S.I.})$$

Ε) Μετά το χάσιμο επαφής ο κύλινδρος δέχεται μόνο την επίδραση του βάρους του έτσι θα κάνει ομαλή στροφοική κίνηση δηλαδή το ω θα παραμένει σταθερό. Από την ΔE η ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου στο έδαφος είναι το άθροισμα του $W_F + U_{\text{βάρους}}$

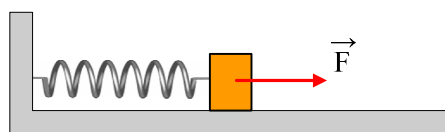
$$\text{Έτσι } K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot (5\sqrt{10})^2 = 250 \text{ J}$$

$$\text{και } K_{\text{ολ.εδαφ}} = W_F + m \cdot g \cdot H = 750 + 50 = 800 \text{ J}$$

$$\text{άρα ο λόγος } \Lambda = 250/800 = 0,3125$$

Μεταβλητή δύναμη και ταλάντωση.

Στο ελεύθερο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθερά $K=400\text{N/m}$ στερεώνεται σώμα μάζας $m=1\text{kg}$, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο. Το σώμα είναι επίσης δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου νήματος, το οποίο βρίσκεται στην προέκταση του άξονα του ελατηρίου. Το σώμα ισορροπεί στην Θ.Φ.Μ.Ε. Στο άλλο άκρο του νήματος ασκείται δύναμη $F=50+300x$ όπου x η απόσταση του σώματος από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Όταν η ταχύτητα του σώματος γίνεται μέγιστη το νήμα σπάει και το σώμα εκτελεί α.α.τ. Να υπολογιστούν :



- Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος μετά το κόψιμο του νήματος.
- Να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μετά το κόψιμο του νήματος.

Δίνεται η σχέση $m\omega^2 x = 2 \sin x \cdot m\omega x$

Απάντηση:

Το σώμα εκτελεί μια επιταχυνόμενη κίνηση με όλο και μειούμενη επιτάχυνση η οποία μπορεί να βγει από τον 2^ο Νεύτωνα:

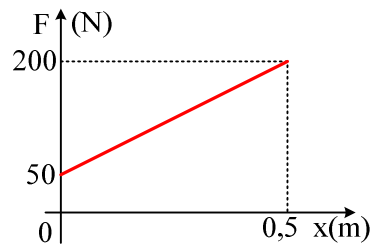
$$\Sigma F = ma \text{ άρα } F - F_{\text{ελ}} = m \cdot a \quad 50 + 300x - 400x = 1 \cdot a \rightarrow$$

$$50 - 100x = a \quad (1)$$

Όταν λοιπόν το $a > 0$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. Όταν το $a < 0$ κίνηση είναι επιβραδυνόμενη. Παρατηρώ λοιπόν ότι τη στη θέση όπου $a = 0$ σταματάει η επιταχυνόμενη και αρχίζει η επιβραδυνόμενη κίνηση. Άρα σε εκείνη τη θέση το σώμα έχει την μέγιστη ταχύτητα.

Από σχέση (1) παίρνουμε $50 - 100x = 0$ άρα $x = 0,5\text{m}$

Το νήμα λοιπόν κόβεται στην θέση $x = 0,5\text{m}$ και το έργο της δύναμης μέχρι αυτή τη θέση μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια του παρακάτω διαγράμματος



$$E=W=(B+b)u/2 =62,5J$$

Το έργο της δύναμης είναι στην ουσία η ενέργεια της ταλάντωσης αφού αν δεν υπήρχε η δύναμη δεν θα υπήρχε και η ταλάντωση (Α.Δ.Ε.)

$$W_F=E_{\text{ταλ}} \quad \text{άρα} \quad 62,5=1/2 \cdot 400 \cdot A^2$$

$$\text{άρα} \quad A = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ m.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από την σχέση:

$$\Delta K/\Delta t = \Sigma F \cdot u = -K \cdot x \cdot u = -KA\eta\mu(\omega t + \phi_0) \cdot \omega \cdot A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) = -\frac{1}{2} K\omega A^2 \eta\mu 2(\omega t + \phi_0)$$

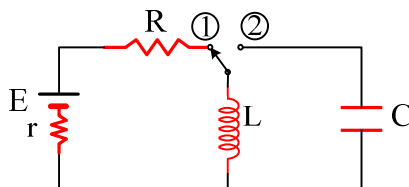
έτσι για να έχουμε μέγιστο ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας θα πρέπει:

$$\eta\mu 2(\omega t + \phi_0) = -1$$

$$\text{άρα} \quad (\Delta K/\Delta t)_{\text{max}} = K\omega A^2/2 = 1250J/s$$

Μέγιστη ισχύς και Ηλεκτρική ταλάντωση

Στο παρακάτω σχήμα ο μεταγωγός βρίσκεται στη θέση 1 μέχρι τη στιγμή που ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο πηνίο να γίνει μέγιστος.



Εκείνη τη στιγμή γυρίζω τον μεταγωγό στη θέση 2 και για χρόνο $(2κ+1)/4$ όπου T η περίοδος ηλεκτρικών ταλαντώσεων του κυκλώματος L - C και $κ=0,1,2,3,4$. Εκείνη τη στιγμή ξαναγυρίζω τον διακόπτη στη θέση 1 για αρκετό χρόνο μέχρι να σταθεροποιηθεί το ρεύμα. Τότε ο μεταγωγός επιστρέφει στην θέση 2.

A) Να βρεθεί η τελική ολική ενέργεια του τελικού κυκλώματος .

B) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις του q και i συνάρτηση με το χρόνο για την περίπτωση $T/4$ και $3T/4$. Δίνεται το $C=10^{-5}F$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε στιγμή στο κύκλωμα με τον διακόπτη στη θέση 1 ισχύει η ΑΔΕ. Αν αυτή γραφεί με την μορφή ισχύων θα έχω:

$P_E = P_{R_{ολ}} + P_L$ άρα $E \cdot I = I^2(R+r) + P_L$ η εξίσωση αυτή είναι 2^{ου} βαθμού ως προς I που θετικός αριθμός. Άρα η διακρίνουσα του είναι μεγαλύτερη ή ίση με το 0.

Ετσι $E^2 - 4(R+r) \cdot P_L \geq 0$ άρα $P_{max} = E^2 / 4R_{ολ}$ Η λύση της δευτεροβάθμιας θα είναι μία και διπλή αφού $\Delta = 0$

$$I = E / 2(R+r) = 10A.$$

Την στιγμή λοιπόν που γυρίζουμε για πρώτη φορά τον διακόπτη στη θέση 2 το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα μέτρου $I = 10 A$. Η ενέργειά του θα είναι $U_B = 1/2 L \cdot I^2 = 0,05J$

Μετά από χρόνο $(2\kappa+1)T/4$ ενέργεια αυτή θα έχει μεταφερθεί στον πυκνωτή και το πηνίο δεν θα διαρρέεται από ρεύμα.

Γυρνώντας τώρα τον διακόπτη στη θέση 1 πάλι η μπαταρία θα αποκαταστήσει το ρεύμα στο κύκλωμα με τελική τιμή έντασης ρεύματος $I_{\text{τελ}}=E/R_{\text{ολ}}=20 \text{ A}$.

Η νέα ενέργεια του πηνίου θα είναι τώρα $U_B'=0,2 \text{ J}$

Ξαναγυρνώντας τώρα τον μεταγωγό στη θέση 2 η συνολική ενέργεια του κυκλώματος θα ήταν τώρα $E_{\text{ολ}}=U_B+U_B'=0,05+0,2=0,25\text{J}$.

B) Η ολική ενέργεια λοιπόν και θα είναι $0,25\text{J}$ και άρα το $Q=\sqrt{5}\cdot 10^{-3}\text{C}$ και το $I=10\sqrt{5}\text{A}$

Αν λύσουμε τη διαφορική εξίσωση $q/C + L\cdot d^2q/dt^2=0$ με αρχικές συνθήκες

i) $t=0, q=10^{-3}\text{C} \quad i=-20\text{A}$

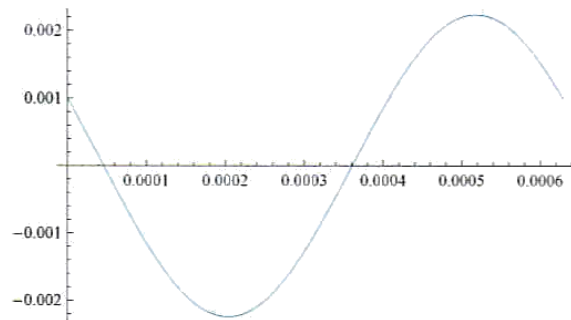
ii) $t=0, q=-10^{-3}\text{C} \quad i=-20\text{A}$

Με τη βοήθεια του mathematica κατασκευάσουμε τις ακριβείς γραφικές παραστάσεις και για τις δύο περιπτώσεις.

`DSolve[{(10^5)*q[t] + 1/(10^3)*q''[t] == 0, q[0] == 1/(10)^3, q'[0] == -20}, q[t], t]`

`{{q[t] ->  $\frac{\cos[10000 t] - 2 \sin[10000 t]}{1000}$ }}`

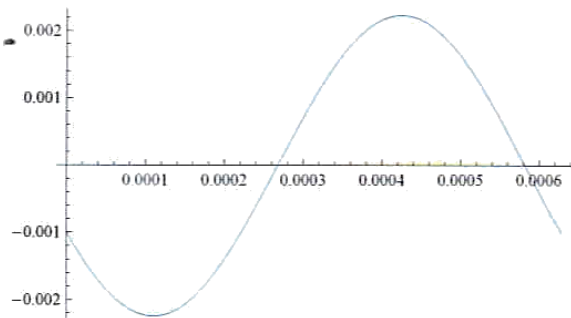
`Plot[ $\frac{\cos[10000 t] - 2 \sin[10000 t]}{1000}$ , {t, 0, 2 Pi / 10000}]`



`DSolve[{(10^5)*q[t] + 1/(10^3)*q''[t] == 0, q[0] == -1/(10)^3, q'[0] == -20}, q[t], t]`

`{{q[t] ->  $\frac{-\cos[10000 t] - 2 \sin[10000 t]}{1000}$ }}`

`Plot[ $\frac{-\cos[10000 t] - 2 \sin[10000 t]}{1000}$ , {t, 0, 2 Pi / 10000}]`



`FindMinimum[ $-\frac{\cos[10000 t] - 2 \sin[10000 t]}{1000}$ , {t, 0, 0001}]`

`{-0.00223607, {t -> 0.0193672}}`

`FindMinimum[ $-\frac{-\cos[10000 t] - 2 \sin[10000 t]}{1000}$ , {t, 0, 0004}]`

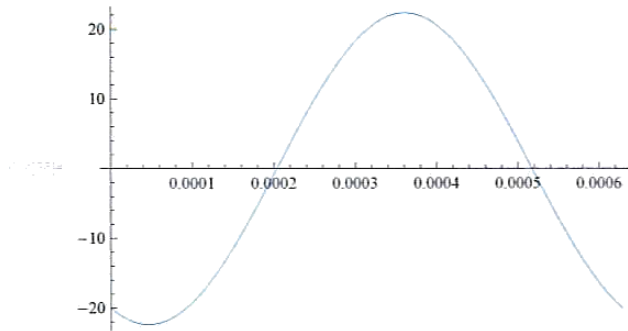
`{-0.00223607, {t -> 0.396894}}`

`q[t] :=  $\frac{\cos[10000 t] - 2 \sin[10000 t]}{1000}$`

`D[q[t], t]`

`$\frac{-20000 \cos[10000 t] - 10000 \sin[10000 t]}{1000}$`

```
In[38]= Plot[ $\frac{-20\,000 \cos[10\,000 t] - 10\,000 \sin[10\,000 t]}{1000}$ , {t, 0, 2 Pi / 10 000}]
```



```
In[46]= FindMinimum[ $-\frac{20\,000 \cos[10\,000 t] - 10\,000 \sin[10\,000 t]}{1000}$ , {t, 0, 0001}]
```

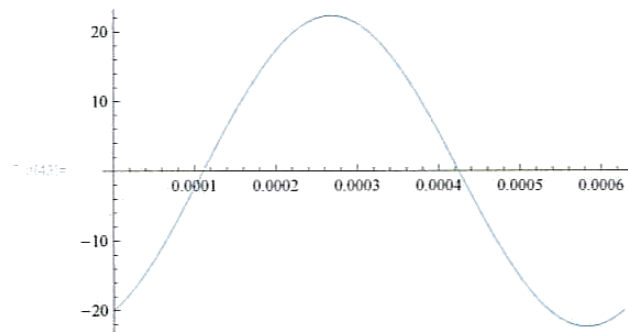
```
Out[46]= {-22.3607, {t -> 0.0562809}}
```

```
In[40]= Q[t] :=  $\frac{-\cos[10\,000 t] - 2 \sin[10\,000 t]}{1000}$ 
```

```
In[41]= D[Q[t], t]
```

```
Out[41]=  $\frac{-20\,000 \cos[10\,000 t] + 10\,000 \sin[10\,000 t]}{1000}$ 
```

```
In[42]= Plot[ $-\frac{20\,000 \cos[10\,000 t] + 10\,000 \sin[10\,000 t]}{1000}$ , {t, 0, 2 Pi / 10 000}]
```

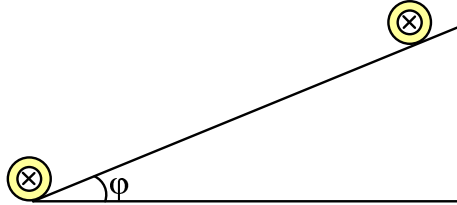


```
In[45]= FindMinimum[ $-\frac{20\,000 \cos[10\,000 t] + 10\,000 \sin[10\,000 t]}{1000}$ , {t, 0, 0005}]
```

```
Out[45]= {-22.3607, {t -> 0.252852}}
```

Κύλιση φορτισμένης σφαίρας.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο όμοιες σφαίρες ακτίνας $R=0,01\text{m}$ μάζας $m=4\cdot 10^{-4}\text{Kg}$ που είναι φορτισμένες με φορτίο $Q_1=4\cdot 10^{-6}\text{C}$ η κάτω σφαίρα και με $Q_2=2\cdot 10^{-8}\text{C}$ η πάνω σφαίρα. Η κάτω σφαίρα είναι στερεωμένη πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi=30^\circ$ από μονωτικό υλικό. Η αρχική απόσταση των δύο κέντρων των σφαιρών είναι $d=0,9\text{m}$.



Η πάνω σφαίρα αφήνεται ελεύθερη και σε όλη την διάρκεια της κίνησής της κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθούν:

- A) Η ελάχιστη απόσταση των δύο κέντρων των δύο σφαιρών αν υποτεθεί ότι το φορτίο των δύο σφαιρών είναι συνεχώς ισοκατανεμημένο στις εξωτερικές επιφάνειες των δύο σφαιρών.
- B) Την ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας όταν η σφαίρα δέχεται κάθετη δύναμη από το κεκλιμένο δάπεδο.
- Γ) Πόσες περιστροφές έχει διαγράψει η σφαίρα μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά.

Υ.Σ.

Τα νούμερα στην άσκηση είναι δανεισμένα από την άσκηση 3.100 του σχολικού βιβλίου της Β Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης των Α.Ιωάννου, Γ Ντάνου, Α.Πήττα και Σ.Ράπτη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Στην αρχική θέση η συνιστώσα του βάρους στον άξονα των x είναι μεγαλύτερη της απωστικής δύναμης μεταξύ των φορτίων για αυτό και η σφαίρα αρχίζει να κυλάει προς τα κάτω και με την βοήθεια της στατικής τριβής που έχει φορά προς τα πάνω. Όσο η απόσταση των δύο φορτίων μικραίνει η απωστική δύναμη μεταξύ των δύο φορτίων αυξάνει με αποτέλεσμα κάποια στιγμή οι δύο δυνάμεις να αποκτήσουν το ίδιο μέτρο. Εκείνη τη στιγμή η στατική τριβή μηδενίζεται και η σφαίρα από εκείνη τη στιγμή και μετά αρχίζει την επιβραδυνόμενη κίνηση της. Η φορά πλέον της στατικής τριβής είναι προς τα κάτω και έτσι μετά από λίγο η σφαίρα θα σταματήσει. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση που θα σταματήσει θα έχουμε

$$K \cdot Q_1 \cdot Q_2 / d + m \cdot g \cdot H_1 = K \cdot Q_1 \cdot Q_2 / x_{\min} + m \cdot g \cdot H_2 \quad \text{μετά από πράξεις } x_{\min} = 0,4\text{m}$$

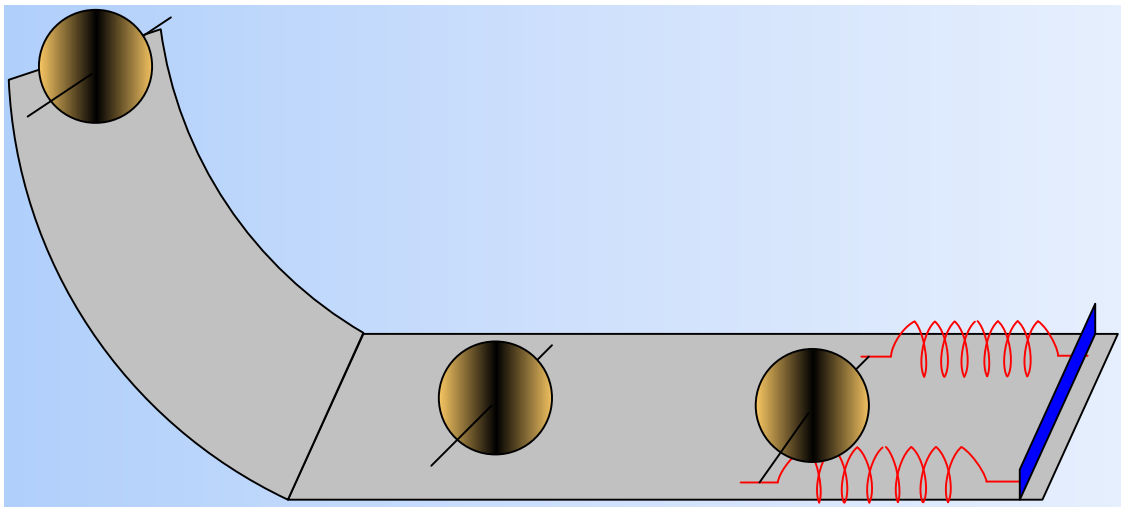
Β) Για να δέχεται η σφαίρα κάθετη δύναμη από το δάπεδο θα πρέπει η στατική τριβή να είναι 0. Άρα το σώμα εκείνη τη στιγμή έχει την μέγιστη κινητική του ενέργεια και θα συμβαίνει στην θέση όπου $m \cdot g \cdot \eta \mu 30^\circ = K \cdot Q_1 \cdot Q_2 / R^2$ άρα $R = 0,6 \text{ m}$. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ

$$K \cdot Q_1 \cdot Q_2 / d + m \cdot g \cdot H_1 = K \cdot Q_1 \cdot Q_2 / R + m \cdot g \cdot H_3 + K_{\max} \quad \text{άρα } K_{\max} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

Γ) Η σφαίρα έχει διανύσει διάστημα $d - x_{\min} = 0,9 - 0,4 = 0,5 \text{ m}$. Οι περιστροφές θα είναι $0,5 / 2\pi \cdot 0,01 = 25/\pi$ περιστροφές.

Κύλιση σε τεταρτοκύκλιο και ταλάντωση

Από την κορυφή ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R=1,95\text{m}$ αφήνουμε ελεύθερη μία σφαίρα μάζας $M=2\text{Kg}$ και ακτίνας $r=0,2\text{m}$. Η σφαίρα έχει περασμένη συμμετρικά, μία αβαρή βελόνα μήκους $L>2r$ η οποία είναι οριζόντια και περνάει από το κέντρο της σφαίρας. Η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο τεταρτοκύκλιο και την στιγμή $t=0$ μπαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και αφού διανύσει οριζόντια απόσταση $S=10\text{m}$ συναντάει χωρίς απώλεια ενέργειας ταυτόχρονα δύο οριζόντια ελατήρια σταθεράς $K=1750\text{N/m}$ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L . Αν σε όλη την διάρκεια της κίνησης της σφαίρας η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει να βρεθούν:



- A) Η μέγιστη συσπίρωση των ελατηρίων
- B) Ο χρόνος που το κέντρο μάζας της σφαίρας κινείται ευθύγραμμα
- Γ) Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για όσο χρόνο η σφαίρα κινείται ευθύγραμμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση στην τελική θα έχουμε

$$Mg(R-r) = \frac{1}{2} \cdot 2K \cdot x_{\max}^2 \text{ μετά τις πράξεις θα βρούμε } x_{\max} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

B) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση στο τεταρτοκύκλιο θα έχουμε

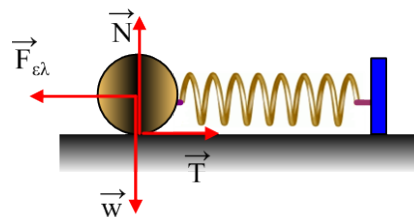
$$Mg(R-r) = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \text{ μετά τις πράξεις θα βρούμε } v=5\text{m/s και } \omega=25\text{r/s}$$

Η κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο είναι ομαλή μεταφορική και ομαλή στρωφική.

Μετά την επαφή με τα ελατήρια θα έχουμε για την στρωφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$TR = \frac{2}{5} MR^2 \alpha_{\omega\omega} \quad (1) \quad 2Kx - T = ma \quad (2)$$

$$\text{Για την ΓΑΤ έχουμε: } \Sigma F = T - 2Kx = -\frac{10}{7} K \cdot x = -2500x$$



Έτσι το κέντρο μάζας το σώματος θα κάνει μέρος ΓΑΤ για όσο χρόνο η βελόνα της σφαίρα βρίσκεται σε επαφή με τα ελατήρια.

$$\text{Ο χρόνος αυτός θα είναι } T/2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{50} \text{ sec.}$$

Ο συνολικός χρόνος της ομαλής κίνησης θα είναι $2S = v \cdot t'$ άρα $t' = 4s$

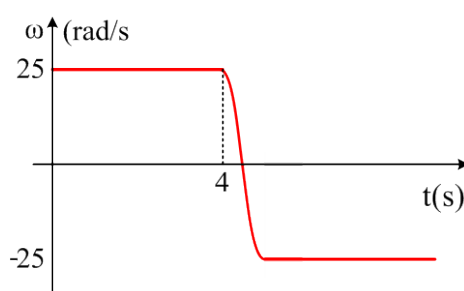
$$\text{Έτσι ο ζητούμενος χρόνος θα είναι } t = \left(4 + \frac{\pi\sqrt{2}}{50}\right) \text{ sec}$$

Γ) Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι $\omega = 25 \text{ rad/s}$ σταθερή για 2s μέχρι η σφαίρα να συναντήσει τα ελατήρια. Μετά την επαφή το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί ΓΑΤ. Έτσι και η γωνιακή ταχύτητα

$$\text{μειώνεται για χρόνο } T/4 \text{ σύμφωνα με τη σχέση } \Omega = 25 \sin \left(\frac{2\pi(t-2)}{T} \right)$$

Μετά τον μηδενισμό της ταχύτητας της σφαίρας η σφαίρα αρχίζει τώρα να περιστρέφεται αριστερόστροφα μέχρι τα ελατήρια να φτάσουν στην θέση φυσικού τους μήκους

$$\Omega = -25 \sin \left(\frac{2\pi(t-2-T/4)}{T} \right) \text{ και για χρόνο } T/4$$



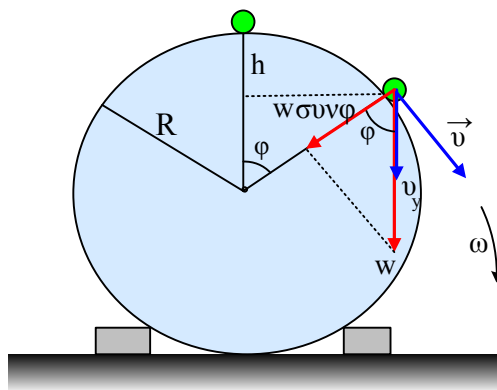
Κύλιση μικρής σφαίρας πάνω σε μεγάλη

Στο ανώτερο σημείο και στην εξωτερική επιφάνεια μιας ακλόνητης σφαίρας ακτίνας $R=17\text{m}$ που είναι στερεωμένη στο έδαφος βρίσκεται μικρότερη σφαίρα ακτίνας $r=10\text{cm}$. Κάποια στιγμή η μικρή σφαίρα αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην μεγάλη σφαίρα. Να βρεθεί η γωνιακή μετατόπιση της μικρής σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Δίνονται : Αν $\sin\varphi=10/17$ τότε $\varphi=0,3\pi$ rad. Για τη μικρή σφαίρα $I_{\text{cm}}=2/5 m r^2$
Να θεωρηθεί ότι το $R \gg r$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Την στιγμή που η μικρή σφαίρα θα χάσει την επαφή της με την μεγάλη σφαίρα η μοναδική δύναμη που θα ασκείται στην μικρή σφαίρα θα είναι η δύναμη του βάρους που η συνιστώσα προς το κέντρο της μεγάλης σφαίρα θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Άρα $mg\sin\varphi=m\cdot U^2/R$ (1)



Από την ΑΔΕ για τις θέσεις (Α) και (Β) θα πάρουμε $m\cdot g\cdot h=1/2mU^2 + 1/2I\omega^2$ (2)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\sin\varphi=(R-h)/R$ (3) Από την (2) και (3) θα βρούμε $U=\sqrt{10gR(1-\sin\varphi)/7}$ (4) Με την βοήθεια της (4) και της (1) θα βρούμε ότι

$$\sin\varphi=10/17$$

Στην διάρκεια της επαφής των δύο σφαιρών η γωνία που διέγραψε η μικρή σφαίρα πάνω στην μεγάλη θα είναι $\theta_1=R\cdot\varphi/r=17\cdot 0,3\pi/0,1=51\pi=160,14\text{rad}$

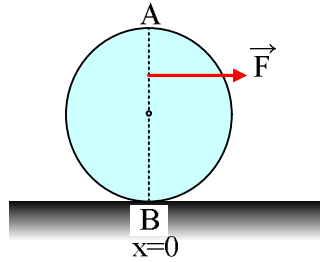
Μετά το χάσιμο της επαφής των δύο σφαιρών η μικρή σφαίρα κινείται πλέον μόνο με την επίδραση του βάρους της. Έτσι δεν μπορεί να υπάρξει αλλαγή της γωνιακής ταχύτητας της μικρής σφαίρας μιας και το βάρος ασκείται στο κέντρο της μικρής σφαίρας. Η κίνηση τώρα της μικρής σφαίρα θα είναι επιταχυνόμενη στον άξονα $\Psi\Psi'$, ομαλή στον XX' , θα εκτελεί δε και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω την γωνιακή ταχύτητα που είχε την στιγμή του χάσιμου της επαφής των δύο σφαιρών.

Ετσι στον ΨΨ' $2R-h = U\eta\mu\phi t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$ (5) Από την (3) $H=7m$ από την (4)
 $U=10m/sec$ το $\eta\mu\theta=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}=0,8$ Άρα η (5) θα γίνει $5t_2^2+8t_2^2-27=0$ άρα $t_2=$
 $1,66sec$ Άρα $\theta_2=\omega.t_2=U/r.t_2=10/0,1.1,66=166rad$.

Άρα η συνολική γωνιακή μετατόπιση της μικρής σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος
θα είναι $\theta_{ολ}=160,14+166=326,14 rad$

Κύλιση κυλίνδρου, χωρίς τριβές.

Ένας συμπαγής και ομογενής κύλινδρος ακτίνας $R=0,3\text{m}$ και μάζας $m=4\text{kg}$ ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο AB και σε απόσταση ψ από το κατώτερο σημείο B εφαρμόζουμε την στιγμή $t=0$ μεταβλητή οριζόντια δύναμη $F=20 + 8x$ (S.I) όπου x η οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου από το σημείο $x=0$ όπου βρίσκεται την χρονική στιγμή $t=0$. Ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



Να βρεθούν:

- A) Η κατακόρυφη απόσταση ψ
- B) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στη θέση $x=10\text{m}$
- Γ) Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι $U_{\text{cm}}=20\text{m/sec}$.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε λείο επίπεδο έτσι από τους νόμους για την μεταφορική και την στροφική κίνηση θα πάρουμε

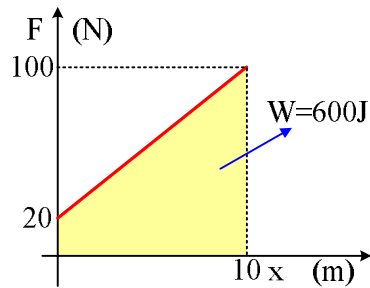
$$F=M \cdot a_{\text{cm}} \quad (1) \quad F(\psi-R)=0,5M \cdot R^2 \cdot a_{\text{γων}} \quad (2)$$

Αν διαιρέσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα πάρουμε $\psi-R=R/2$ άρα $\psi=0,45\text{m}$

B) Από την ΑΔΕ για την κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε $W_{\text{Fολ}}=K_{\text{περ}}+K_{\text{μετ}} \quad (3)$

Το έργο της δύναμης για την μεταφορική κίνηση θα δίνεται από τη σχέση $dW_{\text{Fμετ}}=F \cdot dx$ ενώ το έργο της ροπής της δύναμης για περιστροφική κίνηση θα είναι $dW_{\text{ροπής}}=FR \cdot d\phi=F(\psi-R)/R dx=Fdx/2$ δηλαδή το μισό του παραπάνω έργου.

Το έργο της μεταβλητής δύναμης για την μεταφορική κίνηση θα βρεθεί από το περικλειόμενο εμβαδό του παρακάτω σχήματος

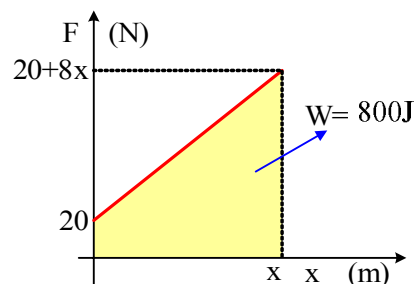


Από την (3) $W_{ολ}=1/2M.U_{cm}^2 + 1/2I\omega^2$ με αντικατάσταση θα έχουμε $600+300=2U^2 + U^2$ άρα $U_{cm}=10\sqrt{3}m/sec$.

Γ) Αν εφαρμόσουμε την ΑΔΕ μέχρι το σώμα να αποκτήσει ταχύτητα $U_{cm}=20m/sec$ θα έχουμε

$$W_{ολ}=1/2M.U_{cm}^2 + 1/2I\omega^2 \quad \text{Άρα } W_{ολ}=1/2M.U_{cm}^2 + 1/4MR^2\omega^2 \quad \text{άρα } W_{Fολ}=1200J$$

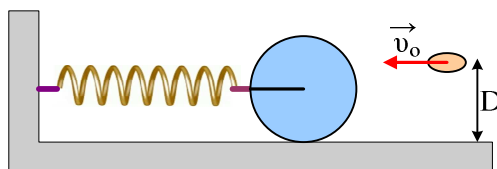
Κάνοντας και πάλι τη γραφική παράσταση της δύναμης με τη μετατόπιση x και θεωρώντας ότι το έργο κατά την μεταφορική κίνηση είναι διπλάσιο του έργου της ροπής της δύναμης θα πρέπει η γραφική παράσταση να μας δώσει εμβαδό $W_{Fμετ}=800J$



$800=(20+20+8x)x/2$ θα καταλήξουμε στην δευτεροβάθμια $x^2+5x-200=0$ με δεκτή λύση την $x=11,86m$. Από την σχέση (1) θα έχουμε $20+8.x=4a_{cm}$ άρα $a_{cm}=28,72m/sec^2$

Κρούση – Ταλάντωση - Κύλιση

Η ξύλινη σφαίρα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M=1\text{ kg}$ και ακτίνα $R=0,1\text{m}$. Η σφαίρα είναι δεμένη με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=14000\text{N/m}$ στο κέντρο της κατά τέτοιο τρόπο ώστε η σφαίρα να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.



Σημειακό βλήμα έχει μάζα $m=0,1\text{kg}$ και κινείται με οριζόντια ταχύτητα $U_0=200\text{m/sec}$ σε απόσταση $D>R$ πάνω από οριζόντιο έδαφος. Την χρονική στιγμή $t=0$ το βλήμα διέρχεται ακαρικαία μέσα από την σφαίρα και εξέρχεται από αυτή με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $U_0/2$. Το αποτέλεσμα της κρούσης αυτής είναι η σφαίρα να αρχίσει αυτόματα μετά την κρούση να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθούν:

- Α) Η απόσταση D , αν υποθέσουμε ότι δεν θα αναπτυχθεί στατική τριβή από το έδαφος στην διάρκεια της κρούσης
- Β) Το είδος της κίνησης του κέντρου μάζας της σφαίρας καθώς και η περίοδος της κίνησης του κέντρου μάζας.
- Γ) Το ποσό ενέργειας που «χάθηκε» κατά την παραπάνω κρούση.
- Δ) Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής της σφαίρας.

Για την σφαίρα $I_{cm}=0,4M.R^2$ και $\eta\mu 2\phi=2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Επειδή η σφαίρα μετά την κρούση κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει να ισχύει η σχέση $U_{cm}=\omega.R$ (1)

Με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε

$$m.U_0 = M.U_{cm} + m.U_0/2 \quad \text{άρα} \quad U_{cm}=10\text{m/sec} \quad \text{και από την σχέση (1)} \quad \omega=100\text{r/sec}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΣ θα έχουμε

$$m.U_0(D-R)=I.\omega + m.U_0(D-R)/2 \quad \text{άρα} \quad D=0,14\text{m}$$

Β) Για την περιστροφική κίνηση της σφαίρας παίρνουμε την σχέση $T_{στ}.R = 0,4.M.R^2.a_{γων}$
άρα $T_{στ} = 0,4M.a_{cm}$ (2)

Για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας $F_{ελ} - T_{στ} = M.a_{cm}$ (3)

Από την (2) και (3) $T_{στ} = 2Kx/7$ (4)

Θεωρώντας θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας

$\Sigma F = T_{στ} - F_{ελ} = 2Kx/7 - Kx = -5Kx/7$ άρα η κίνηση του κέντρου μάζας είναι γ.α.τ. με
 $D = 5K/7 = 10000N/m$ άρα η περίοδος της κίνησης θα είναι $T = 2\pi\sqrt{M/D} = \pi/50 \text{ sec}$

Γ) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κρούση θα έχουμε

$\frac{1}{2}.m.U_o^2 = \frac{1}{2}.m(U_o/2)^2 + \frac{1}{2}.M.U_{cm}^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2 + Q_{kr}$ άρα μετά από πράξεις $Q_{kr} = 1430J$

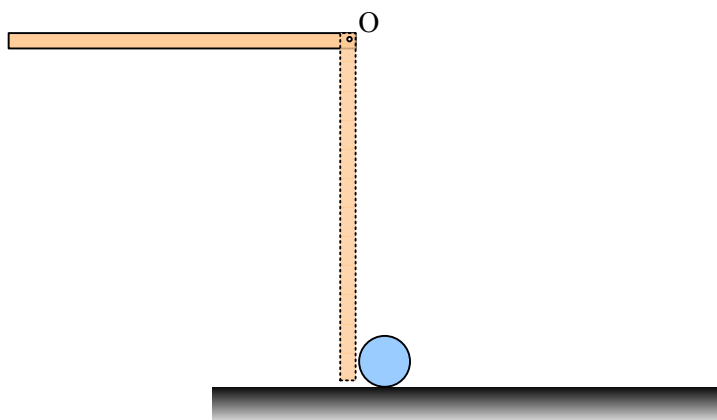
Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής δίνεται από την σχέση

$\Delta K_{περ}/\Delta t = \Sigma \tau.\omega = T_{στ}.R.\omega = -2K.x.U/7 = -2K.A.\eta\mu\omega t.\omega.A.\sigmaυν\omega t/7 = -K.A^2.\omega.\eta\mu 2\omega t/7$

$U_{cm} = \omega.A$ άρα $A = 0,1m$ άρα $\Delta K_{περmax}/\Delta t = 2000J/sec.$

Κρούση ράβδου και ολίσθηση σφαίρας

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος έχει μάζα $M_1=3\text{kg}$ και μήκος $L=1,2\text{m}$ αφήνεται από οριζόντια θέση και συγκρούεται αφού διαγράψει γωνία 90° με ακίνητη σφαίρα μάζας $M_2=5\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$. Το καρφί όπου είναι στερεωμένο το ένα άκρο της ράβδου απέχει απόσταση $H=1,3\text{m}$ από το οριζόντιο έδαφος όπου ισορροπεί η σφαίρα.



Μετά την κρούση της ράβδου με την σφαίρα η ράβδος σταματάει. Η σφαίρα αρχικά αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σφαίρας και δαπέδου είναι $\mu=0,2$. Να βρεθούν:

- A) Ο χρόνος που θα χρειασθεί μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση για τη σφαίρα. Ποια η τελική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας;
- B) Η τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας
- Γ) Η απώλεια ενέργειας στην διάρκεια του παραπάνω φαινομένου.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας δίνεται από την σχέση $I_2=0,4.M_2.R^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής της $I_1=1/3.M_1.L^2$.

Η σφαίρα να θεωρηθεί σημειακή την στιγμή της κρούσης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

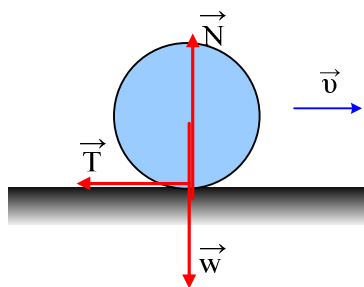
A) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση της ράβδου

$$M_1 \cdot g \cdot L/2 = 1/2 \cdot I_1 \cdot \omega_1^2 \quad \text{άρα } \omega_1 = 5r/s$$

Για την κρούση της ράβδου με την σφαίρα που θα τη θεωρήσουμε σημειακή μάζα θα έχουμε από την ΑΔΣ

$$I_1 \cdot \omega_1 = M_2 \cdot u \cdot L \quad \text{άρα } u = 1,2 \text{ m/sec.}$$

Έτσι η σφαίρα αρχίζει στιγμιαία να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση αφού το στιγμιαίο κτύπημα από την ράβδο έγινε στο κέντρο της σφαίρας. Έτσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης η οποία θα επιβραδύνει την μεταφορική κίνηση και θα προκαλεί ροπή για να επιταχύνει την στροφική κίνηση μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση.



Από τους νόμους της κίνησης θα έχουμε για την μεταφορική

$$T = M_2 \cdot a \quad \text{άρα } \mu \cdot M_2 \cdot g = M_2 \cdot a \quad \text{άρα } a = 2 \text{ m/sec}^2.$$

Για την στροφική κίνηση

$$T \cdot R = 0,4 \cdot M_2 \cdot R^2 \cdot \alpha$$

$$\text{άρα } \mu \cdot M_2 \cdot g \cdot R = 0,4 \cdot M_2 \cdot R^2 \cdot \alpha \quad \text{άρα}$$

$$\alpha = 50 \text{ rad/sec}^2.$$

Η καθαρή κύλιση θα ξεκινήσει όταν η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της σφαίρας γίνει ίση με το 0. Άρα $U_{\text{μετ}} = U_{\text{περ}}$ άρα $U - at = \alpha \cdot t \cdot R$ ο χρόνος θα βρεθεί $t = 6/35 \text{ s}$ και $u_{\text{μετ}} = 6/7 \text{ m/sec}$.

B) Όταν αρχίσει η καθαρή κύλιση το σημείο επαφής της σφαίρας με το δάπεδο έχει συνολική ταχύτητα 0. Άρα δεν θα υπάρχει τριβή άρα η

σφαίρα θα εκτελεί ομαλή στροφική και μεταφορική κίνηση. Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας θα είναι:

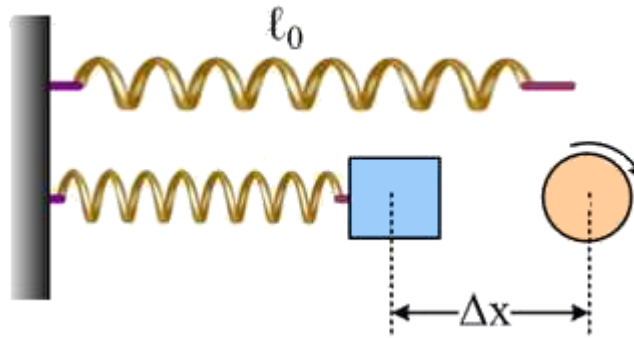
$$K_{ολ} = K_{στρ} + K_{μετ} = \frac{1}{2} M_2 \cdot U_{μετ}^2 + \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_{τελ}^2 = 18/7 \text{ J}$$

Γ) Ενέργεια έχει χαθεί στην διάρκεια της κρούσης αλλά και μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση της σφαίρας. Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική μέχρι και την τελική κατάσταση του συστήματος των σωμάτων θα έχουμε

$$U_{ωράβδου} = K_{ολσφαίρας} + \Delta E \quad \text{άρα} \quad \Delta E = 108/7 \text{ J}$$

Κρούση περιστροφή και ταλάντωση

Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλου μήκους και στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου του παρακάτω σχήματος μία σφαίρα μάζας $M_2=3\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ εκτελεί ελεύθερη ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{r/sec}$.



Συσπειρώνουμε το ελατήριο σταθεράς K κατά Δx και δένουμε στο ελατήριο κύβο μάζας $M_1=1\text{Kg}$ που έχει το μήκος της ακμής του ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας. Την στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα ελατηρίου-κύβου. Η κρούση του κύβου με την σφαίρα που ακολουθεί είναι κεντρική - ελαστική και διαρκεί ελάχιστα. Μετά την κρούση ο χρόνος που χρειάζεται ο κύβος να κάνει μία πλήρη ταλάντωση είναι ίσος με το χρόνο που χρειάζεται η σφαίρα να κάνει μία πλήρη περιστροφή. Η σφαίρα μετά την κρούση κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει.

- A) Να δοθεί η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του κύβου από την θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά.
- B) Την εξίσωση που θα μας έδινε την απόσταση των δύο κέντρων μάζας των δύο σωμάτων μετά την κρούση τους.
- Γ) Την ταχύτητα ενός σημείου A της σφαίρας, που την στιγμή της κρούσης βρισκόταν σε επαφή με το έδαφος, την στιγμή που ο κύβος φτάνει για πρώτη φορά στην θέση ισορροπίας μετά την κρούση.

Απάντηση:

Α) Για να αρχίσει η σφαίρα να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο θα πρέπει να ισχύει η σχέση $U_{cm} = U_{περ}$ άρα $U_2' = \omega_0 \cdot R = 2 \text{ m/sec}$.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας θα προέλθει από την ελαστική κρούση με τον κύβο. Η κρούση είναι κεντρική έτσι οι δυνάμεις την στιγμή της κρούσης δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας να μην αλλάξει. Με τη βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης θα βρούμε την ταχύτητα του κύβου πριν την κρούση

$$U_2' = 2M_1 \cdot U_1 / (M_1 + M_2) \quad \text{άρα } U_1 = 4 \text{ m/sec.}$$

Η περίοδος της περιστροφικής κίνησης της σφαίρας μετά την κρούση με την περίοδο ταλάντωσης του κύβου είναι ίσες.

$$\text{Έτσι } T_{\text{κύβου}} = T_{\text{σφαίρας}} \quad \text{άρα } 2\pi\sqrt{M_1/K} = 2\pi/\omega_0 \quad \text{άρα } K = 100 \text{ N/m}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την αρχική κίνηση του κύβου θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot A_1^2 = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot U_1^2 \quad \text{άρα } A_1 = 0,4 \text{ m}$$

Μετά την κρούση η ταχύτητα του κύβου θα βρεθεί με την βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης

$$U_1' = (M_1 - M_2) \cdot U_1 / (M_1 + M_2) = -2 \text{ m/sec}$$

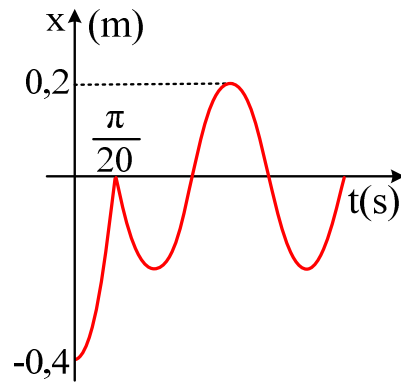
ο κύβος δηλαδή γυρίζει προς τα πίσω.

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη γιατί ο κύβος βρίσκεται στη Θ.Ι.Τ.

Από την σχέση $U_{\max} = \omega \cdot A_2$ θα βρούμε το $A_2 = 0,2 \text{ m}$

Ο κύβος λοιπόν θα εκτελέσει αρχικά ένα μέρος ΓΑΤ με πλάτος A_1 και στην συνέχεια μία δεύτερη ΓΑΤ με πλάτος A_2 . Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$x = \begin{cases} 0,4 \eta\mu(10t + 3\pi/2) & 0 \leq t \leq \pi/20 \\ 0,2 \eta\mu[10(t - \pi/20) + \pi] & t \geq \pi/20 \end{cases} \quad (\text{S.I.})$$



Β) Η σφαίρα θα εκτελεί ομαλή μεταφορική και στροφική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $U_2' = 2\text{ m/s}$. Το διάστημα που θα διανύει η σφαίρα θα δίνεται από το νόμο του διαστήματος στη ομαλή μεταφορική κίνηση $S_2 = U_2' \cdot t' = 2t'$ όπου $t' = t - \pi/20$ (S.I.)

Η απόσταση των δύο κέντρων μάζας των δύο σωμάτων θα δίνεται από την σχέση

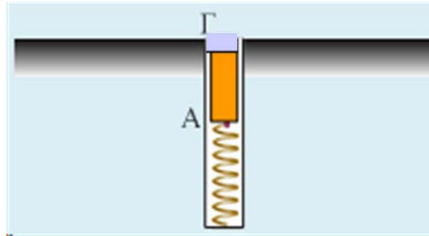
$$D = 2R + S_2 - X = 0,4 + 2(t - \pi/20) - 0,2\eta\mu[10(t - \pi/20) + \pi] \quad \text{με } t \geq \pi/20 \quad (\text{S.I.})$$

Γ) Για να φτάσει ο κύβος στην θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά θα χρειασθεί χρόνος $T/2$. Στο ίδιο χρόνο το κατώτερο σημείο Α της σφαίρα θα γίνει ανώτερο γιατί $T_{\text{κυβου}} = T_{\text{σφαιρας}}$

Έτσι η ταχύτητα του σημείου Α θα είναι $U_A = 2U_{\text{cm}} = 4\text{ m/sec}$.

Κρούση και περιστροφή στον αέρα.

Ανοίγουμε μία κατακόρυφη οπή βάθους 50cm στο έδαφος. Μέσα στην οπή τοποθετούμε ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθερά $K=400\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $L_0=50\text{cm}$. Μία ράβδος ΑΓ με μήκος $l=20\text{cm}$ έχει μάζα $M=1\text{kg}$. Με το άκρο Α της ράβδου πιέζουμε το ελατήριο έτσι ώστε να συμπιέσουμε το ελατήριο κατά $x=7/32\text{m}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αφήνουμε την ράβδο ελεύθερη και όταν η ράβδος φτάσει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς της ένα βλήμα μάζας $m=0,25\text{kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u=5\pi\text{ m/s}$ συγκρούεται με το άκρο Α της ράβδου. Μετά την κρούση ο βλήμα πέφτει πάνω στο ελατήριο και κολλάει πάνω σε αυτό χωρίς απώλεια ενέργειας.

- Α) Να αποδείξετε ότι η κρούση είναι ελαστική
- Β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου που θα προκληθεί από την πτώση του βλήματος πάνω σε αυτό
- Γ) Να αποδείξετε ότι η ράβδος πέφτοντας θα χτυπήσει στο έδαφος έχοντας ένα μόνο σημείο επαφής με αυτό.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου $I_{cm}=ML^2/12$

Απάντηση:

Α) Για να χτυπήσει το βλήμα στο κατακόρυφο ελατήριο θα πρέπει μετά την κρούση με την ράβδο να κάνει ελεύθερη πτώση.

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ και ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε

$$m \cdot u = M u_{cm} \quad \text{άρα } u_{cm} = 1,25\pi \text{ m/s}$$

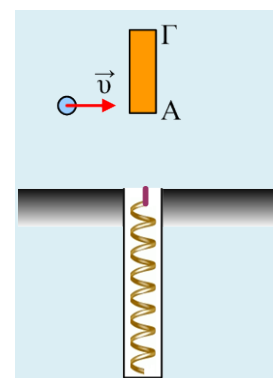
$$m u \cdot L/2 = I \omega \quad \text{άρα } \omega = 37,5\pi \text{ r/s}$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει απώλεια ενέργειας κατά την κρούση τότε με την βοήθεια της ΑΔΕ θα είχαμε:

$$\frac{1}{2} m \cdot u^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + Q_{kr} \quad \text{μετά από πράξεις το } Q_{kr}=0 \quad \text{άρα η κρούση είναι ελαστική.}$$

Β) Αν πάρουμε ΑΔΕ για την άνοδο της ράβδου θα έχουμε

$$\frac{1}{2} K \cdot x^2 = M g H_{cm} \quad \text{θα βρούμε ότι το ύψος που ανέβηκε το κέντρο μάζας της ράβδου είναι } H_{cm}=0,8\text{m, πάνω από το έδαφος.}$$



Το βλήμα την στιγμή της κρούσης θα βρίσκεται σε $H_{\beta}=0,7\text{m}$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πρώτη του βλήματος και μέχρι την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου θα έχουμε

$$mg(H_{\beta}+x_{\max}) = \frac{1}{2} K x_{\max}^2 \text{ θα βρούμε το } x_{\max}=0,1\text{m}$$

Γ) Η ράβδος μετά την κρούση της με το βλήμα εκτελεί μία ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας της και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της εκτελεί μία οριζόντια βολή προς τα κάτω. Όταν η ράβδος θα χτυπήσει στο έδαφος ή θα κτυπήσει ένα της σημείο ή θα χτυπήσουν όλα της τα σημεία πάνω στο έδαφος. Για να συμβεί το δεύτερο θα πρέπει η γωνία που θα διαγράψει κατά την πτώση της η ράβδος να δίνεται από τη σχέση $\theta = \kappa\pi + \pi/2$ (1) με το κ να είναι ακέραιος αριθμός.

Αν υποθέσουμε ότι τελικά θα χτυπήσει όλη η ράβδος ταυτόχρονα στο έδαφος θα έπρεπε το κ να είναι ακέραιος.

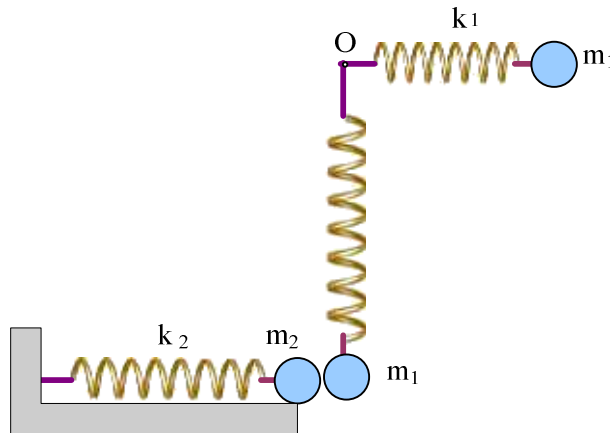
Από την ελεύθερη πτώση του κέντρου μάζας της ράβδου $H_{\text{cm}} = \frac{1}{2} g t^2$ $t=0,4\text{s}$.

Από την ομαλή στροφική κίνηση της ράβδου $\theta = \omega t = 37,5\pi \cdot 0,4 = 15\pi \text{ rad}$ και από την σχέση (1) $\kappa=14,5$.

Έτσι η ράβδος θα χτυπήσει τελικά με ένα της μόνο σημείο στο δάπεδο.

Κρούση και πάλι κρούση χωρίς τέλος

Το ελατήριο του παρακάτω σχήματος έχει σταθερά $K_1=100\text{N/m}$ έχει το φυσικό μήκος $L_0=0,2\text{m}$ και το κρατάμε σε οριζόντια θέση έχοντας στερεώσει στην άκρη του ένα σώμα μάζας $m_1=1\text{Kg}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο.



Αφήνουμε το σώμα m_1 ελεύθερο και όταν φτάσει στην χαμηλότερη θέση του με το ελατήριο να είναι κατακόρυφο συγκρούεται μετωπικά κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο ακίνητο σώμα μάζας $m_2=1\text{Kg}$. Το σώμα μάζας m_2 ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο με οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K_2=25\text{N/m}$. Δίνεται ότι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με το μήκος του ελατηρίου στη θέση αυτή.

Να βρεθούν :

- A) Η επιμήκυνση του πρώτου ελατηρίου την στιγμή της πρώτης κρούσης καθώς και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 εκείνη την στιγμή.
- B) Τι είδους κίνηση θα κάνει το κάθε σώμα μετά την πρώτη ελαστική κρούση τους. Πόσες ελαστικές κρούσεις θα γίνουν ανάμεσα στα δύο σώματα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση και μέχρι την τελική θέση θα έχουμε:

$$m_1 \cdot g \cdot (L_0 + x_1) = \frac{1}{2} K_1 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 \quad (1)$$

Στην κατώτερη θέση του σώματος m_1 και με την βοήθεια της κεντρομόλου δύναμης θα έχουμε

$$K_1 \cdot x_1 - m_1 \cdot g = m_1 \cdot v^2 / (L_0 + x_1) \quad (2)$$

από τις σχέσεις (1) και (2) θα βρεθούν $x_1=0,2\text{m}$ και $v=2\text{m/sec}$.

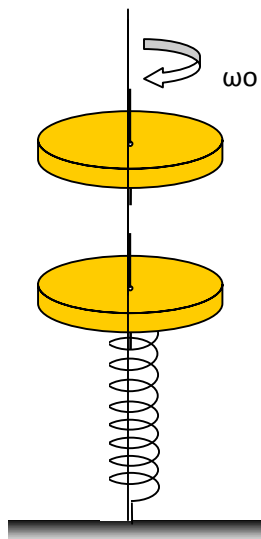
- B) Οι δύο σφαίρες έχουν ίσες μάζες και συγκρούονται ελαστικά άρα θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι η m_1 θα σταματήσει στιγμιαία ενώ η σφαίρα με μάζα m_2 θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου $u=2\text{m/sec}$. Η θέση ισορροπίας του σώματος m_1 θα βρεθεί από την σχέση $m_1 \cdot g = K_1 \cdot x_2$ άρα $x_2=0,1\text{m}$. Το ελατήριο όμως εκείνη την στιγμή είναι επιμηκυσμένο κατά $x_1=0,2\text{m}$. Το m_1 δηλαδή βρίσκεται σε διαφορετική θέση από την θέση ισορροπίας του και μάλιστα δεν έχει ταχύτητα. Άρα θα βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης δηλαδή σε θέση $\pm A_1$ με $A_1 = x_1 - x_2 = 0,1\text{m}$. Η περίοδος της ταλάντωσης της σφαίρα m_1 θα είναι $T_1 = 2\pi \sqrt{m_1 / K_1} = \pi/5 \text{ sec}$.

Η σφαίρα με μάζα m_2 θα εκτελέσει επίσης γ.α.τ. με μέγιστη ταχύτητα:
 $U_{\max}=2\text{m/sec}$ περίοδο $T_2=2\pi\sqrt{m_2/K_2}=2\pi/5\text{sec}$ και πλάτος $A_2=U_{\max}/\omega=0,4\text{m}$.

Παρατηρώ λοιπόν ότι η περίοδος του δεύτερου σώματος είναι διπλάσια από αυτήν του πρώτου σώματος. Έτσι όταν το πρώτο σώμα θα έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση και θα ξαναβρεθεί στην ακραία θέση της ταλάντωσής του το δεύτερο σώμα θα ξαναβρεθεί στη θέση ισορροπίας του γυρνώντας προς τα πίσω. Έτσι τα σώματα θα ξανασυγκρουστούν και θα ανταλλάξουν και πάλι ταχύτητες. Το δεύτερο σώμα θα σταματήσει ενώ το πρώτο σώμα θα πάρει πάλι το δρόμο της επιστροφής του για φτάσει και πάλι στην θέση από όπου το αφήσαμε αρχικά γιατί δεν έχει χαθεί καθόλου ενέργεια από το σύστημα..... Το φαινόμενο λοιπόν θα επαναλαμβάνεται περιοδικά άρα θα γίνουν άπειρες συνολικά κρούσεις.....

Και ζήσαν οι σφαίρες καλά και εμείς καλύτερα.....

Δίσκος μάζας $M_1=7\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα. Ο δίσκος ισορροπεί οριζόντιος με την βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου που ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Το ελατήριο είναι αρχικά συσπειρωμένο κατά $0,7\text{m}$.



Δεύτερος οριζόντιος δίσκος ίδιας ακτίνας με τον πρώτο αλλά με μάζα $M_2=1\text{Kg}$ μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα. Δίνουμε ακαριαία αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=8\text{ r/sec}$ και αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο να κινηθεί μόνο με την επίδραση του βάρους του. Την στιγμή που ο δεύτερος δίσκος έχει εκτελέσει γωνιακή μετατόπιση $\theta=6,4\text{rad}$ συγκρούεται με τον ακίνητο δίσκο που είναι δεμένος στο ελατήριο αλλά μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής. Μετά από λίγο το σύστημα λειτουργεί σαν ένας ενιαίος δίσκος. Να βρεθούν:

Α) Το ύψος από όπου αφέθηκε ο δεύτερος δίσκος

Β) Η κοινή γωνιακή ταχύτητα του συστήματος των δύο δίσκων και το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης των δύο δίσκων

Γ) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο δίσκων.

Δ) Η απώλεια ενέργειας εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

Δίνονται για τον δίσκο $I_{\text{cm}}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Ο δίσκος κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του. Εκτελεί ταυτόχρονα και ελεύθερη πτώση αλλά ομαλή στροφική κίνηση μιας και δεν υπάρχει εξωτερική ροπή που να επηρεάζει την στροφική κίνηση του δίσκου. Από την σχέση της γωνιακής μετατόπισης στην ομαλή στροφική $\theta=\omega_0 \cdot t$ θα βρούμε $t=0,8\text{sec}$. Από τον νόμο του διαστήματος για την ελεύθερη πτώση $H=1/2 \cdot g \cdot t^2=3,2\text{m}$.

Β) Για την πλαστική κρούση των δύο δίσκων θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \quad \text{άρα } I_2 \cdot \omega_o = (I_1 + I_2) \omega_{\text{συστ}} \quad \text{άρα } \omega_{\text{συστ}} = 1 \text{ rad/sec.}$$

$$\text{Από την ισορροπία του δίσκου } K \cdot x_1 = M_1 \cdot g \quad \text{άρα } K = 100 \text{ N/m}$$

$$\text{Ο δίσκος } \Delta_2 \text{ που πέφτει έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου } U = g \cdot t = 8 \text{ m/sec}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΟ για την πλαστική κρούση

$$M_2 \cdot U = (M_1 + M_2) \cdot U_{\text{συστ}} \quad \text{άρα } U_{\text{συστ}} = 1 \text{ m/sec}$$

Με την αλλαγή της μάζας θα έχουμε και αλλαγή της ΘΙΤ

$$\text{Για την ισορροπία στην Ν.Θ.Ι.Τ } (M_1 + M_2) \cdot g = K \cdot x_2 \quad \text{άρα } x_2 = 0,8 \text{ m}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την κατακόρυφη ταλάντωση του συστήματος θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot (M_1 + M_2) \cdot U_{\text{συστ}}^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} K \cdot A^2 \quad \text{άρα μετά από πράξεις } A = 0,3 \text{ m.}$$

Γ) Οι δίσκοι εκτελούν κατακόρυφη Γ.Α.Τ. και ταυτόχρονα ομαλή στροφική κίνηση γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής. Έτσι η μέγιστη κινητική τους ενέργεια θα δίνεται από την σχέση $K_{\text{ολmax}} = K_{\text{maxταλ}} + K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 + \frac{1}{2} I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\text{συστ}}^2$ μετά από πράξεις

$$K_{\text{ολmax}} = 5 \text{ J}$$

Δ) Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική κατάσταση πριν και μετά την κρούση θα έχουμε

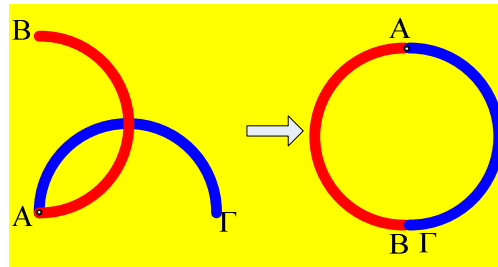
$$U_w + K_{\text{περ1}} = K_{\text{περσυστ}} + K_{\text{μετ}} + Q \quad \text{άρα } M_2 \cdot g \cdot H + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \omega_o^2 = \frac{1}{2} \cdot I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\text{συστ}}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{ολ}} \cdot U_{\text{συστ}}^2 + Q$$

μετά από πράξεις θα βρεθεί

$$Q = 31,5 \text{ J}$$

Κρούση ημικυκλίων

Τα δύο ημικύκλια του παρακάτω σχήματος μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Α. Η διάμετρος ΑΒ είναι κατακόρυφη ενώ η διάμετρο ΑΓ είναι οριζόντια. Το κάθε ημικύκλιο θεωρούμε ότι έχει μάζα $M_1=1\text{Kg}$ και όλη του η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ακτίνα $R=1\text{m}$. Αφήνουμε ελεύθερο το ένα ημικύκλιο και μετά από λίγο αφήνουμε ελεύθερο και το δεύτερο ημικύκλιο με αποτέλεσμα τα δύο ημικύκλια να συγκρουστούν ταυτόχρονα και πλαστικά όταν έχουν τη μέγιστη κινητική τους ενέργεια.



Να βρεθούν:

- A) Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την πλαστική κρούση των δύο ημικυκλίων
- B) Το συννημίτονο της μέγιστης γωνίας που θα διαγράψει η κατακόρυφη διάμετρος ΑΒ των ημικυκλίων μετά την κρούση.

Δίνεται ότι το κέντρο μάζας ημικυκλίου βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του σε απόσταση $4R/3\pi$ από το κέντρο του.

Απάντηση:

A) Αν το ημικύκλιο ήταν ολόκληρο δαχτυλίδι θα είχε μάζα $M=2\text{Kg}$ και ροπή αδράνειας του θα ήταν $I_{cm}=MR^2$. Επειδή όμως το σύστημα περιστρέφεται γύρω από το σημείο Α με την βοήθεια του κανόνα του Στάινερ θα είχαμε $I_A=MR^2+MR^2=2MR^2$. Επειδή όμως λείπει το μισό ημικύκλιο η συνολική ροπή αδράνειας για κάθε ημικύκλιο θα είναι $I_A=MR^2=2\text{Kg}\cdot\text{m}^2$

Με την βοήθεια του ΑΔΕ για το κάθε ημικύκλιο θα έχουμε

Για το ΑΒ $M_1g2R = \frac{1}{2} I_A \omega_1^2$ θα βρούμε $\omega = \sqrt{20} = 4,47\text{rad/sec}$

Για το ΑΓ $M_1g\left(\frac{4R}{3\pi} + R\right) = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2$ θα βρούμε $\omega = 3,77\text{rad/sec}$

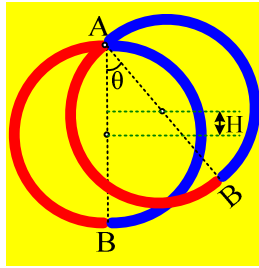
Για την κρούση των δύο ημικυκλίων θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \quad \text{άρα } I_A \cdot \omega_1 - I_A \cdot \omega_2 = I_{ολ} \omega_{συστ} \rightarrow$$

$$\text{θα βρούμε } \omega_{συστ} = 0,35\text{rad/sec}$$

$$\text{Αρα } K_{συστ} = \frac{1}{2} I_{ολ} \omega_{συστ}^2 = 0,245\text{J}$$

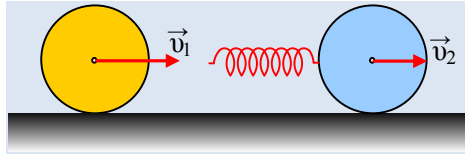
B) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του δαχτυλιδιού θα ισχύει:



$K_{\sigma\sigma}=U$ άρα $0,245=20H$ άρα $H=0,01225m$ άρα $\sin\theta=(R-H)/R=0,98775$

Κρούση δύο σφαιρών...μέσω ελατηρίων

Οι σφαίρες του παρακάτω σχήματος μπορούν να κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο έχοντας αρχικές ταχύτητες $u_{cm1}=3\text{m/sec}$ και $u_{cm2}=1\text{m/sec}$. Οι σφαίρες έχουν την ίδια ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και την ίδια μάζα $m=1\text{Kg}$.



Η κάθε σφαίρα έχει περασμένη συμμετρικά από το κέντρο της μία οριζόντια αβαρή και άκαμπτη βελόνα μήκους $3R$. Στα άκρα της βελόνας που είναι περασμένη στη δεύτερη σφαίρα είναι κολλημένα δύο οριζόντια ελατήρια φυσικού μήκους $L_0=0,5\text{m}$ και σταθεράς $K=140\text{N/m}$ το καθένα.

- A) Να αποδείξετε ότι οι σφαίρες μόλις θα έρθουν σε επαφή.
B) Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της κάθε σφαίρας
Γ) Τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών.

Δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$.

Απάντηση:

A) Επειδή η δεύτερη σφαίρα έχει μικρότερη ταχύτητα από την πρώτη κάποια στιγμή τα δύο ελατήρια θα έρθουν σε επαφή με την οριζόντια βελόνα της πρώτης σφαίρας. Έτσι η πρώτη σφαίρα θα αρχίσει να κάνει επιβραδυνόμενη στροφική και μεταφορική κίνηση εξαιτίας της δύναμης των ελατηρίων και της στατικής τριβής. Οι αντίστοιχες δυνάμεις των ελατηρίων και της στατικής τριβής αναγκάζουν την πρώτη σφαίρα να κάνει επιταχυνόμενη μεταφορική και στροφική κίνηση. Η απόσταση των δύο σφαιρών θα γίνει ελάχιστη όταν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών γίνουν ίσες. Με τη βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε

$$Mu_{cm1} + Mu_{cm2} = (M+M)u_{κοιν} \text{ άρα } u_{κοιν} = 2\text{m/sec.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα των δύο σφαιρών θα έχουμε

$$\frac{1}{2}Mu_{cm1}^2 + \frac{1}{2}0,4MR^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}Mu_{cm2}^2 + \frac{1}{2}0,4MR^2\omega_2^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}Mu_{cmκοιν}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}0,4MR^2\omega_{κοιν}^2 + \frac{1}{2}2Kx_{max}^2$$

θα βρούμε μετά από πράξεις $x_{max}=0,1\text{m}$.

Έτσι η απόσταση των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών θα είναι $d=L_0-x_{max}=0,4\text{m}=2R$ άρα μόλις που οι δύο σφαίρες θα έρθουν σε επαφή.

B) Για την κάθε σφαίρα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση $2F_{ελ} = T = Ma_{cm}$ (1) και $T \cdot R = 0,4MR^2 \cdot \alpha_{γων}$ (2)

$$2Kx - 0,4Ma_{cm} = Ma_{cm} \text{ άρα } a_{cm} = 2Kx/1,4 = 200x \text{ (SI)} \text{ Με την βοήθεια της σχέσης (2) } T = 80x \text{ (SI)}$$

Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της κάθε σφαίρας θα είναι $\Delta L/\Delta t = T_{max} \cdot R = 80 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 1,6\text{N} \cdot \text{m}$

Γ) Με την βοήθεια της ΑΔΟ και της ΑΔΕ για το αρχικό και το τελικό σύστημα σωμάτων θα έχουμε

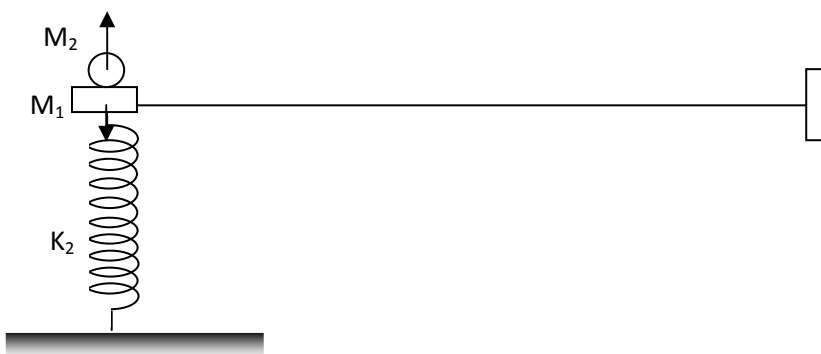
$$Mu_{ocm1} + Mu_{ocm2} = Mu_{ocm1'} + Mu_{cm2'} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}Mu_{cm1}^2 + \frac{1}{2}0,4MR^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}Mu_{cm2}^2 + \frac{1}{2}0,4MR^2\omega_2^2 = \frac{1}{2}Mu_{cm1'}^2 + \frac{1}{2}0,4MR^2\omega_1'^2 + \frac{1}{2}Mu_{cm2'}^2 + \frac{1}{2}0,4MR^2\omega_2'^2 \quad (4)$$

Με την βοήθεια των σχέσεων (3) και (4) θα βρούμε ότι οι δύο σφαίρες τελικά θα ανταλλάξουν ταχύτητες $U_{cm1'} = 1\text{m/sec}$ και $U_{cm2'} = 3\text{m/sec}$

Κρούσεις και κύμα.

Στο παρακάτω σχήμα το κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\pi^2\text{N/m}$ είναι δεμένο με σώμα μάζας $m_1=1\text{Kg}$ και το σύστημα ισορροπεί. Την χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε



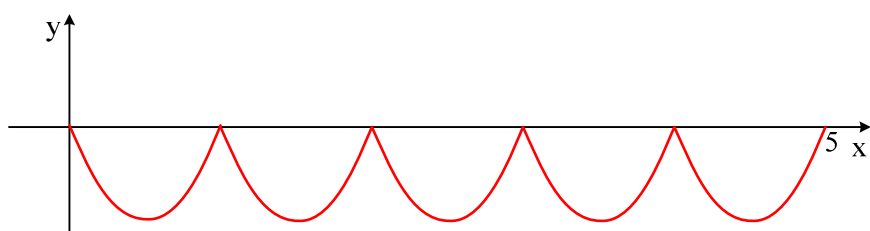
ταυτόχρονα και κατακόρυφα το σώμα μάζας m_1 αλλά και το δεύτερο σώμα μάζας $m_2=m_1$ με αρχικές ταχύτητες $U_1=0,5\text{ m/sec}$ και φορά προς τα κάτω το m_1 και $U_2=0,5\text{m/sec}$ με φορά προς τα πάνω το m_2 . Στην οριζόντια ελαστική χορδή που είναι δεμένη στο σώμα μάζας m_1 μπορούν να διαδίδονται αρμονικά κύματα με ταχύτητα διάδοσης $U=10\text{m/sec}$. Αν όλες οι κρούσεις μεταξύ των σωμάτων που θα ακολουθήσουν είναι κεντρικές και ελαστικές να βρεθούν:

- A) Η περίοδος και η θέση των κρούσεων των δύο σωμάτων.
- B) Το σχήμα της ελαστικής χορδής τη χρονική στιγμή που έγινε η 5η κρούση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

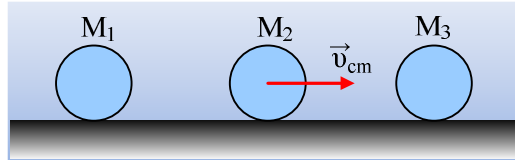
A) Η εξίσωση κίνησης του δεύτερου σώματος δίνεται από την σχέση $\psi_2=U_2 \cdot t - 1/2 \cdot g \cdot t^2 = 0,5t - 5t^2$. Η εξίσωση κίνησης του πρώτου σώματος είναι $\psi_1=A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ και επειδή $\omega=\sqrt{K/m_1}=10\pi\text{ rad/sec}$ $U_1=\omega \cdot A$ το $A=0,05/\pi\text{ m}$ η εξίσωση $\psi_1=0,05/\pi \eta\mu(10\pi t + \pi)$ (S.I.). Η κρούση θα γίνει στην θέση όπου $\psi_1=\psi_2$ άρα $0,5t - 5t^2 = 0,05/\pi \eta\mu(10\pi t + \pi)$ (1). Η εξίσωση (1) μπορεί να λυθεί μόνο γραφικά και μόνο με την βοήθεια του mathematica. Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε ότι την στιγμή $t=0,1\text{sec}$ το σώμα m_2 φτάνει στο $\psi_2=0$ αλλά και το σώμα m_1 φτάνει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας αφού $T_1/2=0,1\text{sec}$. Έτσι η κρούση των δύο σωμάτων θα γίνει για πρώτη φορά στην θέση ισορροπίας του σώματος m_1 . Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική άρα τα δύο σώματα κατά την κρούση τους θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Το φαινόμενο θα παρουσιάζει περίοδο $T=T_1/2=0,1\text{sec}$.

B) Η πέμπτη κρούση θα γίνει την χρονική στιγμή $t_2=5 \cdot 0,1=0,5\text{sec}$ και το κύμα θα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $\chi=U \cdot t_2=5\text{m}$. Αν η ταλάντωση γινόταν κανονικά το μήκος κύματος της χορδής θα ήταν $U=\lambda \cdot f$ άρα $\lambda=2\text{m}$. Η μορφή της ελαστικής χορδής θα είναι η παρακάτω



Κρούσεις τριών ελαστικών σφαιρών.

Τρεις τέλεια ελαστικές και ίδιας ακτίνας $R=0,2\text{m}$ σφαίρες βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Με κάποιον τρόπο αναγκάζουμε την μεσαία σφαίρα να κυλίσει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο επίπεδο με αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας του $v_{cm}=10\text{m/s}$ έτσι ώστε να πλησιάζει προς την δεξιά σφαίρα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι σφαίρες έχουν μάζες $M_1=M_2=1\text{Kg}$, ενώ η τρίτη σφαίρα έχει μάζα $M_3=4\text{Kg}$. Οι σφαίρες με μάζα M_1 και M_3 είναι αρχικά ακίνητες. Αν όλες οι κρούσεις που θα πραγματοποιηθούν είναι ελαστικές και γίνονται ακαριαία να βρεθούν:

- A) Τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των κέντρων μάζας όλων των σφαιρών
- B) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας με μάζα M_2 που μεταφέρθηκε στην σφαίρα με μάζα M_3 .
- Γ) Το ποιοτικό διάγραμμα της ταχύτητας του χαμηλότερου σημείου της σφαίρας με μάζα M_2 .

Για τη σφαίρα δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$.

Απάντηση:

- A) Για να κυλίεται η σφαίρα θα πρέπει να έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{v_{cm}}{R} = 50\text{r/s}$

Κατά την διάρκεια της κρούσης οι δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι κεντρικές που δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπές. Έτσι η γωνιακή ταχύτητα της μεσαίας σφαίρας θα είναι συνεχώς σταθερή. Έτσι για την πρώτη ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών M_2 και M_3 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της ελαστικής κρούσης ακίνητης με κινούμενη σφαίρα. Έτσι

$$v_3 = \frac{2M_2 v_{cm}}{M_2 + M_3} = 4\text{m/s}$$
$$v_2' = \frac{(M_2 - M_3)v_{cm}}{M_2 + M_3} = -6\text{m/s}$$

Η δεύτερη σφαίρα επιστρέφει με ταχύτητα μέτρου 6m/s και ταυτόχρονα περιστρέφεται δεξιόστροφα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=50\text{r/s}$.

Η δεύτερη σφαίρα πέφτει με ταχύτητα του κέντρου μάζας του πάνω στην πρώτη σφαίρα που όμως έχει την ίδια μάζα με την δεύτερη σφαίρα. Έτσι οι δύο σφαίρες θα ανταλλάξουν ταχύτητες με την πρώτη σφαίρα να αποκτά ταχύτητα μέτρου $v_1=6\text{m/s}$.

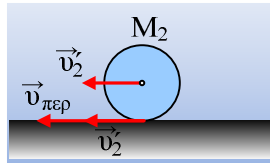
Η μεσαία σφαίρα έχει μετά την δεύτερη κρούση μόνο γωνιακή ταχύτητα περιστροφής μιας η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας του μηδενίστηκε εξαιτίας της δεύτερης κρούσης με την σφαίρα μάζας M_1 .

B) Η αρχική κινητική ενέργεια της μεσαίας σφαίρας ήταν $K_{ολ} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = 70J$

Η κινητική ενέργεια της τρίτης σφαίρας είναι $K_3 = \frac{1}{2} M_3 v_3^2 = 32J$ άρα το ποσοστό θα είναι

$$\Pi = 32 \cdot 100 / 70 = 45,7\%$$

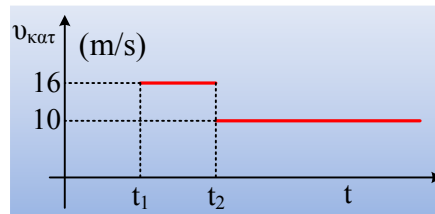
Γ) Η μεσαία σφαίρα αρχικά κυλίστα χωρίς να ολισθαίνει άρα και η ταχύτητα του χαμηλότερου της σημείου θα είναι μηδενική μέχρι την στιγμή της πρώτης κρούσης. Μετά την πρώτη κρούση η σφαίρα κινείται προς τα αριστερά αλλά περιστρέφεται δεξιόστροφα άρα η συνολική της ταχύτητα θα είναι με βάση το σχήμα



$$\text{θα είναι } v_{ολ} = v_2' + v_{περ} = 6\text{m/s} + 10\text{m/s} = 16\text{m/s}$$

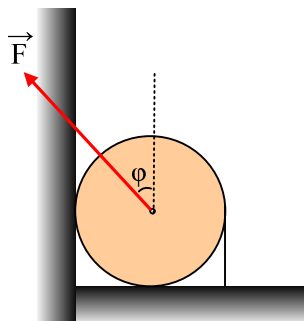
Μετά και τη δεύτερη κρούση η μεσαία σφαίρα μόνο περιστρέφεται άρα η μοναδική ταχύτητα που έχει το κατώτερο σημείο της σφαίρας είναι η $v_{περ} = 10\text{m/s}$

Έτσι το μέτρο της ταχύτητας του χαμηλότερου σημείου της μεσαίας σφαίρας θα δίνεται ποιοτικά από το παρακάτω σχήμα με την προϋπόθεση ότι η πρώτη κρούση έγινε την στιγμή t_1 και η δεύτερη κρούση έγινε την χρονική στιγμή t_2 .



Κίνηση σφαίρας σε κατακόρυφο τοίχο

Σφαίρα μάζας $M=5\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο έχοντας τυλιγμένο λεπτότατο αβαρές νήμα που βρίσκεται μέσα σε ένα κατακόρυφο λεπτότατο αυλάκι που είναι χαραγμένο στην επιφάνεια της σφαίρας. Η σφαίρα είναι επίσης σε επαφή με κατακόρυφο τοίχο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu=0,18$.



Ασκούμε την στιγμή $t=0$ στο κέντρο της σφαίρας σταθερή δύναμη $F=100\sqrt{2}\text{N}$ που σχηματίζει γωνία $\phi=45^\circ$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με αποτέλεσμα η σφαίρα να αρχίσει να ανεβαίνει κυλιόμενη και το σχοινί που είναι συνεχώς τεντωμένο να ξετυλίγεται κατακόρυφα.

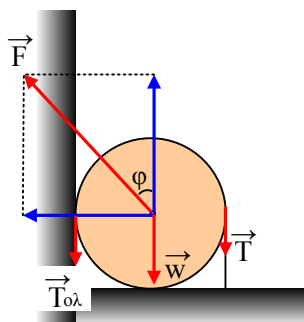
Τη χρονική στιγμή $t_1=0,65\text{sec}$ κόβουμε το νήμα. Να βρεθούν:

- A) Πόση η ανύψωση του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή που κόπηκε το νήμα και πόση η κινητικής ενέργεια της σφαίρας εκείνη τη στιγμή.
- B) Ποια στιγμή θα αρχίσει η κύλιση στον κατακόρυφο τοίχο.
- B) Πόση θερμότητα θα παραχθεί συνολικά .

$$I_{\text{cm}}=0,4M.R^2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A)Απο τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση της σφαίρας θα έχουμε



$$F\sin\phi - M.g - T - T_{\text{ολ}} = M.a \quad (1)$$

$$T.R - T_{ολ}.R = 0,4.M.R^2.\alpha_{γων} \quad (2)$$

Επειδή το σημείο επαφής με τον κατακόρυφο τοίχο έχει συνεχώς (πριν κοπεί το νήμα) ταχύτητα 2 Ucm θα δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης:

$$T_{ολ} = \mu.N = \mu.F_{ημφ} = 18 \text{ N} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) θα βρούμε μετά από πράξεις $a = 2 \text{ m/sec}^2$.

Από τον νόμο του διαστήματος για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση :

$$\Delta H_1 = 1/2.a.t^2 = 0,4225 \text{ m}$$

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση:

$$U_{ocm} = a.t_1 = 1,3 \text{ m/sec.}$$

$$\text{Άρα } K_{ολ} = 1/2 M.U_{ocm}^2 + 1/2 I.\omega^2 = 6,3375 \text{ J}$$

Β) Την στιγμή που κόβεται το νήμα η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με τον τοίχο είναι $2,6 \text{ m/sec}$ με φορά προς τα πάνω. Έτσι τώρα η σφαίρα αρχίζει να ολισθαίνει ανεβαίνοντας προς τα πάνω. Η καθαρή κύλιση θα ξεκινήσει όταν το σημείο επαφής της σφαίρας με τον τοίχο αποκτήσει συνολική ταχύτητα 0.

Από του νόμους τώρα της κίνησης για την περιστροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$F_{συνφ} - M.g - T_{ολ} = M.a_2 \quad (4)$$

$$T_{ολ}.R = 0,4.M.R^2.\alpha_{γων2} \quad (5)$$

μετά από πράξεις $a_2 = 6,4 \text{ m/sec}^2$ και $\alpha_{γων2} = 90 \text{ r/sec}^2$.

Θα πρέπει $U_{μετ} = U_{περ}$ άρα $U_0 + a_2.t_2 = (-\omega_0 + \alpha_{γων2}.t_2).R$ άρα $t_2 = 1 \text{ sec}$. Η καθαρή κύλιση θα αρχίσει 1sec μετά το κόψιμο του νήματος.

Πρέπει όμως να δούμε αν ισχύει και η συνθήκη κύλισης της σφαίρας δηλαδή $T_{στ} < \mu.N$.

Από του νόμους τώρα της κίνησης για την περιστροφική και μεταφορική κίνηση αν υπήρχε κύλιση θα έχουμε

$$F_{συνφ} - M.g - T_{στ} = M.a_3 \quad (6) \quad T_{στ}.R = 0,4.M.R^2.\alpha_{γων3} \quad (7)$$

θα προκύψει $a_3 = 50/7 \text{ m/sec}^2$ και $T_{στ} = 100/7 \text{ N}$ που είναι μικρότερη από την $T_{ολ} = 18 \text{ N}$. Έτσι η σφαίρα θα κυλιέται ανερχόμενη στον κατακόρυφο τοίχο.

Τελικά τη χρονική στιγμή $t_3 = t_1 + t_2 = 1,65 \text{ sec}$ θα αρχίσει η καθαρή κύλιση.

Γ) Θερμότητα θα αναπτύσσεται μέχρι την στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση δηλαδή μέχρι την χρονική στιγμή t_3 . Έτσι με την βοήθεια της ΑΔΕ από την στιγμή 0 μέχρι την t_3 θα έχουμε

$$WF=K\pi+K_{\text{μετ}}+UW+Q \quad (8)$$

Από τον νόμο του διαστήματος για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση :

$$\Delta H_2=U_0 \cdot t_2+1/2 \cdot a_2 \cdot t_2^2=4,5\text{m}$$

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση:

$$U_{2\text{cm}}=U_0+a_2 \cdot t_2=7,7\text{m/sec}$$

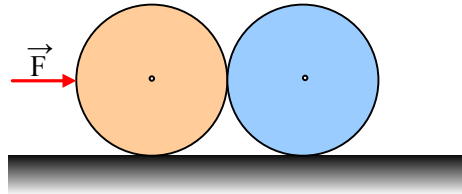
Με αντικατάσταση στην σχέση (8):

$$F \cdot (\Delta H_1+\Delta H_2) \cdot \sin\phi=1/2 \cdot M \cdot U_{\text{cm}2}^2+1/2 \cdot I \cdot \omega_{\text{τελ}}^2 +Q$$

Μετά από πράξεις $Q=23,7875\text{J}$

Κίνηση δύο σφαιρών

Δύο όμοιες λείες σφαίρες με μάζες $m_1=m_2=1\text{kg}$ έχουν ίσες ακτίνες $R_1=R_2$ βρίσκονται σε επαφή πάνω σε οριζόντιο επίπεδο όπως στο παρακάτω σχήμα.



Ασκούμε την χρονική στιγμή $t=0$ οριζόντια δύναμη $F=28\text{N}$ που ο φορέας της περνά από το κέντρο της 1^{ης} σφαίρας και οι σφαίρες αρχίζουν αμέσως να περιστρέφονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω στο οριζόντιο επίπεδο βρισκόμενες συνεχώς σε επαφή.

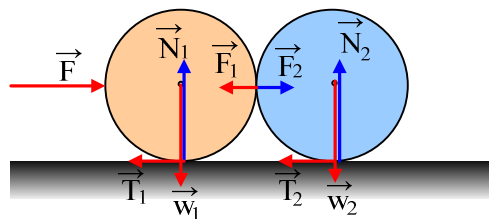
Κάποια χρονική στιγμή η οριζόντια δύναμη F καταργείται.

- A) Να σχεδιασθούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο σφαίρες αρχικά
- B) Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του κέντρου μάζας των δύο σφαιρών.
- Γ) Να περιγραφεί η κίνηση των δύο σφαιρών μετά την κατάργηση της δύναμης F αν υποθέσουμε ότι οι σφαίρες συνεχίζουν να κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν.
- Δ) Αν την στιγμή της κατάργησης της δύναμης η δεύτερη σφαίρα συγκρουστεί τέλεια ελαστικά με λείο κατακόρυφο τοίχο και η κρούση διαρκέσει ελάχιστα ποια η ταχύτητα του ανώτερου σημείου της 1^{ης} σφαίρας και ποια η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της δεύτερης σφαίρας αμέσως μετά την κρούση των δύο σφαιρών;

$$I_{cm}=0,4.m.R^2$$

Απάντηση:

- A) Οι δυνάμεις εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα.



- B) Αν εφαρμόσουμε του νόμους για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση της κάθε σφαίρας θα έχουμε

$$F - T_{1στ} - F_1 = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$F_2 - T_{2στ} = m_2 \cdot a \quad (2)$$

$$T_1 \cdot R_1 = 0,4m_1 \cdot R_1^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega 1} \quad (3)$$

$$T_2 \cdot R_2 = 0,4m_2 \cdot R_2^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega 2} \quad (4)$$

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων $a=10\text{m/s}^2$.

Γ) Αν υποθέσουμε ότι οι σφαίρες μετά την κατάργηση της δύναμης F βρίσκονται ακόμη σε επαφή θα έπρεπε να έχουν ίδια επιτάχυνση-επιβράδυνση του κέντρου μάζας τους και ίδια γωνιακή επιτάχυνση-επιβράδυνση. Οι στατικές τριβές θα έπρεπε να έχουν τα ίδια μέτρα και οι σχέσεις για τις μεταφορικές κινήσεις θα έπρεπε να είναι

$$F - T_{\text{στ}} = m \cdot a \quad (5)$$

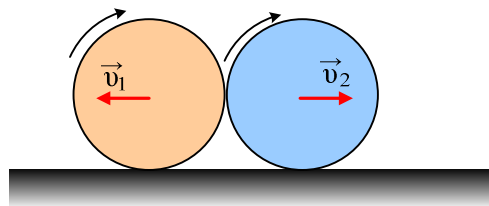
για την πρώτη σφαίρα και

$$T_{\text{στ}} + F = m \cdot a \quad (6)$$

για την δεύτερη σφαίρα. Από τις σχέσεις (5) και (6) καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα δεν μπορεί οι σφαίρες να βρίσκονται σε επαφή. Έτσι οι σφαίρες θα κινούνται ομαλά μεταφορικά και στροφικά και μόλις που δεν θα βρίσκονται σε επαφή.

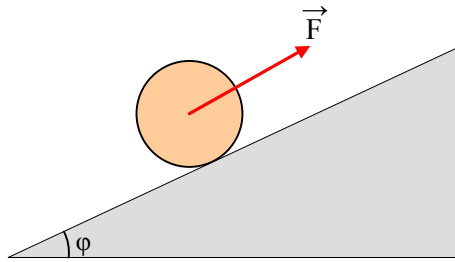
Δ) Επειδή οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση είναι κεντρικές και η κρούση διαρκεί απειροελάχιστα η στροφική κατάσταση των δύο σφαιρών δεν μπορεί να αλλάξει. Η πρώτη λοιπόν ελαστική κρούση της δεύτερης σφαίρας με τον τοίχο θα αλλάξει την φορά της ταχύτητας του κέντρου μάζας χωρίς όμως να αλλάξει ούτε την στροφική κατάσταση της σφαίρας αλλά ούτε και το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας. Η δεύτερη ελαστική κρούση της δεύτερης σφαίρας με την πρώτη σφαίρα θα επιφέρει ανταλλαγή των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών χωρίς όμως και πάλι να αλλάξει την στροφική κατάσταση των δύο σφαιρών.

Έτσι οι σφαίρες θα συνεχίσουν να περιστρέφονται δεξιόστροφα όπως στην αρχή αλλά η πρώτη σφαίρα θα τείνει να απομακρυνθεί από τον τοίχο ενώ η δεύτερη σφαίρα θα τείνει να πλησιάσει προς τον τοίχο. Έτσι το ανώτερο σημείο της 1^{ης} σφαίρας θα έχει ταχύτητα 0 όπως ακριβώς και το κατώτερο σημείο της 2^{ης} σφαίρας.



Κεκλιμένο επίπεδο και μεταβλητή δύναμη

Κύλινδρος μάζας $m=2\text{Kg}$ αρχίζει να ανέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ με την βοήθεια μεταβλητής δύναμης της μορφής $F=20-10x$ (S.I.) όπου x η μετατόπιση του κέντρου μάζας πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη ασκείται στο κέντρο του κυλίνδρου στην θέση $x=0$ την στιγμή $t=0$ και είναι παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη παύει να ασκείται στον κύλινδρο μετά τον μηδενισμό της.

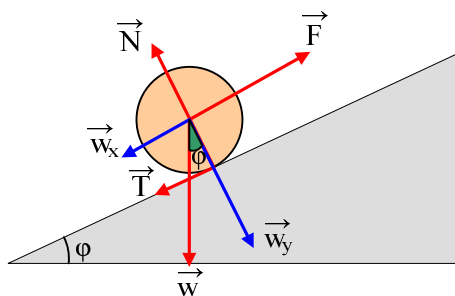


Να βρεθούν:

- A) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου την στιγμή που η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο είναι κάθετη προς το κεκλιμένο επίπεδο. Είναι κάποια ειδική ταχύτητα η ταχύτητα του κέντρου μάζας εκείνη την στιγμή;
- B) Να αποδειχθεί ότι τη στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη ο κύλινδρος φτάνει στο μέγιστο ύψος από την αρχική του θέση και να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου σε σχέση με την αρχική θέση του.
- Γ) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός επιστρέψει στην θέση όπου βρισκόταν την στιγμή $t=0$.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι $I_{cm}=0,5MR^2$.

Απάντηση:



- A) Από τους νόμους για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε:

$$F - m \cdot g \cdot \eta_{\mu\phi} - T_{\sigma\tau} = m \cdot a \quad (1)$$

$$T_{\sigma\tau} \cdot R = 0,5m \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

$$20 - 10 \cdot x - m g \eta_{\mu\phi} - 0,5 \cdot m \cdot a = m \cdot a$$

$$\text{άρα } a = (10 - 10x)/3 \quad (\text{S.I.}) \quad (3)$$

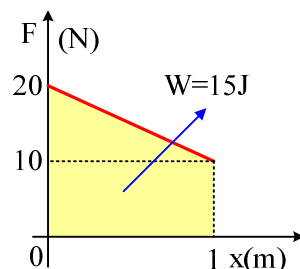
Και από την σχέση (2):

$$T_{\sigma\tau} = (10 - 10x)/3 \quad (\text{S.I.})$$

Η συνολική δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο είναι το διανυσματικό άθροισμα της στατικής τριβής και της κάθετης αντίδρασης του δαπέδου. Για να είναι λοιπόν κάθετη η δύναμη από το δάπεδο θα πρέπει η $T_{\sigma\tau}$ να γίνει ίση με το 0. Αυτό θα συμβεί όταν $x=1\text{m}$.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ για την κίνηση του κυλίνδρου από την θέση $x=0$ μέχρι την θέση $x=1\text{m}$ θα έχουμε

$W_F = K_{\text{περ}} + K_{\text{μετ}} + U_w$ το έργο της δύναμης F θα βρεθεί από την παρακάτω γραφική παράσταση

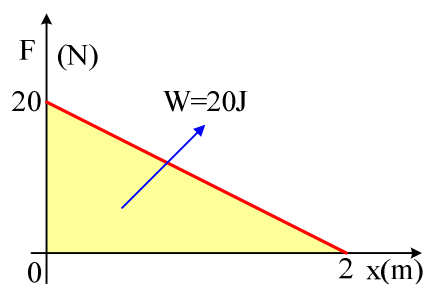


$$15 = 1/2 \cdot 20 \cdot 1 + 10 \cdot 1$$

$$\text{άρα } U_{\text{cm}} = \sqrt{10/3} \text{ m/sec.}$$

Παρατηρούμε από την σχέση (3) ότι η επιτάχυνση ήταν θετική εκείνη την στιγμή γίνεται 0 και στην συνέχεια θα γίνει αρνητική. Έτσι εκείνη την στιγμή ο κύλινδρος έχει μέγιστη ταχύτητα.

- B) Το σώμα θα φτάσει στο μέγιστο ύψος όταν η ταχύτητα του θα μηδενισθεί. Με εφαρμογή της ΑΔΕ και με την υπόθεση ότι η ταχύτητα δεν θα έχει μηδενισθεί πριν μηδενισθεί η δύναμη θα έχουμε $W_F' = U_w'$ το έργο της δύναμης θα βρεθεί από την γραφική παράσταση



$$20 = 2 \cdot 10 \cdot H_{\max} \quad \text{άρα } H_{\max} = 1\text{m.}$$

Το $H_{\max}$ αντιστοιχεί στο $x=2\text{m}$ αφού $\eta m g x_0 = H_{\max}/x$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι την στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη μηδενίζεται ταυτόχρονα και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Γ) Με εφαρμογή της ΑΔΕ θα έχουμε:

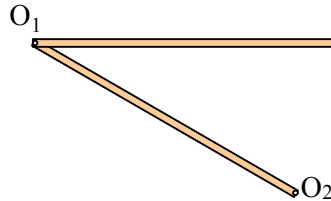
$$U_w = K_{\text{περ}'} + K_{\text{μετ}'} \quad \text{άρα}$$

$$m \cdot g \cdot H_{\max} = \frac{1}{2} m \cdot U_{\text{cmτελ}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{θα πάρουμε } U_{\text{cmτελ}} = \sqrt{40/3} \text{ m/sec.}$$

Και γιατί μόνο ένα καρφί και όχι δύο;

Η ράβδος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M=3\text{kg}$ και μήκος $L=0,6\text{m}$. Η ράβδος μπορεί να κινείται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο καρφί που βρίσκεται στο σημείο O_1 . Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από οριζόντια θέση. Όταν διαγράψει γωνία 30° η ράβδος συγκρούεται με ακλόνητο οριζόντιο καρφί που βρίσκεται σε απόσταση $0,6\text{m}$ από το πρώτο καρφί στο σημείο O_2 .



Ελάχιστα πριν την κρούση το καρφί στο O_1 αφαιρείται ακαριαία ενώ η ράβδος συγκρούεται με το καρφί O_2 επίσης ακαριαία και στην συνέχεια συνεχίζει να περιστρέφεται γύρω από το δεύτερο καρφί O_2 χωρίς τριβές. Αν η ελάχιστη ενέργεια πρέπει να δαπανήσει ο Μπαρμα-Γιάννης ο σιδεράς για να κάνει μία αντίστοιχη τρύπα με αυτή που έκανε το δεύτερο καρφί στη ράβδο είναι $E_{\min}=0,375\text{J}$.

Να βρεθούν:

- A) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου πριν και μετά την κρούση με το δεύτερο καρφί.
- B) Πόση θερμότητα θα παραχθεί κατά την κρούση στο δεύτερο καρφί O_2 .
- B) Η κινητική ενέργεια της ράβδου όταν η ράβδος θα γίνει κατακόρυφη για πρώτη φορά.

Για την ράβδο $I_{cm}=\frac{1}{12}\cdot M\cdot L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση της κρούσης με το καρφί O_2

$$M\cdot g\cdot L\sin\phi/2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot M\cdot L^2 \cdot \omega_1^2 \quad \text{άρα} \quad \omega_1 = 5\text{r/sec.}$$

Την στιγμή που βγαίνει το καρφί O_1 μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση της ράβδου σύνθετη με μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας $U_{cm}=\omega_1\cdot L/2=1,5\text{m/sec}$ και στροφική γύρω από το κέντρο μάζας της ράβδου. Αν υποθέσουμε ότι η κρούση διαρκεί ελάχιστα μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΣ ως προς τον άξονα που περνάει από το δεύτερο καρφί O_2 .

$$I_{cm}\cdot \omega_1 - M\cdot U_{cm}\cdot L/2 = -I_2\cdot \omega_2 \quad \text{μετά από τις πράξεις} \quad \omega_2 = 2,5\text{r/s.}$$

Β) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για τη κρούση της ράβδου με το καρφί θα έχουμε

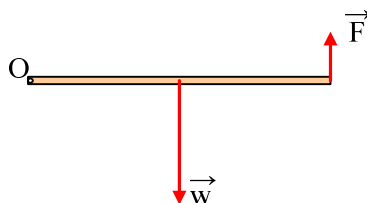
$$K_1 = K_2 + E_{\text{min}} + Q \quad \text{άρα } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega_2^2 + E_{\text{min}} + Q \quad \text{άρα } Q = 3J$$

Γ) Με την βοήθεια της ΑΔΕ μετά την κρούση και μέχρι την κατακόρυφη θέση της ράβδου

$$M \cdot g \cdot (L/4 + L/2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega_2^2 = K_{\text{τελ}} \quad \text{άρα } K_{\text{τελ}} = 14,625J.$$

Και αν αφαιρεθεί το καρφί;

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μάζας $M=3\text{Kg}$ και μήκους $L=1\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο καρφί O που βρίσκεται στο ένα του άκρο όπως στο παρακάτω σχήμα



Στο άλλο άκρο της ράβδου ασκείται μεταβλητή δύναμη F κάθετη πάντα στην ράβδο της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση $F=112\theta/\pi^2$ (S.I.) όπου θ η γωνία που θα διαγράψει η ράβδος σε σχέση με την αρχική οριζόντια θέση. Αν η ράβδος αφεθεί ελεύθερη από την οριζόντια θέση να βρεθούν:

A) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν η ράβδος έχει διαγράψει γωνία 90° σε σχέση με την αρχική της θέση.

B) Ποια η σχέση που θα μπορούσε να δίνει τη γωνία για την οποία η ράβδος έχει αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια για πρώτη φορά μετά την εκκίνησή της.

Την στιγμή $t=0$ που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη η δύναμη F καταργείται και αφαιρείται ακαριαία το οριζόντιο καρφί που βρίσκεται στο σημείο O .

Γ) Πόση είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου μετά την αφαίρεση του καρφιού.

Δ) Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει η ράβδος και πόση η συνολική του κινητική ενέργεια την στιγμή $t=1\text{sec}$.

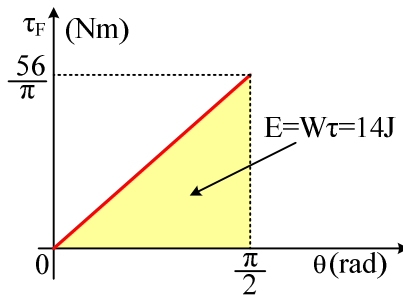
Για την ράβδο $I_{cm}=1/12 \cdot M \cdot L^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την αρχική θέση και την τελική θέση της ράβδου θα έχουμε :

$$W_w - W_F = K_{\text{τελ}} \quad (1)$$

το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί με την βοήθεια του εμβαδού μιας και η δύναμη είναι μεταβλητή



Από την (1) θα βρούμε $M \cdot g \cdot L/2 - WF = K\tau_{\text{τελ}}$ άρα $K\tau_{\text{τελ}} = 1J$ άρα $\omega_1 = \sqrt{2}r/\text{sec}$.

Β) Για την κίνηση της ράβδου όσο η ροπή του βάρους της είναι μεγαλύτερη από τη ροπή της εξωτερικής δύναμης F τόσο θα αυξάνει η κινητική ενέργεια της ράβδου. Η ροπή του βάρους μειώνεται αφού μειώνεται το απόστημα της ενώ η ροπή της εξωτερικής δύναμης λόγω της μορφής της δύναμης αυξάνει συνεχώς. Έτσι κάποια στιγμή οι δύο ροπές θα γίνουν ίσες. Τότε η ράβδος θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια.

$$M \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta/2 - 112\theta \cdot L/\pi^2 = 0 \text{ άρα } \sin\theta/\theta = 112/15 \cdot \pi^2$$

Γ) Κατά το πολύ μικρό χρόνο Δt που αφαιρείται το καρφί η στροφορμή της ράβδου ως προς το άκρο της O διατηρείται, γιατί η ροπή του βάρους της και της δύναμης από το καρφί ως προς το σημείο αυτό είναι μηδενική. Από αυτό θα προκύψει ότι η γωνιακή ταχύτητα ω_1 της ράβδου ως προς το O λίγο πριν την αφαίρεση του καρφιού είναι ίση με την αντίστοιχη γωνιακή της ταχύτητα ω_2 αμέσως μετά την αφαίρεση, δηλαδή $\omega_1 = \omega_2$.

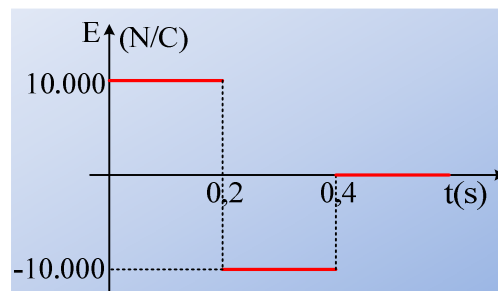
Δ) Η κίνηση της ράβδου μετά την αφαίρεση του καρφιού είναι σύνθετη και αποτελείται από μία ομαλή στροφική με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_2 και μία οριζόντια βολή για το κέντρο μάζας της ράβδου με αρχική ταχύτητα $U_{\text{cm}} = \omega_2 \cdot L/2 = \sqrt{2}/2 \text{ m/sec}$ εξαιτίας της δύναμης του βάρους. Η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου μάζας θα δίνεται από την σχέση $H = 1/2 \cdot g \cdot t^2 = 5\text{m}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση μετά την αφαίρεση του καρφιού μέχρι και την στιγμή $t=1\text{sec}$ θα έχουμε

$$K_{\text{αρχ}} + W_w = K_{\text{τελ}} \text{ άρα } K_{\text{τελ}} = 151J$$

Και αν αλλάζει η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

Σώμα μάζας $M=1\text{Kg}$ είναι φορτισμένο με φορτίο $Q=1\text{mC}$ και είναι κρεμασμένο από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\pi^2\text{N/m}$ και ισορροπεί κατακόρυφα. Την στιγμή $t=0$ δημιουργούμε ένα κατακόρυφο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με θετική φορά προς τα κάτω και μορφή που δίνεται από το παρακάτω σχήμα

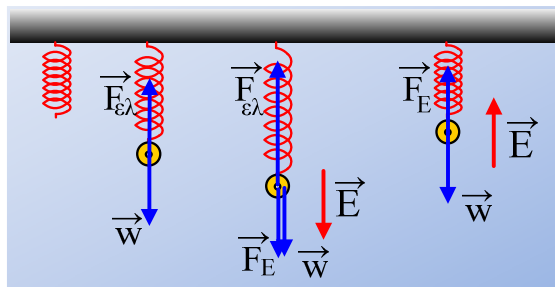


A) Να εξηγηθεί η κίνηση του σώματος

B) Να γίνει η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο

Γ) Ποια η συνολική ενέργεια που πήρε ο ταλαντωτής από το ηλεκτρικό πεδίο;

Απάντηση:



A) Η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου θα βρεθεί από την αρχική ισορροπία του σώματος $Mg=Kx_1$ άρα $x_1=1/10\pi^2\text{ m}$. Μετά την χρονική στιγμή $t=0$ και για χρόνο $t=0,2\text{ s}$ θέση ισορροπίας αλλάζει για πρώτη φορά. Για την νέα θέση ισορροπίας θα ισχύει $Mg + Eq = Kx_2$ άρα $x_2=2/10\pi^2\text{ m}$. Αν απομακρύνουμε λίγο το σώμα προς τα κάτω και θεωρήσουμε θετική τη φορά της απομάκρυνσης θα έχουμε

$$\Sigma F = Mg + Eq - K(x_2 + x) = -Kx$$

Δηλαδή το φορτίο εκτελεί γ.α.τ με $D=K$ και περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 0,2\text{ sec}$.

Το σώμα την στιγμή $t=0$ δεν έχει ταχύτητα και στην συνέχεια εκτελεί γ.α.τ άρα θα βρίσκεται σε ακραία θέση με πλάτος $A=x_2-x_1=1/10\pi^2\text{ m}$. Την χρονική στιγμή $t=0,2\text{ s}$ το σώμα θα έχει επιστρέψει

στην αρχική θέση έχοντας εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση. Εκείνη βέβαια την στιγμή ακαριαία αλλάζει φορά το ηλεκτρικό πεδίο με αποτέλεσμα να αλλάξει και πάλι η θέση ισορροπίας. Για την νέα θέση ισορροπίας θα ισχύει

$$Mg - Eq - Kx_3 = 0$$

και από τη σχέση αυτή θα βρούμε $x_3 = 0\text{m}$. Δηλαδή η νέα θέση ισορροπίας μεταφέρεται τώρα στην θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αν απομακρύνουμε τώρα λίγο το σώμα από την νέα θέση ισορροπίας θα έχουμε

$$\Sigma F = Mg - Eq - Kx = -Kx$$

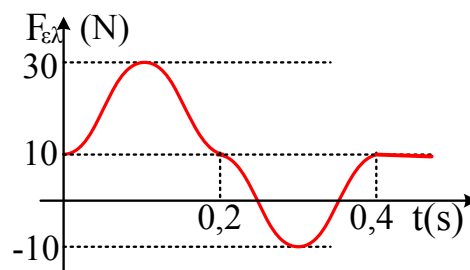
άρα και πάλι το σώμα θα εκτελεί γ.α.τ και πάλι με $D = K$ και με περίοδο και πάλι $T = 0,2\text{s}$. Το νέο πλάτος ταλάντωσης θα είναι τώρα το $A' = x_1 = 1/10\pi^2 \text{ m}$. Την χρονική στιγμή $t = 0,4\text{s}$ το σώμα θα βρίσκεται και πάλι εκεί που βρισκόταν την στιγμή $t = 0,2\text{s}$ έχοντας και πάλι εκτελέσει μία ολόκληρη περίοδο γύρω από νέα θέση ισορροπίας. Εκείνη τη στιγμή καταργείται το ηλεκτρικό πεδίο άρα αλλάζει και πάλι η θέση ισορροπίας του συστήματος. Τώρα όμως το σώμα βρίσκεται στην αρχική του θέση και δεν έχει ταχύτητα. Άρα το σώμα από την χρονική στιγμή $t = 0,4\text{s}$ και μετά θα παραμένει ακίνητο.

B) Αν θεωρήσουμε θετική την φορά της δύναμης του ελατηρίου την φορά προς τα πάνω για μία τυχαία θέση για την πρώτη ταλάντωση του φορτίου θα έχουμε

$$\Sigma F = -Kx \quad \text{άρα} \quad F_{\text{ελ}} - Mg - Eq = -K\Delta\eta\mu(\omega t + \pi/2) \quad \text{άρα} \quad F_{\text{ελ}} = 20 - 10\eta\mu(10\pi t + \pi/2) \quad 0 < t < 0,2 \quad (\text{S.I})$$

Για την δεύτερη ταλάντωση θα ισχύει αν και πάλι θεωρήσουμε θετική την προς τα πάνω φορά της δύναμης του ελατηρίου

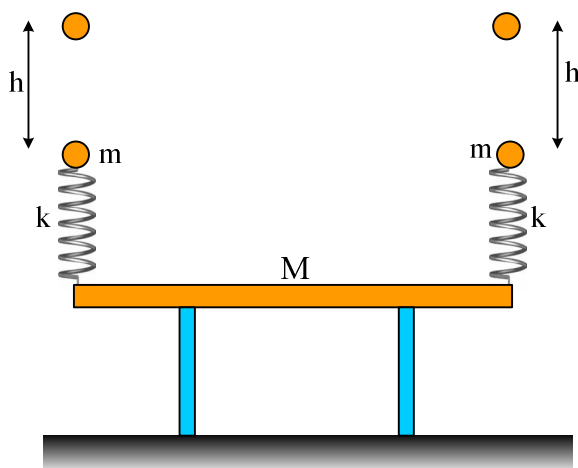
$$\Sigma F = -Kx' \quad \text{άρα} \quad F_{\text{ελ}} + Eq - Mg = -Kx' \quad \text{άρα} \quad F_{\text{ελ}} = -10\eta\mu\{10\pi(t - 0,2) + 3\pi/2\} \quad 0,2 < t < 0,4 \quad (\text{S.I})$$



Γ) Το φορτίο είναι αρχικά και τελικά ακίνητο άρα η συνολική ενέργεια που πήρε από το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίση με το 0.

Ισορροπία δοκού, ελαστική κρούση με ταλαντώσεις.

Ένα οριζόντιο δοκάρι ΑΓ μήκους $l=4\text{m}$ και μάζας $M=4\text{kg}$ στηρίζεται σε δύο κατακόρυφους στύλους που απέχουν 1m από το κάθε άκρο του δοκαριού. Στο κάθε άκρο του δοκαριού στερεώνουμε από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ και πάνω στο κάθε ελατήριο στερεώνουμε από ένα σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από ύψος $H=0,05\text{m}$ πάνω από τα σώμα που βρίσκεται στην άκρη Α αφήνουμε άλλο σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα m . Μετά από χρόνο $\Delta t=\pi/10\text{ sec}$ από την στιγμή που αφήσαμε το πρώτο σώμα αφήνουμε και ένα δεύτερο σώμα μάζας m που βρίσκεται και πάλι σε ύψος $H=0,05\text{m}$ πάνω από το σώμα m που βρίσκεται πάνω από το άκρο Γ. Μετά τις ελαστικές κρούσεις των σωμάτων m , με τα σώματα που είναι δεμένα με τα ελατήρια, απομακρύνονται με κατάλληλο μηχανισμό. Αν $t=0$ θεωρηθεί η στιγμή της δεύτερης ελαστικής κρούσης να βρεθούν:

- A) Οι εξισώσεις των δυνάμεων που δέχεται το δοκάρι από τα υποστηρίγματα αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω. Οι α.α.τ. θα εξελιχθούν ομαλά ή όχι;
- B) Αν οι δύο σφαίρες έπεφταν ταυτόχρονα ποιο θα έπρεπε να ήταν το $H_{\min}$ και για τις δύο μπάλες έτσι ώστε μόλις το δοκάρι να μην χάσει την επαφή του και με τα δύο υποστηρίγματά του;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Το κάθε ελατήριο είναι συσπειρωμένο εξαιτίας του βάρους του σώματος m . Για αυτή την ισορροπία θα έχουμε $m \cdot g = K \cdot x_1$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$.

Λίγο πριν την κάθε κρούση τα σώματα m θα έχουν ταχύτητα U που θα την βρούμε από την ΑΔΕ. Για την πτώση των σωμάτων m έχουμε

$$m \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{άρα } v = 1\text{m/sec.}$$

Επειδή τα δύο σώματα που θα συγκρουστούν ελαστικά έχουν τις ίδιες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Οι ταχύτητες αυτές τώρα θα είναι μέγιστες για την α.α.τ. που θα ακολουθήσει. $U=\omega \cdot A$ άρα $A=0,1\text{m}$. Παρατηρώ ότι το $A=x_1$ άρα το σώμα m δεν θα ξεπεράσει τη ΘΦΜΕ.

Κατά την ταλάντωση του πρώτου μόνο σώματος είναι πιθανόν να χαθεί η επαφή με το δεύτερο υποστήριγμα. Αν το σύστημα ισορροπούσε στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης τότε θα ισορροπούσε και σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης της.

$$\Sigma F_{\psi}=0 \quad \text{άρα } N_1+N_2=F_{\epsilon\lambda_1}+F_{\epsilon\lambda_2}+W_p \quad \text{άρα } N_1+N_2=20+10+40=70\text{N}$$

Και από την $\Sigma\tau(\Delta)=0$:

$$20-40+2N_2-10\cdot 3=0 \quad \text{άρα}$$

$$N_2=25\text{N} \quad \text{άρα } N_1=45\text{N}$$

Παρατηρώ ότι η επαφή δεν χάνεται κατά την διάρκεια της ταλάντωσης μόνο του ενός σώματος.

Ο χρόνος $\Delta t=\pi/10 \text{ sec}$ αντιστοιχεί σε χρόνο $T/2$ για την ταλάντωση των σωμάτων. Έτσι όταν το ένα σώμα m έχει κάνει μισή α.α.τ. τότε αρχίζει και η δεύτερη ταλάντωση. Το πρώτο λοιπόν σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ και πάει προς τα πάνω ενώ το δεύτερο βρίσκεται επίσης στην ΘΙΤ αλλά πάει προς τα κάτω. Έτσι οι δύο εξισώσεις των απομακρύνσεων των ταλαντώσεων θα έχουν εξισώσεις

$$\Psi_1=0,1\eta\mu 10t \quad \text{και } \Psi_2=0,1\eta\mu(10t+\pi) \quad (\text{S.I.})$$

Για την κάθε δύναμη του ελατηρίου θα ισχύει $F_{\epsilon\lambda}-m\cdot g=-K\cdot \Psi$.

Άρα η δύναμη του ελατηρίου θα είναι:

$$F_{\epsilon\lambda_1}=10-10\eta\mu 10t \quad (\text{S.I.}) \quad \text{ενώ}$$

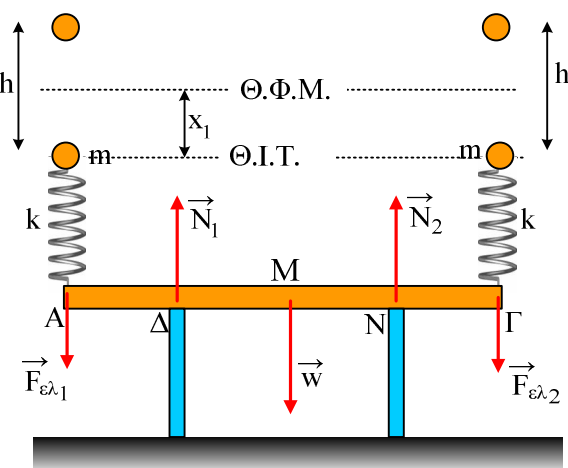
$$F_{\epsilon\lambda_2}=10-10\eta\mu(10t+\pi)=10+10\eta\mu 10t \quad (\text{S.I.}).$$

Οι δυνάμεις αυτές μεταφέρονται μέσω του ελατηρίου και στο άκρο Α και στο άκρο Γ και έχουν πάντοτε φορά προς τα κάτω αφού το ελατήριο δεν ξεπερνάει ποτέ τη ΘΦΜΕ.

Για την ισορροπία του δοκαριού θα έχουμε $\Sigma F_{\psi}=0$ άρα

$$N_1+N_2-W_{\delta}-F_{\epsilon\lambda_1}-F_{\epsilon\lambda_2}=0 \quad (1)$$

$\Sigma\tau(\Delta)=0$ άρα



$$-W\delta.(M\Delta) + N_2(\Delta N) - F\epsilon\lambda_2(\Delta\Gamma) + F\epsilon\lambda_1(A\Delta) = 0 \quad \text{άρα}$$

$$-40 + N_2 \cdot 2 - (10 + 10\eta\mu 10t) \cdot 3 + 10 - 10\eta\mu 10t = 0$$

$$\text{άρα } N_2 = 30 + 20\eta\mu 10t \text{ (S.I.)}$$

και από την (1) θα πάρουμε

$$N_1 = 30 - 20\eta\mu 10t \text{ (S.I.)}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι και το $N_1 > 0$ και το $N_2 > 0$. Έτσι οι α.α.τ εξελίσσονται κανονικά. (Ευτυχώς εδώ ο ιός H_1N_1 δεν έκανε την ζημιά του στην N_1 ή στην N_2)

Β) Στην περίπτωση που θα αφήσουμε ταυτόχρονα τα δύο σώματα οι ταλαντώσεις των δύο σωμάτων m θα είναι συμφασικές και οι δυνάμεις των ελατηρίων στα δύο άκρα θα είναι συνεχώς ίσες κατά φορά και μέτρο. Για να μην χαθεί η επαφή του δοκαριού με τα υποστηρίγματα θα πρέπει η δύναμη από το κάθε υποστήριγμα να είναι:

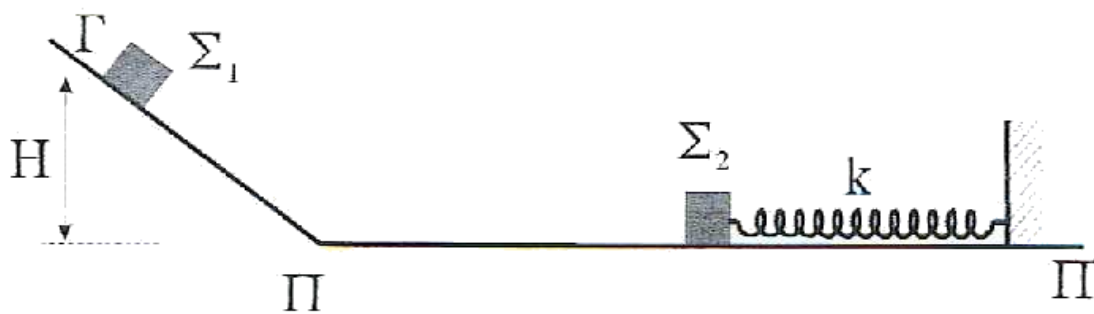
$$N_1 = N_2 \geq 0.$$

Για να συμβεί οριακά $N = 0$ θα πρέπει τα ελατήρια να επιμηκυνθούν τόσο ώστε οι δυνάμεις των ελατηρίων να εξουδετερώσουν το βάρος του δοκαριού. Έτσι στην οριακή αυτή κατάσταση $W\delta = F\epsilon\lambda_1 + F\epsilon\lambda_2$ άρα $40 = 2 \cdot Kx_{\text{ελ}}$ άρα $x_{\text{ελ}} = 0,2\text{m}$.

Το νέο πλάτος της νέας α.α.τ. θα είναι $A' = 0,3\text{m}$ Άρα η νέα $U_{\text{max}} = 3\text{m/sec}$ και το νέο ύψος θα βγει από την $A\Delta E \quad m \cdot g \cdot H' = \frac{1}{2} m U_{\text{max}}^2$ άρα $H' = 0,45\text{m}$.

ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2005

Το σώμα του σχήματος έχει μάζα $m_2=2\text{Kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς K , του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο. Το σώμα Σ_2 ταλαντώνεται οριζόντια πάνω σε λείο επίπεδο $\Pi\Pi'$ με πλάτος $A=0,1\text{m}$ και περίοδο $T=\pi/5\text{sec}$.



A. Να υπολογίσετε : 1. Την τιμή της σταθεράς K του ελατηρίου.

2. Τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 .

B. Το σώμα Σ_1 του σχήματος με μάζα $m_1=2\text{Kg}$ αφήνεται ελεύθερο να ολισθήσει πάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο, από τη θέση Γ . Η κατακόρυφη απόσταση της θέσης Γ από το οριζόντιο επίπεδο είναι $H=1,8\text{m}$. Το σώμα Σ_1 , αφού φθάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, συνεχίζει να κινείται, χωρίς να αλλάξει μέτρο ταχύτητας, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο $\Pi\Pi'$. Το Σ_1 συγκρούεται μετωπικά (κεντρικά) και ελαστικά με το Σ_2 τη στιγμή που το Σ_2 έχει την μέγιστη ταχύτητά του και κινείται αντίθετα από το Σ_1 .

1. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου μετά από αυτή την κρούση.
2. Να δείξετε πως στη συνέχεια το σώμα Σ_2 θα προλάβει το σώμα Σ_1 και θα συγκρουστούν πάλι πριν το σώμα φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Η απόσταση από τη βάση του πλάγιου επιπέδου μέχρι το κέντρο της ταλάντωσης του Σ_2 είναι αρκετά μεγάλη. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.
3. Να βρεθεί η θέση της κρούσης των δύο σωμάτων.

Δίνεται το $g=10\text{m/sec}^2$

ΛΥΣΗ

A. 1 $T=2\pi\sqrt{M/K}$ άρα $K=200\text{N/m}$

2. $U_{\max}=\omega \cdot A=10 \cdot 0,1=1\text{m/sec}$

B. A.Δ.E. $m \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} m \cdot U^2$ άρα $U = 6 \text{ m/sec}$.

Τα σώματα που συγκρούονται ελαστικά έχουν την ίδια μάζα άρα θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο θα αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $V = 6 \text{ m/sec}$ και το σώμα Σ_1 θα φύγει με ταχύτητα μέτρου $u = 1 \text{ m/sec}$.

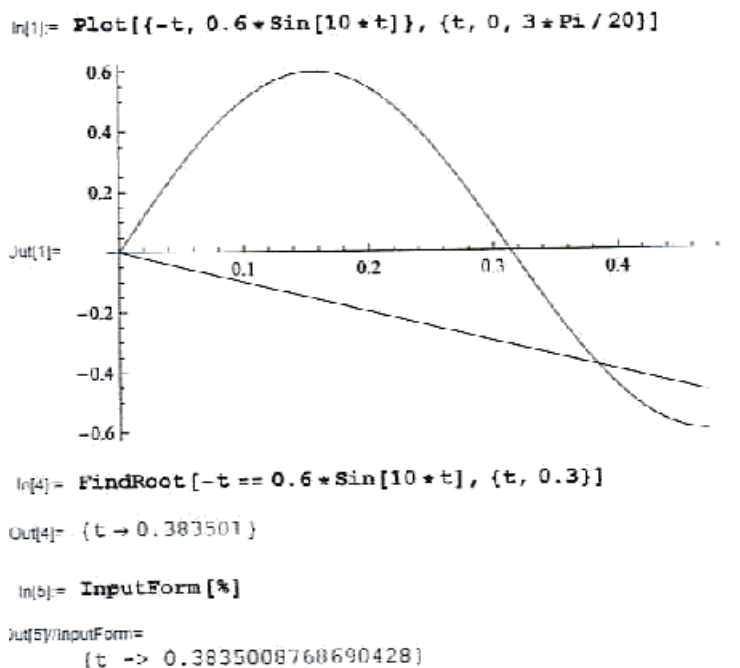
Τώρα το σώμα Σ_2 θα κάνει γ.α.τ. και θα έχει μέγιστη ταχύτητα $V = 6 \text{ m/sec}$.

$V = \omega \cdot A_2$ άρα $A_2 = 0,6 \text{ m}$. Τόση θα είναι φυσικά και η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Το σώμα Σ_2 θα κάνει γ.α.τ. με πλάτος $A_2 = 0,6 \text{ m}$ ενώ το Σ_1 θα κινείται ομαλά με ταχύτητα $u = 1 \text{ m/sec}$ θεωρώντας θετική τη φορά κίνησης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση. Το σώμα Σ_2 μπορεί να φτάσει μέχρι και τη θέση $-0,6 \text{ m}$ δηλαδή μέχρι τη θέση $-0,6 \text{ m}$. Για να φτάσει εκεί θα χρειασθεί χρόνο $3T/4$ δηλαδή $3\pi/20 \text{ sec} = 0,471 \text{ sec}$. Στον ίδιο αυτόν χρόνο το σώμα θα είχε φτάσει στη θέση $x = -1,0,471 = -0,471 \text{ m}$. Αυτό σημαίνει ότι το Σ_2 θα είχε χτυπήσει το σώμα Σ_1 πριν αυτό φτάσει στη θέση $-0,6 \text{ m}$.

3. Για να βρεθεί η θέση της σύγκρουσης θα πρέπει να ισχύει $\chi_1 = \chi_2$

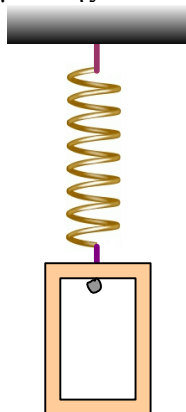
άρα $0,6 \sin 10t = -1 \cdot t$ άρα $0,6 \sin 10t + t = 0$. Η λύση αυτής της εξίσωσης μπορεί να βρεθεί μόνο (;) με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica και βρίσκω λύση προσεγγιστικά $t = 0,3835008768690428 \text{ sec}$.



Άρα η θέση είναι $x = -0,3835008768690428 \text{ m}$.

Θέμα εξετάσεων Κύπρου 1994.

Το σχήμα δείχνει ένα κουτί μάζας M και εσωτερικού ύψους h , κρεμασμένο στο ένα άκρο ελατηρίου κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K . Αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία. Ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας m είναι προσκολλημένο στο εσωτερικό του κουτιού και στο πάνω μέρος του κουτιού. Ξαφνικά, η πλαστελίνη αποκολλάται και πέφτει ελεύθερα προς τα κάτω. Η πλαστελίνη κτυπά στο κάτω μέρος του κουτιού και προσκολλάται σε αυτό, ακριβώς τη στιγμή που το κουτί βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσής του.



α) Να δείξετε ότι το εσωτερικό ύψος του κουτιού είναι: $h = 2mg/K + \pi^2 Mg/2K$

β) Να δείξετε ότι το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος μετά την πλαστική κρούση, δίνεται από την σχέση:

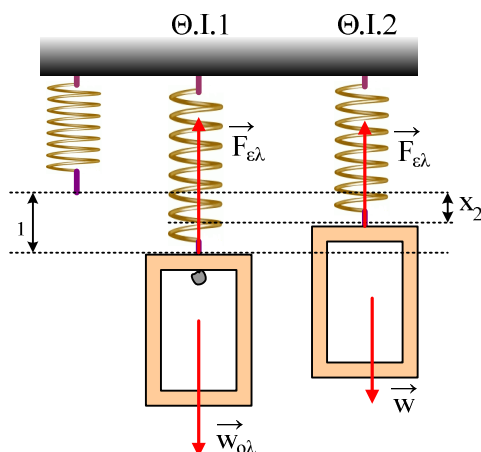
$$A_0' = (mg/K)(4 + \pi^2 M/(M+m))^{1/2}$$

Απάντηση:

Για την αρχική θέση ισορροπίας και για το σύστημα πλαστελίνη-κουτί ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ άρα } F_{ελ} = W_{ολ} \text{ άρα } K \cdot x_1 = (M+m) \cdot g \quad (1),$$

όπου x_1 η απόσταση της αρχικής θέσης ισορροπίας από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.



Για τη θέση ισορροπίας του κουτιού ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ άρα } F_{ελ} = W_{κουτιού} \text{ άρα } K \cdot x_2 = M \cdot g \quad (2)$$

όπου x_2 η απόσταση της θέσης ισορροπίας του κουτιού από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Το εσωτερικό ύψος του κουτιού μπορεί να βρεθεί αν προσθέσω στην ανύψωση του κουτιού την κατακόρυφη απόσταση που διανύει η πλαστελίνη πέφτοντας ελεύθερα. Όταν όμως αποκολλά-

ται η πλαστελίνη το κουτί είναι ακίνητο και εξαιτίας της αποκόλλησης της πλαστελίνης έχουμε αλλαγή θέσης ισορροπίας. Η αρχική θέση για το κουτί είναι και θέση ελάχιστης απομάκρυνσης ($u=0$) για την ταλάντωση του κουτιού ενώ η τελική θέση είναι η θέση μέγιστης απομάκρυνσης για την ταλάντωση του κουτιού από την εκφώνηση. Έτσι αυτές οι δύο θέσεις απέχουν μεταξύ τους $2A_{\text{κουτιού}}$.

$$\text{Όμως το } A_{\text{κουτιού}} = x_1 - x_2 = mg/K.$$

Η πτώση της πλαστελίνης διαρκεί όσο και η ταλάντωση του κουτιού από την Θ.Ε.Α μέχρι Θ.Μ.Α. δηλαδή $T_{\text{κουτιού}}/2$.

Άρα για την ελεύθερη πτώση $y_{\text{πλαστελίνης}} = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ άρα:

$$y_{\text{πλαστελίνης}} = \frac{1}{2} g \cdot (T_{\text{κουτιού}}/2)^2 \quad \text{άρα } y_{\text{πλαστελίνης}} = \frac{1}{2} g \cdot (\pi^2 M/K)$$

$$\text{Άρα } h = 2A_{\text{κουτιού}} + y_{\text{πλαστελίνης}} = 2mg/K + \pi^2 Mg/2K$$

Η ταχύτητα της πλαστελίνης την στιγμή της κρούσης με το κουτί είναι:

$$V = g \cdot t = g \cdot T_{\text{κουτιού}}/2 = g \cdot \pi(M/K)^{1/2}$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση θα βρούμε την ταχύτητα κουτιού-πλαστελίνης μετά την κρούση:

$$m \cdot V = (M+m) V_{\text{συσ.}} \quad (3)$$

Μετά την κρούση έχουμε πάλι αλλαγή της θέσης ισορροπίας για την ταλάντωση αυτή τη φορά του κουτιού-πλαστελίνης. Η νέα θέση ισορροπίας είναι η αρχική θέση ισορροπίας κουτιού πλαστελίνης. Η θέση της κρούσης από την τελική θέση ισορροπίας κουτιού πλαστελίνης απέχει κατακόρυφη απόσταση $2A_{\text{κουτιού}}$.

Έτσι αν εφαρμόσουμε την ΑΔΕΤ για την ταλάντωση μετά την κρούση θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} K (2A_{\text{κουτιού}})^2 + \frac{1}{2} (M+m) \cdot V_{\text{συσ}}^2 = \frac{1}{2} K (A_o')^2 \quad (4)$$

Αν αντικαταστήσουμε την $V_{\text{συσ}}$ από την (3) στην (4) και κάνουμε πράξεις με υπομονή θα φτάσουμε:

$$A_o' = (mg/K)(4 + \pi^2 M/(M+m))^{1/2}$$

ΘΕΜΑ 2^ο :

Ενα απομονωμένο ομογενές άστρο περιστρέφεται γύρω από μία διάμετρό του έχοντας κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής K . Αν λόγω βαρυτικής κατάρρευσης η ακτίνα του άστρου ελλατωθεί στο μισό της αρχικής της τιμής τότε το έργο των βαρυτικών δυνάμεων κατάρρευσης είναι

A. K B. $2K$ Γ. $3K$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι δυνάμεις κατάρρευσης είναι δυνάμεις εσωτερικές του συστήματος το άστρο μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο σύστημα. Έτσι η στροφορμή του άστρου θα παραμείνει σταθερή.

Με την βοήθεια της σχέσης για την κινητική ενέργεια $K = L^2/2I$ και με διαίρεση κατά μέλη για την αρχική και τελική κατάσταση του άστρου θα έχουμε

$$K_{\text{τελ}}/K = L^2/2I_{\text{τελ}}/L^2/2I \quad \text{άρα} \quad K_{\text{τελ}}/K = I/I_{\text{τελ}} \quad \text{άρα} \quad K_{\text{τελ}}/K = \lambda \cdot M \cdot R^2/\lambda \cdot M \cdot (R/2)^2 \quad \text{άρα} \quad K_{\text{τελ}} = 4K$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ $K + W_{\text{κατ}} = 4K$ άρα $W_{\text{κατ}} = 3K$ άρα σωστή απάντηση η Γ.

ΘΕΜΑ 2^ο :

Δύο ομογενείς ράβδοι ίδιου μήκους L με μάζες M και $2M$ αντίστοιχα αφήνονται ταυτόχρονα να περιστραφούν από οριζόντια θέση γύρω από οριζόντιο κοινό άξονα O όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν η κρούση των δύο ράβδων είναι πλαστική τότε:



1) Η κρούση θα συμβεί στην περιοχή A.I B.II Γ. ακριβώς στην κατακόρυφη

2) Μετά την πλαστική κρούση οι ράβδοι: A. Θα φτάσουν στην οριζόντια θέση

B. Δεν θα φτάσουν στην οριζόντια θέση

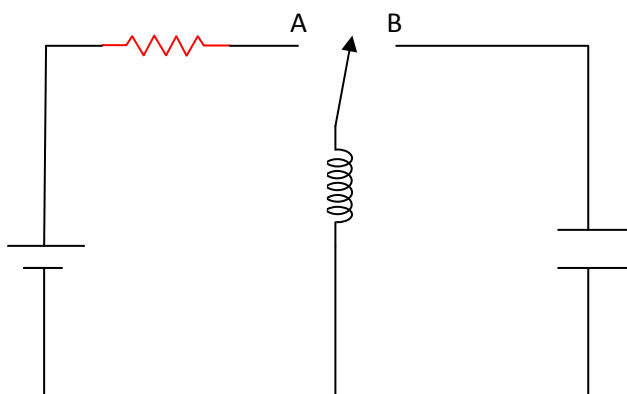
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Οι ράβδοι εκτελούν επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με συνεχώς μειούμενη γωνιακή επιτάχυνση μέχρι την κατακόρυφη θέση τους γιατί το απόστημα του βάρους συνεχώς μειώνεται. Από την σχέση $\Sigma \tau = I \alpha$ και με αντικατάσταση $M \cdot g \cdot d = \lambda \cdot M \cdot L^2 \cdot \alpha$ αγωγών θα προκύψει $\alpha = g \cdot d / \lambda \cdot L^2$. Παρατηρώ ότι η επιτάχυνση είναι ίδια κάθε στιγμή για τις δύο ράβδους. Σωστή απάντηση το Γ.

2) Η κρούση των δύο ράβδων είναι πλαστική άρα ένα μέρος της αρχικής τους ενέργειας θα πάει στο περιβάλλον εξαιτίας της κρούσης. Έτσι το σύστημα δεν μπορεί να έχει και πάλι την αρχική του δυναμική ενέργεια. Άρα δεν μπορεί να φτάσει στην κατακόρυφη θέση. Άρα σωστή απάντηση το B.

ΘΕΜΑ 2^ο:

Στο παρακάτω κύκλωμα ο διακόπτης βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση στη θέση Α. Κάποια στιγμή μεταφέρουμε τον διακόπτη στη θέση Β.



Α) Ποιος οπλισμός του πυκνωτή θα φορτιστεί πρώτος με θετικό φορτίο

Α. Ο κάτω Β. Ο πάνω

Β) Η εξίσωση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα LC μετά την μεταφορά του διακόπτη στην θέση Β μπορεί να έχει εξίσωση αν την στιγμή $t=0$ ο μεταγωγέας πάει ακαριαία από την θέση Α στην θέση Β

Α. $i = -I \sin \omega t$ Β. $i = -I \sin(\omega t + \pi/4)$ Γ. $i = -I \sin(\omega t + 3\pi/2)$

Γ) Αν ο πυκνωτής μπορεί να “αντέξει” διπλάσια τάση της μέγιστης αρχικής πόσης συνολικά φορές ο μεταγωγέας μπορεί να πάει από την θέση Α στη θέση Β για να μην καταστραφεί ο πυκνωτής. Να θεωρηθεί κάθε φορά που ο μεταγωγέας πάει από την θέση Β στην θέση Α το πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα.

Α. Τέσσερις φορές Β. Δύο φορές Γ. Τρεις φορές

Θα πρέπει να υποθέσουμε ότι σε κάθε εναλλαγή από την θέση Α στην Β και από την Β στην Α περνάει κάποιο χρονικό διάστημα έτσι ώστε στην θέση Α το ρεύμα να έχει αποκατασταθεί και στην θέση Β το L-C να έχει προλάβει να έχει εκτελέσει κάποιες ταλαντώσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στην θέση Α αρχικά το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα που έχει φορά προς τα κάτω εξαιτίας της πολικότητας της πηγής. Έτσι μόλις ο διακόπτης πάει από την θέση Α στην Β η τιμή και η φορά της έντασης του ρεύματος στιγμιαία δεν θα αλλάξει. Έτσι αρχικά θα φορτιστεί θετικά ο κάτω οπλισμός του πυκνωτή. Αρα σωστή απάντηση το Α

Β) Την στιγμή που ο διακόπτης πάει στη θέση Β το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι το μέγιστο I . Αρα η μοναδική σχέση που μας δίνει μέγιστη ένταση ρεύματος είναι η εξίσωση στην απάντηση Γ.

Γ) Για κάθε εναλλαγή του διακόπτη από την θέση Α στην θέση Β η ενέργεια του κυκλώματος L-C αυξάνει κατά Ε όπου $E = 1/2 \cdot L \cdot I^2$ με $I = E/R$. Επειδή όταν ο διακόπτης γυρνάει από το Β στο Α το πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα όλη η ενέργεια του LC βρίσκεται πάντα στον πυκνωτή. Έτσι με κάθε εναλλαγή του διακόπτη η ενέργεια του LC αυξάνει κατά Ε. Η ενέργεια του πυκνωτή δίνεται από την σχέση $U_E = 1/2 \cdot C \cdot V^2$. Η τάση δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από 2V. Άρα η ενέργεια του πυκνωτή δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από 4Ε. Άρα μόνο 4 φορές μπορεί ο διακόπτης να πάει από την θέση Α στην Β. Άρα σωστή απάντηση το Α.

Θέμα Β: Σύνθεση τριών ταλαντώσεων

Μικρό σώμα εκτελεί ταυτόχρονα τρεις απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

- a) $x_1 = 0,1\eta\mu 100\pi t$
- b) $x_2 = 0,05\eta\mu(100\pi t + \pi)$ (S.I)
- c) $x_3 = 0,05\eta\mu 102\pi t$

Ποια η εξίσωση που περιγράφει την συνισταμένη ταλάντωση που εκτελεί το σώμα;

Απάντηση:

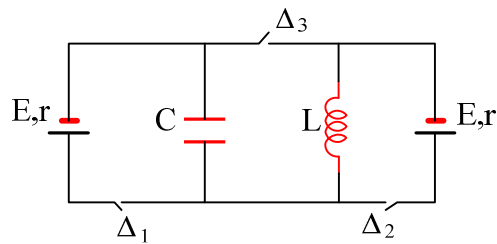
Παρατηρώ ότι οι δύο πρώτες εξισώσεις έχουν διαφορά φάσης π . Έτσι το άθροισμα των δύο αυτών εξισώσεων θα είναι $x_{1,2} = 0,05\eta\mu 100\pi t$ (SI).

Η εξίσωση τώρα $x_{1,2}$ μαζί με την εξίσωση x_3 θα δημιουργήσουν διακρότητα με εξίσωση

$$x_{\text{ολ}} = 0,1\sigma\upsilon\nu\pi t.\eta\mu 101\pi t \quad (\text{S.I})$$

Ηλεκτρική ταλάντωση με μέγιστους ρυθμούς.

Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα



Οι πηγές είναι όμοιες και έχουν ΗΕΔ $E=120\text{V}$ και εσωτερική αντίσταση $r=12\Omega$, ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C=1\mu\text{F}$, το πηνίο είναι ιδανικό και έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L=144\mu\text{H}$. Οι διακόπτες Δ_1 και Δ_2 κλείνουν ταυτόχρονα ενώ ο διακόπτης Δ_3 μένει ανοιχτός. Την χρονική στιγμή που οι ρυθμοί αποταμίευσης της ενέργειας στο πηνίο και στον πυκνωτή γίνουν ταυτόχρονα μέγιστοι ανοίγουμε τους διακόπτες Δ_1 και Δ_2 και κλείνουμε τον διακόπτη Δ_3 . Να βρεθούν:

- Α) Η εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο θεωρώντας $t=0$ την χρονική στιγμή που κλείνουμε τον διακόπτη Δ_3 .
- Β) Ο μέγιστος ρυθμός αποθήκευσης της ενέργειας στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή μετά το κλείσιμο του Δ_3 .

Την χρονική στιγμή $t_1=15\pi \cdot 10^{-6}\text{sec}$ μετά το κλείσιμο του διακόπτη Δ_3 απομακρύνουμε ακαριαία την απόσταση των οπλισμών του πυκνωτή τετραπλασιάζοντας την αρχική τους απόσταση.

Να βρεθούν:

- Γ) Το έργο που δαπανήθηκε για να απομακρυνθούν οι οπλισμοί του πυκνωτή.
- Δ) Η γραφική παράσταση του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο μετά το κλείσιμο του διακόπτη Δ_3 .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το κύκλωμα με τον πυκνωτή θα έχουμε

$$E \cdot I \cdot t = I^2 \cdot r \cdot t + P_C \cdot t \quad \text{θα πάρουμε την δευτεροβάθμια ως προς } I$$

$$I^2 \cdot r - E \cdot I + P_C = 0$$

που θα πρέπει να έχει θετική διακρίνουσα άρα $P_c \leq E^2/4r$ και για μέγιστο ρυθμό αποθήκευσης στον πυκνωτή το $I=E/2r=5A$

Η πολική τάση της πηγής είναι ίση με την τάση στα άκρα του πυκνωτή $V_{\text{πολ}}=V_c$ άρα $E-I.r=V_c$ άρα $V_c=E/2=60V$ άρα το φορτίο του πυκνωτή εκείνη την στιγμή θα είναι:

$$q=C.V_c=6.10^{-5}C.$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το κύκλωμα με το πηνίο θα έχουμε

$$E.I.t=I^2.r.t + P_L.t \quad \text{θα πάρουμε την δευτεροβάθμια ως προς } I$$

$$I^2.r - E.I + P_L=0$$

που πρέπει να έχει θετική διακρίνουσα άρα $P_L \leq E^2/4r$ και για μέγιστο ρυθμό αποθήκευσης ενέργειας στο πηνίο το $I=i=E/2r=5A$

Την στιγμή λοιπόν που κλείνουμε τον διακόπτη Δ_3 και ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με τον κάτω οπλισμό θετικά φορτισμένο αλλά και το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα με φορά προς τα επάνω.

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για το κύκλωμα L-C θα έχουμε

$$\frac{1}{2} q^2/C + \frac{1}{2} L.i^2 = \frac{1}{2} Q^2/C \quad \text{θα βρούμε } Q=6\sqrt{2}.10^{-5}C.$$

Ετσι η εξίσωση του φορτίου θα δίνεται από την σχέση:

$$q=Q\sin(\omega t+\varphi) \quad \text{για } t=0$$

$\sin\varphi=\sqrt{2}/2$ και επειδή το $i<0$ $\varphi=\pi/4$. Το $\omega=1/\sqrt{L.C}=10^6/12r/s$.

$$\text{Άρα } q=6\sqrt{2}.10^{-5}\sin(10^6t/12+\pi/4) \text{ (S.I.) (1)}$$

B) Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πυκνωτή μετά το κλείσιμο του διακόπτη Δ_3 θα δίνεται από την σχέση

$$P_c=V_c.i=q.i/C=Q\sin(\omega t+\pi/4).(-I\cos(\omega t+\pi/4))=-Q.I\cos(2\omega t+\pi/2)/2C$$

και θα έχει μέγιστη τιμή $P_{c\max}=Q.I/2C=3600J/s$.

Γ) Με αντικατάσταση στην (1) του χρόνου t_1 θα έχουμε $q=0C$ δηλαδή ο πυκνωτής την παραπάνω χρονική στιγμή είναι αφόρτιστος. Άρα δεν θα δαπανηθεί έρ-

γο για να απομακρυνθούν οι οπλισμοί σε τετραπλάσια απόσταση της αρχικής απόστασης. Έτσι λοιπόν η ενέργεια της ταλάντωσης θα διατηρηθεί σταθερή.

Δ) Η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από την σχέση $C = \epsilon_0 S / l$ άρα $C' = C / 4$

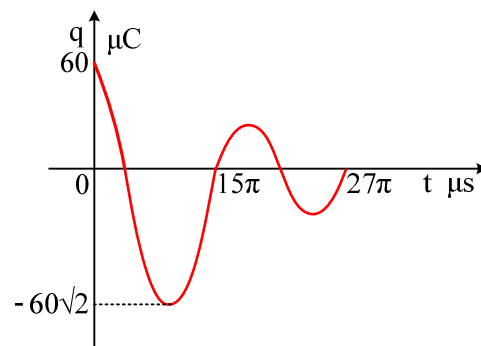
Από την σχέση της ολικής ενέργειας ταλάντωσης $E = Q^2 / 2C$ το νέο

$$Q' = Q / 2 = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-5} C$$

ενώ από την σχέση της περιόδου $T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$ η νέα περίοδος θα γίνει :

$$T' = T / 2 = 12\pi \cdot 10^{-6} s$$

έτσι η γραφική παράσταση θα είναι



Υστερόγραφο για τους λάτρεις των χρονοκυκλωμάτων R-C & R-L

Από την σχέση για το ρεύμα στην φόρτιση του πυκνωτή $I = E / r \cdot e^{-t/r \cdot C}$ θα βρίσκαμε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το χρονοκύκλωμα για να φτάσει το ρεύμα στο $I = E / 2r$ θα ήταν $t = r \cdot C \cdot \ln 2 = 12 \cdot 10^{-6} \cdot \ln 2 \text{ sec}$

Ενώ για την αποκατάσταση του κυκλώματος R-L και από την σχέση του ρεύματος

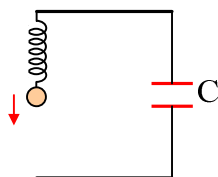
$I = E / r \cdot (1 - e^{-t/L})$ για να φτάσει το ρεύμα στην τιμή $I = E / 2r$ θα χρειαζόταν και πάλι χρόνος :

$$t = L / r \cdot \ln 2 = 12 \cdot 10^{-6} \ln 2 \text{ sec.}$$

Αρα ταυτόχρονα και τα δύο κυκλώματα πετυχαίνουν μέγιστο ρυθμό αποθήκευσης ενέργειας και στον πυκνωτή αλλά και στο πηνίο.

Μηχανική- Ηλεκτρική Ταλάντωση.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα ελατήριο με σταθερά $K=10\text{N/m}$ που ταυτόχρονα όταν έχει το φυσικό του μήκος συμπεριφέρεται και σαν ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L=10\text{mH}$. Το ελατήριο-πηνίο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε αγώγιμο μηδενικής αντίστασης ταβάνι. Ο πυκνωτής χωρητικότητας $C=2\mu\text{F}$ του σχήματος συνδέεται μέσω άκαμπτων χωρίς αντίσταση αγωγών και είναι αρχικά φορτισμένος με φορτίο Q . Σημειακό αγώγιμο χωρίς αντίσταση σώμα μάζας $M=0,1\text{ kg}$ συνδέεται με το ελατήριο-πηνίο ενώ αυτό έχει το φυσικό του μήκος $L_0=0,3\text{m}$.



Εκτοξεύουμε το σημειακό σώμα μάζας M με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα U_0 έτσι ώστε ο ελατήριο μόλις και να φτάσει στην κάτω αγώγιμη και ακλόνητη ράβδο διπλασιάζοντας το φυσικό του μήκος. Εκείνη τη στιγμή ο σημειακό σώμα κολλάει στην κάτω ράβδο και έτσι αρχίζουν ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Να βρεθούν:

- A) Το μέτρο της αρχικής ταχύτητα U_0 .
- B) Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Από τη συνθήκη ισορροπίας

$$M \cdot g = K \cdot x_1 \quad \text{άρα } x_1 = 0,1\text{m}$$

Η ταλάντωση ξεκινάει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το σημειακό σώμα σταματάει μόλις το ελατήριο διπλασιάσει το φυσικό του μήκος. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A = L_0 - x_1 = 0,3 - 0,1 = 0,2\text{m}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ θα έχουμε $\frac{1}{2} \cdot M \cdot U_0^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot K A^2$ άρα μετά τις πράξεις $U_0 = \sqrt{3}\text{m/sec}$.

Β) Όπως γνωρίζουμε από την ύλη της Β Λυκείου ο συντελεστής αυτεπαγωγής δίνεται από τη σχέση $L = \mu_0 \cdot N^2 A / l$. Έτσι αφού το μήκος του ελατηρίου έχει διπλασιασθεί σε σχέση με το φυσικό του μήκος ο συντελεστής αυτεπαγωγής θα έχει μειωθεί στο μισό. Άρα $L' = L/2 = 5 \text{ mH}$.

Έτσι η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων θα δίνεται από τη σχέση

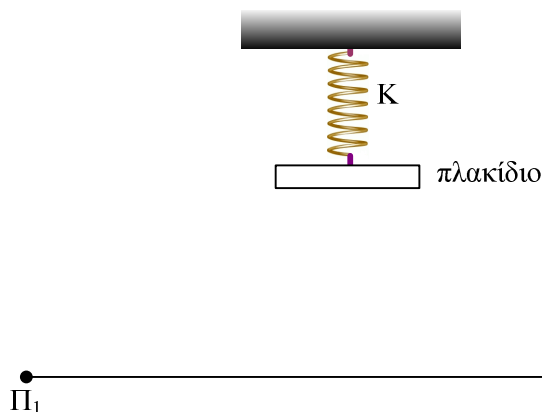
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{L' \cdot C} = 2\pi \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Πηγή Π_1 παράγει Η/Μ κύμα που όταν διαδίδεται σε γυάλινο πλακίδιο έχει εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου:

$$E = 0,02\eta\mu 2\pi(1,5 \cdot 10^8 t - x) \text{ (S.I.)}$$

Το πλακίδιο δένεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθερά $K=100\text{N/m}$ όπως στο σχήμα.



Η πηγή συνεχίζει να εκπέμπει Η/Μ κύματα τα οποία φτάνουν σε ένα σημείο M είτε απευθείας είτε μέσω ανάκλασης πάνω στο πλακίδιο. Το κατακόρυφο ελατήριο βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1 M$ που έχει μήκος 12m . Το πλακίδιο αρχίζει να εκτελεί α.α.τ. με το κατώτερο σημείο της ταλάντωσης του να απέχει ελάχιστη απόσταση από το ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1 M$ 8m .

Όταν το πλακίδιο βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του στο σημείο M παρατηρούμε ενισχυτική συμβολή χωρίς να ανιχνεύουμε άλλο σημείο ενίσχυσης στην διάρκεια της ταλάντωσης του πλακιδίου.

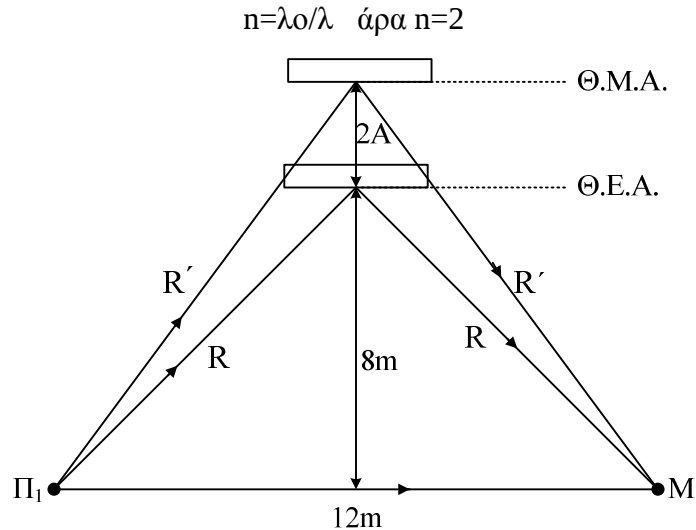
Να βρεθούν:

- A) Ο δείκτης διάθλασης του πλακιδίου και το μήκος κύματος στο κενό.
- B) Η ενέργεια της ταλάντωσης του πλακιδίου.

Να θεωρηθεί $\sqrt{85}=9,2$. Η ανάκλαση δεν επηρεάζει την κίνηση του πλακιδίου ούτε η κίνηση του πλακιδίου επηρεάζει την διάδοση του ΗΜ κύματος.

ΛΥΣΗ

A) Από την εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου $f=1,5 \cdot 10^8$ Hz ενώ το μήκος κύματος στο γυαλί είναι $\lambda=1\text{m}$. Το μήκος κύματος στο κενό θα είναι $3 \cdot 10^8 = \lambda \cdot 1,5 \cdot 10^8$ άρα $\lambda_0=2\text{m}$.



B) Στο σημείο M επιτυγχάνεται ενίσχυση άρα με βάση την συνθήκη ενίσχυσης για την περίπτωση που ο ανακλαστήρας βρίσκεται στην ΘΕΑ θα πάρουμε

$$2R - R_1 = k\lambda_0 \quad (1)$$

Ενώ όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται στην ΘΜΑ θα έχουμε

$2R' - R_1 = (k+1)\lambda_0$ (2) αφού η διαδρομή $2R' > 2R$ και δεν υπάρχει άλλο σημείο ενίσχυσης μέχρι ο ανακλαστήρας να φτάσει στην ΘΜΑ.

Αν αφαιρέσουμε την σχέση (2) από την (1) θα πάρουμε $2R' - 2R = \lambda_0$ Από Π.Θ. θα πάρουμε $R=10\text{m}$ άρα $R'=11\text{m}$.

Από το Π.Θ.

$$\text{Το } R' = \sqrt{6^2 + (8+2A)^2} \quad \text{Άρα } A=0,6\text{m}$$

Έτσι η ενέργεια ταλάντωσης του πλακιδίου θα είναι $E = \frac{1}{2} K A^2 = 18 \text{ J}$

Η γέφυρα των Σερβίων



Ο Δήμαρχος Σερβίων-Βελβεντού αποφασίζει να εκμεταλλευτεί την πανέμορφη υψηλή γέφυρα Σερβίων φτιάχνοντάς τη, χώρο για όλους τους λάτρεις των extreme sports, πίστα για bungee jumping. Η υψηλή γέφυρα Σερβίων έχει ύψος τώρα το φθινόπωρο 51,8m από την επιφάνεια του νερού. Ένας αγανακτισμένος, από τα νέα μέτρα της κυβέρνησης και της Δημοτικής αρχής, Σερβιώτης θέλει να δοκιμάσει την τύχη του και τις αντοχές του κάνοντας bungee jumping. Ο θαρραλέος Σερβιώτης που έχει ύψος 1,80m μέχρι τον σβέρκο του ονόματι Λαός έχει μάζα 0,1tn (για να πλησιάζει τα κιλά του προέδρου του Δημοτικού Συμβουλίου) δένεται από ελαστικό σκοινί που παίζει το ρόλο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=1000\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $L=40\text{m}$. Από λάθος (μπορεί και επίτηδες) όμως περνάει την θηλιά του σκοινιού όχι στην μέση του αλλά στον σβέρκο του. Ο Λαός πηδάει χωρίς αρχική ταχύτητα όρθιος και χωρίς να περιστρέφεται προς την επιφάνεια της λίμνης από τη γέφυρα. Να βρεθούν:

- Α) Πόσο θα είναι το πλάτος ταλάντωσης του Λαού κατά την κάθοδο;
- Β) Υπάρχει η πιθανότητα ο Λαός να πιάσει κάποιο ψάρι κατά την πτώση του; (όποιος δεν βρέξει τον κώλο του ψάρια δεν τρώει)
- Γ) Αν η μέγιστη δύναμη που μπορεί να δεχθεί ο λαιμός του Λαού χωρίς να σπάσει είναι $F_{\max}=11.000\text{N}$ ο Λαός θα αντέξει τελικά;
- Δ) Τι ελάχιστη ενέργεια θα έπρεπε να δώσει η Madame M (που ανέλαβε τελικά διοικητής της επιχείρησης) στον Λαό, στην αρχική του θέση ώστε να τελειώνουμε με τον Λαό, αν υποθέσουμε ότι ο Λαός μετά την εμφάνιση της Madame M φοβήθηκε και μαζεύτηκε κουβάρι κατά την πτώση του. Το μήκος της θηλιάς να θεωρηθεί αμελητέο μπροστά στο μήκος του σκοινιού και το σχοινί δένεται από την γέφυρα στο ίδιο ύψος με το ύψος του σβέρκου του Λαού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Α) Η κίνηση του Λαού μέχρι το σχοινί να αποκτήσει το φυσικό του μήκος είναι ελεύθερη πτώση. Έτσι με τη βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε:

$$MgL = \frac{1}{2} Mv^2 \quad \text{άρα } v = \sqrt{800} \text{ m/s.}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για το σύστημα θα βρεθεί από την ισορροπία των δυνάμεων:

$$Mg = Kx_1 \quad \text{άρα } x_1 = 1\text{m.}$$

Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για την γ.α.τ που θα ακολουθήσει κατά την κάθοδο θα έχουμε

$$\frac{1}{2} Kx_1^2 + \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} KA^2 \text{ θα βρούμε } A=9\text{m.}$$

- B) Ο Λαός θα κατέβει ύψος ίσο με το άθροισμα του μήκους του σχοινιού την επιμήκυνση του σχοινιού από την θέση φυσικού μήκους του μαζί με το ύψος μέχρι το σημείο πρόσδεσης του σχοινιού και το πλάτος ταλάντωσης έτσι συνολικά θα είναι $H=L+x_1+A+H_1=51,8\text{m}$. Έτσι τα δάχτυλα των ποδιών του μόλις και δεν θα ακουμπήσουν στην επιφάνεια της λίμνης. Έτσι ο Λαός δεν υπάρχει πιθανότητα να τσιμπήσει κάποιο ψάρι.

- Γ) Η μέγιστη δύναμη που θα δεχθεί ο Λαός από το σχοινί θα δίνεται από την σχέση:

$$F_{\max}=Kx_{\max}=K(x_1+A)=10.000\text{N.}$$

Έτσι ο Λαός, σε πρώτη φάση, θα την γλιτώσει.

- Δ) Για να «τελειώνουμε» με το Λαό θα πρέπει η μέγιστη δύναμη που θα αναπτυχθεί από το νήμα να γίνει:

$$F_{\max}=11000\text{N} \text{ άρα } K(x_1+A')=11.000 \text{ άρα } A'=10\text{m.}$$

Έτσι με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για την στιγμή του τεντώματος του νήματος θα έπρεπε να έχουμε

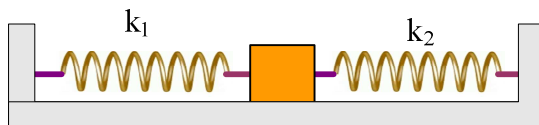
$$\frac{1}{2} Kx_1^2 + K_{\Lambda\sigma\upsilon} = \frac{1}{2} KA'^2 \quad K_{\Lambda\sigma\upsilon}=49.500\text{J}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ και της madame M για την πτώση του Λαού θα έχουμε

$$MgL + E_{\min\text{madame}} = K_{\Lambda\sigma\upsilon} \quad \text{άρα } E_{\min\text{madame}}=9.500\text{J.}$$

Ένα σώμα- Δύο ταλαντώσεις.

Σώμα μάζας $m=4\text{kg}$ ισορροπεί ανάμεσα σε δύο οριζόντια ελατήρια με σταθερές $K_1=100\text{N/m}$ και $K_2=300\text{N/m}$.



Τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος στη θέση ισορροπίας του σώματος m και το ελατήριο με σταθερά K_1 είναι δεμένο με το σώμα ενώ το ελατήριο με σταθερά K_2 είναι σε επαφή με το σώμα χωρίς όμως να είναι συνδεδεμένο με αυτό. Δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα $v_0=1\text{m/s}$ έτσι ώστε το ελατήριο K_2 να αρχίσει να συσπειρώνεται. Να βρεθούν:

- α) Η περίοδος της περιοδικής κίνησης που θα εκτελέσει το σώμα.
- β) Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για χρονικό διάστημα μιας περιόδου της περιοδικής κίνησης. Θετική φορά να θεωρηθεί η φορά της αρχικής ταχύτητας v_0 .

Απάντηση:

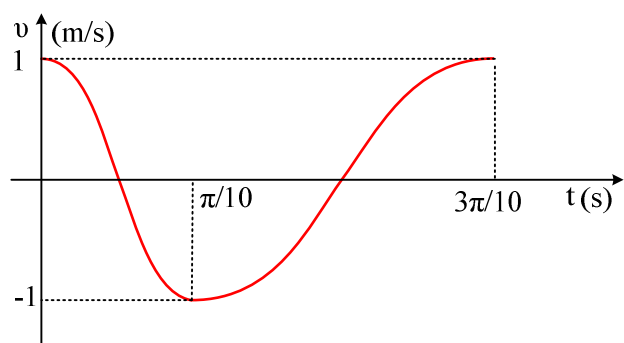
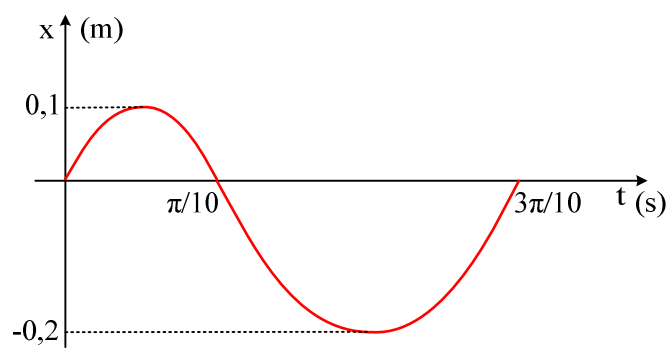
- α) Η κίνηση του σώματος μάζας m μπορεί να χωριστεί σε δύο ξεχωριστές αλλά διαδοχικές κινήσεις. Η πρώτη είναι "μισή" γ.α.τ. με σταθερά επαναφοράς $D_1=K_1+K_2$ ενώ η δεύτερη είναι επίσης "μισή" γ.α.τ. με σταθερά $D_2=K_1$ αφού το ελατήριο με σταθερά K_2 μετά την επαναφορά του σώματος στην αρχική θέση δεν παίζει πλέον κανένα ρόλο. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε την παραπάνω κίνηση σαν μια περιοδική κίνηση η οποία αποτελείται από δύο διαδοχικές "μισές" γ.α.τ. με περίοδο $T=T_1/2 + T_2/2 = \pi/10 + \pi/5 = 3\pi/10 \text{ s}$. Η μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα είναι κοινή και για τις δύο "μισές" γ.α.τ. και άρα $v_0 = \omega_1 \cdot A_1$ άρα

$$A_1 = 0,1\text{m}$$

ενώ $v_0 = \omega_2 \cdot A_2$ άρα:

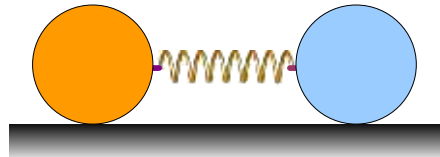
$$A_2 = 0,2\text{m}.$$

- β) Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις με βάση τα παραπάνω, είναι αυτές του σχήματος:



Ένας κύλινδρος με μια σφαίρα.

Στο παρακάτω σχήμα ο κύλινδρος έχει μάζα $m_1=14\text{Kg}$ και ακτίνα R ενώ η σφαίρα έχει μάζα $m_2=15\text{Kg}$ και ακτίνα επίσης R . Το σύστημα των δύο στερεών ισορροπεί σε οριζόντιο έδαφος με την βοήθεια ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου και οριζόντιου νήματος. Το ελατήριο έχει σταθερά $K=4200\text{N/m}$ είναι συσπειρωμένο κατά $x=0,4\text{m}$ και δεν είναι δεμένο σε κάποιο από τα δύο στερεά. Το κέντρα των δύο στερεών και το ελατήριο βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



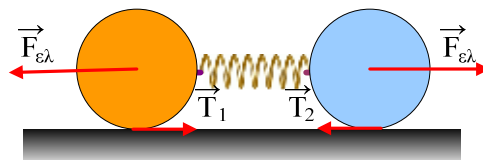
Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και τα δύο σώματα αρχίζουν να κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν. Να βρεθούν:

- A) Οι τελικές ταχύτητες των κέντρων μάζας των στερεών σωμάτων.
- B) Τι ποσοστό της αρχικής ενέργειας του ελατηρίου πήρε τελικά το κάθε στερεό σώμα;

Για την σφαίρα $I_{cm}=0,4MR^2$ και για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5.M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

A)



Εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση του κάθε στερεού θα έχουμε

Για τον κύλινδρο $K \cdot x - T_1 = M_1 \cdot a_1$ (1) $T_1 \cdot R = 0,5 \cdot M_1 \cdot R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 1}$ άρα $T_1 = 0,5 \cdot M_1 \cdot a_1$ (2)

Από (1) και (2) $K \cdot x = M_1 \cdot a_1 + 0,5 \cdot M_1 \cdot a_1$ και με αντικατάσταση $100x = 21 \cdot a_1$ (3) (S.I.)

Για την σφαίρα $K \cdot x - T_2 = M_2 \cdot a_2$ (4) $T_2 \cdot R = 0,4 \cdot M_2 \cdot R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2}$ άρα $T_2 = 0,4 \cdot M_2 \cdot a_2$ (5)

Από (4) και (5) $K \cdot x = M_2 \cdot a_2 + 0,4 \cdot M_2 \cdot a_2$ και με αντικατάσταση $100x = 21 \cdot a_2$ (6) (S.I.)

Από τις εξισώσεις (5) και (6) παρατηρώ ότι οι επιταχύνσεις των κέντρων μάζας των δύο στερεών είναι συνεχώς ίσες κατά μέτρο. Αρα τα δύο κέντρα μάζας των στερεών θα έχουν συνεχώς την ίδια ταχύτητα.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα των δύο στερεών θα έχουμε

$$U_{ελ} = K_{μετκυλ} + K_{περκυλ} + K_{μετσφαιρ} + K_{περσφαιρ}$$

$$1/2 Kx^2 = 1/2 M_1 \cdot U^2 + 1/2 I_1 \cdot \omega_1^2 + 1/2 M_2 \cdot U^2 + 1/2 I_2 \cdot \omega_2^2$$

μετά τις πράξεις

$$U = 4 \text{ m/sec.}$$

Β) Η κινητική ενέργεια της σφαίρα θα είναι:

$$K_{σφ} = 1/2 M_2 \cdot U^2 + 1/2 I_2 \cdot \omega_2^2 = 168 \text{ J}$$

Ενώ η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου θα είναι:

$$K_{κυλ} = 1/2 M_1 \cdot U^2 + 1/2 I_1 \cdot \omega_1^2 = 168 \text{ J}$$

Αρα το κάθε στερεό πήρε το 50% της αρχικής ενέργειας του ελατηρίου.

Ένας κύλινδρος και μια σφαίρα μαζί.

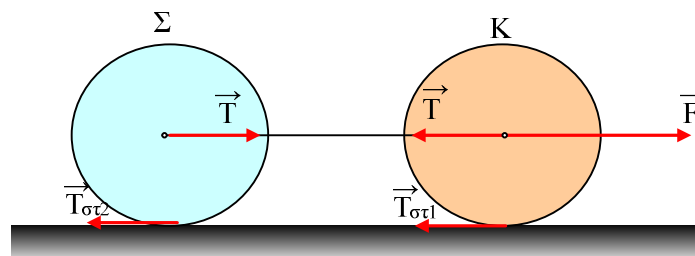
Κύλινδρος μάζας $M_1=2\text{kg}$ είναι δεμένος με σκοινί με σφαίρα μάζας $M_2=5\text{kg}$ ίδιας ακτίνας με τον κύλινδρο. Το σχοινί είναι με τέτοιο τρόπο περασμένο στο κέντρο της σφαίρας και του κυλίνδρου ώστε και η σφαίρα και ο κύλινδρος να μπορούν να περιστρέφονται γύρω από το κέντρο τους και το σχοινί να είναι συνεχώς οριζόντιο και τεντωμένο. Στο κέντρο της σφαίρας έχουμε στερεώσει σημειακή ηχητική πηγή που μπορεί να παράγει ήχο συχνότητας $F_s=660\text{Hz}$ ενώ στο κέντρο του κυλίνδρου έχουμε στερεώσει σημειακό ανιχνευτή ήχων. Το σύστημα ισορροπεί σε οριζόντιο δάπεδο με το σχοινί να είναι τεντωμένο. Την χρονική στιγμή $t=0$ εφαρμόζουμε οριζόντια σταθερή δύναμη $F=10\text{N}$ στο κέντρο του κυλίνδρου με αποτέλεσμα και ο κύλινδρος αλλά και σφαίρα να αρχίζουν να κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν. Την στιγμή $t=10\text{sec}$ το πειραχτήρι ο μικρός Θανάσης (που γιορτάζει σήμερα) βάζει φωτιά στο σκοινί με αποτέλεσμα αυτό να κοπεί ακαριαία. Η δύναμη F συνεχίζει να ασκείται στον κύλινδρο και μετά το κόψιμο του σχοινιού και ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

- A) Να βρεθεί η επιτάχυνση του συστήματος πριν το κόψιμο και μετά το κόψιμο του σχοινιού.
- B) Να γίνει η γραφική παράσταση της συχνότητας που ανιχνεύει ο ανιχνευτής ήχων σε συνάρτηση με τον χρόνο.
- Γ) Να βρεθεί το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μεταφέρθηκε στην σφαίρα μέχρι την στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Για την σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4MR^2$ και για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $U_{\text{ηχ}}=340\text{m/s}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Από τους νόμους Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου και της σφαίρας θα έχουμε

Για κύλινδρο:

$$F - T - T_{\sigma\tau 1} = M_1 \cdot \alpha \quad (1)$$

$$\text{και } T_{\sigma\tau 1} \cdot R = 0,5 M_1 R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \quad \text{άρα}$$

$$T_{\sigma\tau 1} = 0,5 M_1 \cdot \alpha \quad (2)$$

και από την (1) και (2)

$$F - T = 1,5 M_1 \cdot \alpha \quad (3)$$

Για την σφαίρα:

$$T - T_{\sigma\tau 2} = M_2 \cdot \alpha \quad (4)$$

$$\text{και } T_{\sigma\tau 2} \cdot R = 0,4 M_2 R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \quad \text{άρα}$$

$$T_{\sigma\tau 2} = 0,4 M_2 \cdot \alpha \quad (5)$$

από (4) και (5)

$$T = 1,4 M_2 \cdot \alpha \quad (6)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (6) στην (3) θα πάρουμε $\alpha = 1 \text{ m/sec}^2$.

Μετά το κόψιμο του νήματος από τους νόμους Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε

$$F - T_{\sigma\tau 1}' = M_1 \cdot \alpha_2$$

$$\text{και } T_{\sigma\tau 1}' \cdot R = 0,5 M_1 R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}}'$$

$$\text{άρα } F - 0,5 M_1 \cdot \alpha_2 = M_1 \cdot \alpha_2$$

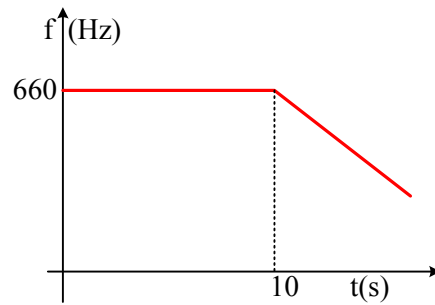
$$\text{άρα } \alpha_2 = 10/3 \text{ m/sec}^2.$$

Η σφαίρα δεν δέχεται πια την τάση του νήματος έτσι θα εκτελεί ομαλή μεταφορική και στρωφική κίνηση.

Β) Για όσο χρόνο τα σώματα ήταν δεμένα με το σχοινί είχαν και κοινές ταχύτητες. Η μεταξύ τους απόσταση ήταν σταθερή άρα η συχνότητα που κατέγραφε ο ανιχνευτής ήταν αυτή της πηγής. Μετά το κόψιμο του σχοινιού η πηγή κινείται με σταθερή ταχύτητα $U_{\text{πηγής}} = a \cdot t = 10 \text{ m/sec}$ ενώ ο ανιχνευτής κινείται με ταχύτητα $U_{\text{αν}} = 10 + 10 \cdot t'/3$ (S.I.) όπου t' ο χρόνος μετά το κόψιμο του σχοινιού. Με βάση τον τύπο για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε την συνάρτηση

$$F_{\text{παρ}} = (340 - 10 - 10t'/3)660 / (340 - 10) = 660 - 20t'/3 \quad (\text{S.I.})$$

Αρα η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή



Γ) Το έργο τη δύναμης μέχρι το κόψιμο του νήματος θα δίνεται από την σχέση:

$$WF = F \cdot X = 10 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 10^2 = 500 \text{ J}$$

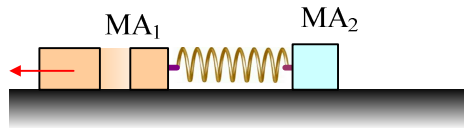
Η κινητική ενέργεια της σφαίρας θα είναι:

$$K_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} M U_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = 350 \text{ J} \quad \text{άρα το}$$

$$\Pi = 350 \cdot 100\% / 500 = 70\%$$

Ένα μηχανικό σύστημα μετά από έκρηξη.

Σώμα μάζας $M_{A1}=6\text{Kg}$ είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σε δεύτερο σώμα μάζας $M_{A2}=2\text{Kg}$. Το όλο σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλου μήκους. Ξαφνικά και εξαιτίας μιας έκρηξης το σώμα M_{A1} σπάει σε δύο κομμάτια που το ένα έχει διπλάσια μάζα από το άλλο. Από αυτά το μικρότερο κομμάτι μένει δεμένο στο ελατήριο και κινείται οριζόντια έτσι ώστε να αρχίζει να συσπειρώνει το ελατήριο. Αν η ενέργεια της έκρηξης που μεταφέρθηκε στα κομμάτια του M_{A1} ήταν 6 J να βρεθούν:



- A) Τα μέτρα των ταχυτήτων των κομματιών του M_{A1} μετά την έκρηξη
- B) Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου
- Γ) Τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων όταν το ελατήριο αποκτήσει για πρώτη φορά μετά την έκρηξη το φυσικό του μήκος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για την έκρηξη και με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε:

$$0 = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

Το άθροισμα των δύο μαζών θα είναι $m_1 + m_2 = 6$ (2) και $m_1 = 2m_2$ και με την βοήθεια της ΑΔΕ για την έκρηξη θα έχουμε $E_{εκρ} = \frac{1}{2}m_1 \cdot U_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot U_2^2$

Ετσι θα βρούμε $m_1 = 4\text{Kg}$ $m_2 = 2\text{Kg}$ και $v_1 = 1\text{m/sec}$ και $v_2 = 2\text{m/sec}$.

- B) Το σώμα m_2 μένει δεμένο στο ελατήριο και έχει αρχική ταχύτητα $v_2 = 2\text{m/sec}$. Ετσι το ελατήριο θα αρχίζει να συσπειρώνεται και το σώμα m_2 να εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση. Η άλλη όμως άκρη του ελατηρίου βρίσκεται στο σώμα M_{A2} . Ετσι το σώμα αυτό αρχίζει να επιταχύνεται. Η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα συμβεί όταν τα σώματα αποκτήσουν την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Τότε όμως η συσπείρωση του ελατηρίου θα είναι μέγιστη. Με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε για το σύστημα $m_2 v_2 = (M_{A2} + m_2) v_{κοινή}$ άρα $v_{κοινή} = 1\text{m/sec}$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε $K_2 = K_{συ} + U_{ελmax}$ άρα $x_{max} = 0,2\text{m}$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και με έναν άλλον τρόπο

Από την ΑΔΟ για μία τυχαία θέση του συστήματος $m_2 \cdot U_2 = m_2 \cdot U_3 + M_{A2} \cdot U_4$ άρα

$4 = 2U_3 + 2U_4$ (S.I) (3) και από την ΑΔΕ $K_2 = K_3 + K_4 + U_{ελ}$ άρα

$$4 = U_3^2 + U_4^2 + 50x^2 \text{ (S.I.) (4)}$$

με αντικατάσταση της (3) στην (4) θα προκύψει η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς U_3 :

$$U_3^2 - 2U_3 + 25x^2 = 0 .$$

Το U_3 δεν μπορεί να πάρει φανταστικές τιμές άρα η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα πρέπει να είναι θετική.

Άρα $\Delta \geq 0$ άρα $4 - 100x^2 \geq 0$ άρα $x \leq 0,2$ άρα $x_{\max} = 0,2m$.

Γ) Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ και ΑΔΕ για το σύστημα αμέσως μετά την έκρηξη και μέχρι την στιγμή που το ελατήριο θα αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος θα πάρουμε $m_2 \cdot U_2 = m_2 \cdot U_5 + M_{A2} \cdot U_6$ (5) $K_2 = K_5 + K_6$ άρα

$$\frac{1}{2} m_2 \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot U_5^2 + \frac{1}{2} M_{A2} \cdot U_6^2$$

βλέπουμε ότι οι σχέσεις ισοδυναμούν με τις σχέσεις που θα έδινε μία ελαστική κρούση κινούμενου με ακίνητου σώματος. Επειδή λοιπόν και επειδή οι μάζες m_2 και M_{A2} είναι ίσες θα ανταλλάξουν ταχύτητες την στιγμή που το ελατήριο θα αποκτήσει για πρώτη φορά το φυσικό του μήκος.

Άρα $U_5 = 0 \text{ m/sec}$ και $U_6 = 2 \text{ m/sec}$.

Ένα κύμα στον.. ιστό της αράχνης

Σώμα μάζας $M=4\text{Kg}$ είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά $K=100\pi^2\text{N/m}$ και ισορροπεί σε ύψος $H=3,2\text{m}$ το έδαφος. Στο σώμα είναι δεμένος ένας οριζόντιος αβαρής ιστός αράχνης με μεγάλο μήκος. Δύο αράχνες βρίσκονται σε αποστάσεις $0,3\text{m}$ και $0,5\text{m}$ αντίστοιχα από το σώμα κολλημένες στον ιστό. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στον ιστό είναι $V=1\text{m/sec}$. Ένα δεύτερο σώμα μάζας $M=4\text{Kg}$ κινείται κατακόρυφα και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο έχοντας ταχύτητα μέτρου $0,5\pi\text{ m/sec}$. Την στιγμή που το δεύτερο σώμα φτάνει στο έδαφος :

- α) Να σχεδιαστεί η μορφή του ιστού της αράχνης.
- β) Πόσο απέχουν τα ζώδια.
- γ) Πόσα σημεία του ιστού έχουν ταχύτητα μέτρου $u_{\max}/2$ όπου $u_{\max}$ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης τους.
- δ) Ποιος ο λόγος των μέτρων των δυνάμεων επαναφοράς που δέχονται τα ζώδια.

Δίνεται το $g=10\text{m/sec}^2$.

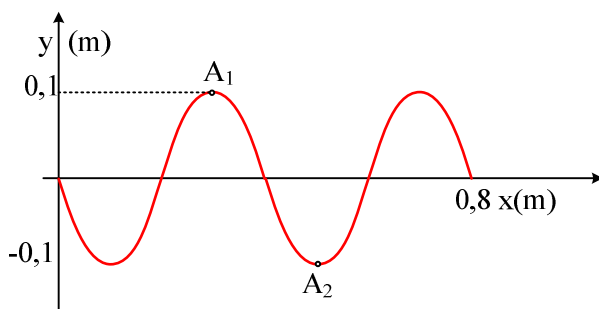
Απάντηση:

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος και ταυτόχρονα και η περίοδος ταλάντωσης όλων των σημείων του ιστού θα δίνεται από τη σχέση $T=2\pi\sqrt{M/K}=0,4\text{sec}$. Τα σώματα έχουν την ίδια μάζα και συγκρούονται ελαστικά άρα θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι η ταχύτητα του σώματος που είναι δεμένο στο ελατήριο θα είναι $u=0,5\pi\text{ m/sec}$ ενώ το σώμα που ανέβαινε θα αποκτήσει στιγμιαία ταχύτητα 0. Το σώμα αυτό θα κάνει ελεύθερη πτώση και θα φτάσει στο έδαφος μετά από χρόνο που θα βρεθεί από την σχέση της θέσης στην ελεύθερη πτώση $H=1/2 g \cdot t^2$
 $3,2=1/2 \cdot 10 \cdot t^2$ Άρα $t=0,8\text{sec}$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $V=\lambda \cdot f$ και με αντικατάσταση το $\lambda=0,4\text{m}$.

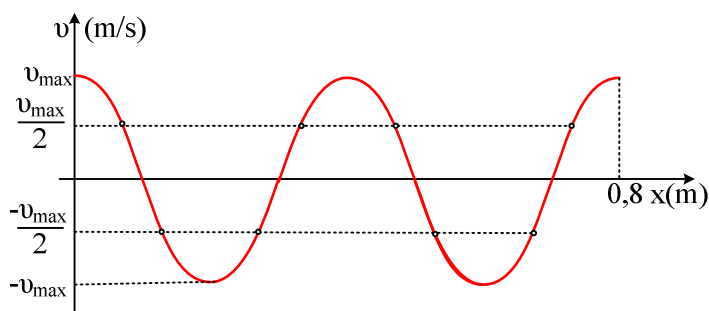
Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος θα βρεθεί από τη σχέση $U_{\max}=\omega \cdot A$ και άρα $A=0,1\text{m}$.

α) Ο χρόνος πτώσης του σώματος αντιστοιχεί με $2T$ άρα το στιγμιότυπο του κύματος θα είναι



Β) Η σχέση της ταχύτητας ταλάντωσης των διάφορων σημείων του ιστού για την στιγμή $t=0,8\text{sec}$ θα δίνεται από τη σχέση $U=\omega A \cdot \sin 2\pi(0,8/0,4 - x/0,4) = 0,5\pi \sin 2\pi(2 - x/0,4)$ (S.I.)

Από την γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης με το x θα βρω τα σημεία που θέλω



Τα σημεία λοιπόν όπως φαίνεται στο σχήμα είναι 8.

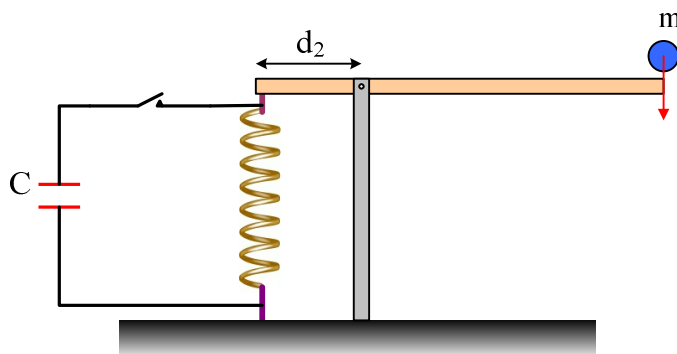
Γ) Οι αράχνες όπως φαίνεται και στο στιγμιότυπο βρίσκονται η πρώτη στην θέση $+A$ και η δεύτερη στη θέση $-A$ την στιγμή που το δεύτερο σώμα φτάνει στο έδαφος.

Έτσι με ένα πυθαγόρειο θεώρημα θα βρω $D=\sqrt{(2A)^2+(\Delta x)^2}=0,2\sqrt{2}\text{ m}$.

Δ) Ο λόγος των δυνάμεων θα είναι $|F_1/F_2| = |-D \cdot A / -D \cdot (-A)| = 1$

Ένα ελατήριο που είναι και πηνίο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα ελατήριο που είναι ταυτόχρονα και πηνίο στο κύκλωμα L-C που θα σχηματισθεί κλείνοντας τον διακόπτη Δ. Το αβαρές ελατήριο-πηνίο αποτελείται από λεπτό μεταλλικό σύρμα που θα κοπεί αν το διαπεράσει ρεύμα έντασης μεγαλύτερης του $I \geq 10\text{mA}$.



Η σταθερά του ελατηρίου είναι $K=60\text{N/m}$ και ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι $L=0,1\text{H}$. Ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C=10\mu\text{F}$ και αρχικά φορτισμένος με φορτίο $Q=10\mu\text{C}$. Η ράβδος του σχήματος έχει μάζα $M=3\text{Kg}$ και μήκος $L=4\text{m}$ είναι από μονωτικό υλικό και ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια του ελατηρίου-πηνίου. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που βρίσκεται σε απόσταση $d_2=1\text{m}$ από το άκρο που είναι στερεωμένο το ελατήριο-πηνίο. Την στιγμή $t=0$ κλείνουμε τον διακόπτη και την στιγμή που το ελατήριο κόβεται στο άλλο άκρο της ράβδου πέφτει κατακόρυφα με ταχύτητα μέτρου $v=32\text{m/s}$ ένα σημειακό σώμα $m=1\text{Kg}$ που συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο. Να βρεθούν:

- A) Η στιγμή που κόπηκε το ελατήριο
- B) Ο ρυθμός μεταβολής ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου την στιγμή που κόβεται το ελατήριο
- Γ) Την αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου-πηνίου
- Δ) Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής για το σύστημα ράβδο-m αμέσως μετά την κρούση.
- E) Την κινητική ενέργεια του συστήματος όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη για πρώτη φορά.

Για την ράβδο $I_{\text{cm}}=1/12 M L^2$.

Απάντηση:

- A) Το $\omega = 1/\sqrt{L \cdot C} = 1000 \text{ rad/sec}$ και το $I_{\max} = \omega \cdot Q = 10^{-2} \text{ A}$. Παρατηρώ ότι η μέγιστη ένταση του ρεύματος για το L-C κύκλωμα αντιστοιχεί και στην ένταση του ρεύματος για την οποία κόβεται το πηνίο-ελατήριο. Άρα ο χρόνος που θα χρειασθεί μετά το κλείσιμο του διακόπτη για να κοπεί το ελατήριο-πηνίο θα είναι $T/4 = \pi/2000 \text{ sec}$.
- B) Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου θα δίνεται από την σχέση $\Delta U_B / \Delta t = -V_C \cdot i = -q \cdot i / C$ αλλά επειδή το ρεύμα εκείνη την στιγμή είναι μέγιστο το φορτίο του πυκνωτή θα είναι $q = 0 \text{ C}$ άρα και $\Delta U_B / \Delta t = 0 \text{ J/sec}$.
- Γ) Αν εφαρμόσουμε την συνθήκη ισορροπίας για την ράβδο πριν το κόψιμο του ελατηρίου θα έχουμε $\Sigma \tau(O) = 0$ άρα $-Mgd_1 + Kx_{\text{ελ}} \cdot d_2 = 0$ άρα $-30 \cdot 1 + 60x_{\text{ελ}} = 0$ άρα $x_{\text{ελ}} = 0,5 \text{ m}$.
- Δ) Αμέσως μετά την κρούση το ελατήριο έχει κοπεί και οι μοναδικές δυνάμεις που προκαλούν ροπή είναι το βάρος της ράβδου και το βάρος του σώματος μάζας m

$$\Delta L / \Delta t = Mg \cdot d_1 + m \cdot g(L - d_2) = 60 \text{ Nm}$$

- E) Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα ράβδο-m θα έχουμε $L\alpha_{\text{ρχ}} = L\alpha_{\text{τελ}}$ άρα $m \cdot v \cdot (L - d_2) = I_O \lambda \cdot \omega_{\text{συστ}} \quad (1)$

$$\text{Το } I_O \lambda = 1/12 ML^2 + M(L/2 - d_2)^2 + m(L - d_2)^2 = 16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Με αντικατάσταση στην (1) θα έχουμε $\omega_{\text{συστ}} = 6 \text{ rad/sec}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση του συστήματος στην κατακόρυφη θέση θα έχουμε $U_p + U_m + K_{\text{περ}} = K_{\text{περ}}'$ άρα η τελική $K_{\text{περ}}' = 348 \text{ J}$.

Ένα ... ανάποδο γιο-γιο.

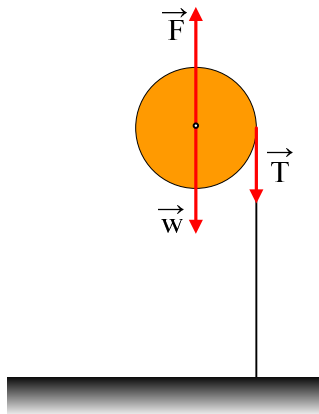
Γύρω από ομογενή κύλινδρο μάζας $M=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$ έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα μεγάλου μήκους. Ο κύλινδρος ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το άλλο άκρο του νήματος στερεωμένο στο έδαφος και το νήμα να είναι κατακόρυφο. Ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου κατακόρυφη σταθερή δύναμη μέτρου $F=23\text{N}$ με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίζει να ανεβαίνει και το νήμα να ξετυλίγεται κατακόρυφα. Την στιγμή που το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ανέβει κατά 2m το νήμα σπάει και ταυτόχρονα καταργείται η δύναμη.

Να βρεθούν:

- A) Η μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου
- B) Η συνολική γωνιακή μετατόπιση μέχρι ο κύλινδρος να επιστρέψει στο έδαφος.
- Γ) Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου.

Δίνεται το $I_{\text{cmκυλίνδρου}}=0,5MR^2$.

Απάντηση:



- A) Εφαρμόζουμε τους νόμους για την στροφική και μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

$$F - Mg - T = Ma \quad (1) \quad \text{και} \quad T \cdot R = 0,5MR^2 \alpha \quad (2)$$

θα βρούμε $a=1\text{m/sec}^2$.

Από τον νόμο του διαστήματος για επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα έχουμε $h=1/2at^2$ άρα $t=2\text{sec}$ και από τον νόμο της ταχύτητας στην επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα έχουμε $v=a \cdot t=2\text{m/sec}$ η δε γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα είναι εκείνη τη στιγμή $\omega=\omega/R=5\text{rad/sec}$. Μετά το κόψιμο του νήματος και την κατάργηση της δύναμης το σώμα κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του που είναι δύναμη που ασκείται στο κέντρο του κυλίνδρου και δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή. Έτσι ο κύλινδρος εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση και επιβραδυνόμενη μεταφορική μέχρι το μέγιστο ύψος. Από και μετά η κίνηση του κυλίνδρου γίνεται επιταχυνόμενη μεταφορική με φορά προς τα κάτω ενώ εκτελεί και ομαλή περιστροφική κίνηση με την γωνιακή ταχύτητα που είχε αποκτήσει την στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη μεταφορική προς τα πάνω θα πάρουμε $v=v_0 - gt_{av}$ $t_{av}=0,2\text{sec}$ και από τον νόμο του διαστήματος στην επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε $H=v_0 \cdot t_{av} - 1/2gt_{av}^2=0,2\text{m}$

Αρα η συνολική μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα είναι $H_{ολ}=2,2m$

- B) Κατά την άνοδο του κυλίνδρου με την επίδραση της δύναμης ο κύλινδρος εκτελούσε επιταχυνόμενη στροφική κίνηση.

Ετσι η γωνιακή του μετατόπιση θα ήταν $\theta_1 = 1/2 \alpha_{γων} \cdot t^2 = 5rad$.

Για να φτάσει ο κύλινδρος στο έδαφος από το μέγιστο ύψος θα χρειασθεί χρόνο που θα βρεθεί από την σχέση $H_{ολ} = 1/2 g \cdot t_{καθ}^2$ $t_{καθ} = \sqrt{0,44}sec = 0,66sec$.

Ο κύλινδρος λοιπόν θα κινηθεί ομαλά στροφικά για συνολικό χρόνο $t_{ολ} = 0,86sec$ η γωνιακή μετατόπιση θα είναι $\theta_2 = \omega \cdot t_{ολ} = 5,086 = 4,3rad$.

Η συνολική γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου μέχρι να επιστέψει στο έδαφος θα είναι $\theta_{ολ} = 9,3rad$.

- Γ) Η κινητική ενέργεια έχει τρεις διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής. Μία κατά την διάρκεια της ανόδου με την επίδραση της δύναμης μία κατά την διάρκεια της ανόδου μετά το κόψιμο του νήματος και την κατάργηση της δύναμης και τέλος μία κατά την διάρκεια καθόδου του κυλίνδρου.

Κατά την άνοδο $\Delta K_{ολ}/\Delta t = \Sigma F \cdot v + \Sigma \tau \cdot \omega$ που για να γίνει μέγιστη θα πρέπει το v και το ω να είναι μέγιστα άρα την στιγμή που κόβεται το νήμα θα έχουμε

$$\Delta K/\Delta t \big|_{\max} = 6J/sec$$

Κατά την άνοδο με μόνη επίδραση την επίδραση του βάρους

$$\Delta K_{ολ}/\Delta t = -Mg \cdot v$$

Γιατί $\Delta K_{στ}/\Delta t = 0$

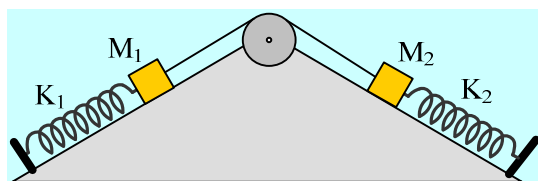
Κατά την πτώση $\Delta K/\Delta t = Mg \cdot v$.

Για να γίνει μέγιστος αυτός ο ρυθμός μεταβολής την κινητικής ενέργειας θα πρέπει το v να γίνει μέγιστο δηλαδή όταν ο κύλινδρος φτάσει στο έδαφος τότε η $v_{\max} = g \cdot t_{καθ} = 6,6m/sec$ και $\Delta K/\Delta t \big|_{\max} = 132J/sec$.

Αρα ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας συμβαίνει όταν ο κύλινδρος φτάνει στο έδαφος και είναι $132J/sec$.

Ένα σύστημα που εκτελεί γ.α.τ.

Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από ένα ακλόνητο ισοσκελές λείο τρίγωνο που οι γωνίες στην βάση του είναι 30° και στην κορυφή αυτού έχουμε στερεώσει μία τροχαλία μάζας $M=4\text{Kg}$ που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα. Τα σώματα έχουν μάζες $M_1=M_2=4\text{Kg}$ και ισορροπούν με τα ελατήρια να έχουν μεγαλύτερο μήκος από το φυσικό τους μήκος με την βοήθεια μη εκτατού νήματος που συνδέεται με τα σώματα μέσω της τροχαλίας. Τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=400\text{N/m}$ και $K_2=100\text{N/m}$.



Αρχικά το ελατήριο με σταθερά K_1 είναι επιμηκυμένο κατά $x_1=0,1\text{m}$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Απομακρύνουμε λίγο το σύστημα από την θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο.

- Α) Να βρεθεί η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου με σταθερά K_2
- Β) Να αποδείξετε ότι το κάθε σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. και να υπολογιστεί η περίοδος του συστήματος.
- Γ) Να βρεθεί η συνθήκη έτσι ώστε το σύστημα να εκτελεί α.α.τ.

Για την τροχαλία $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} MR^2$.

Απάντηση:

Α) Για την ισορροπία του σώματος με μάζα M_1 θα ισχύει $T_1 = M_1 g \sin \phi + K_1 x_1$ άρα $T_1 = 60\text{N}$

Για την ισορροπία της τροχαλίας θα ισχύει $T_1 R - T_2 R = 0$ άρα $T_2 = 60\text{N}$

Για την ισορροπία του σώματος M_2 θα ισχύει $T_2 = M_2 g \sin \phi + K_2 x_2$ άρα $x_2 = 0,4\text{m}$

Β) Εστω ότι πιέζουμε λίγο προς τα κάτω το σώμα μάζας M_2 τότε για τις μεταφορικές κινήσεις των δύο σωμάτων αλλά και την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας θα ισχύουν οι νόμοι της κίνησης τους

$$M_1 g \sin \phi + K_1(x_1 + x) - T_1 = M_1 a \quad (1)$$

$$T_2 - M_2 g \sin \phi - K_2(x_2 - x) = M_2 a \quad (2)$$

$$T_1 R - T_2 R = 0,5 M a_{\text{γων}} \quad \text{ή} \quad T_1 - T_2 = 0,5 M a \quad (3)$$

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων θα καταλήξουμε:

$$T_1 = 60 + 200x \text{ (SI)} \quad \text{και} \quad T_2 = 60 + 100x \text{ (SI)}, \quad a = 50x \text{ (SI)}$$

Για τις ταλαντώσεις των δύο σωμάτων και θεωρώντας θετική φορά την φορά της αρχικής απομάκρυνσης θα έχουμε

$$\Sigma F = T_1 - M_1 g \sin \phi - K_1(x_1 + x) = -200x \text{ (SI)} \quad \text{άρα} \quad \alpha.α.τ. \quad \text{με} \quad D_1 = 200\text{N/m}$$

$$\Sigma F = K_2(x_2 - x) + M_2 g \eta \mu \phi - T_2 = -200x \text{ (SI) } \text{ \u0391\u03c1\u03b1 \u03b1.\u03b1.\u03c4 \u03bc\u03b5 } D_2 = 200 \text{ N/m}$$

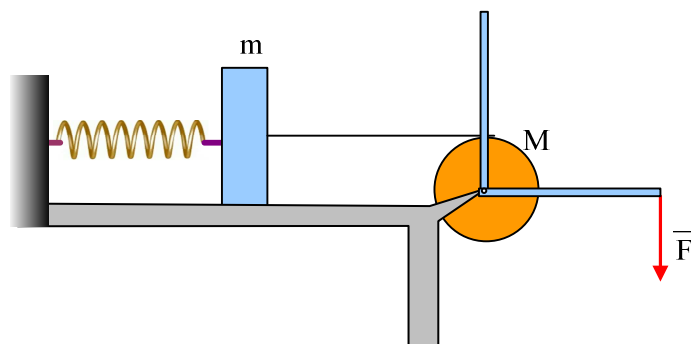
$$\text{\u0391\u03c1\u03b1 } T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D}} = \frac{2\pi}{\sqrt{50}} \text{ s .}$$

\u0393) \u039d\u03b1 \u03bd\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b5\u03c7\u03b9\u03c3\u03b5\u03b9 \u03c4\u03bf \u03c3\u03cd\u03c3\u03c4\u03b7\u03bc\u03b1 \u03bd\u03b1 \u03b5\u03ba\u03c4\u03b5\u03bb\u03b5\u03b9 \u03c4\u03b1\u03bb\u03b1\u03bd\u03c4\u03c9\u03c3\u03b7 \u03b8\u03b1 \u03c0\u03c1\u03b5\u03c0\u03b5\u03b9 \u03bf\u03b9 \u03b4\u03cd\u03bf \u03c4\u03ac\u03c3\u03b5\u03b9\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03bd\u03b7\u03bc\u03b1\u03c4\u03bf\u03c2 \u03bd\u03b1 \u03c5\u03c0\u03ac\u03c1\u03c7\u03bf\u03c5\u03bd

\u03b1\u03c1\u03b1 $T_1 > 0$ \u03ba\u03b1\u03b9 $T_2 > 0$ \u03b1\u03c1\u03b1 \u03c4\u03bf \u03c0\u03bb\u03ac\u03c4\u03bf\u03c2 \u03c4\u03b1\u03bb\u03b1\u03bd\u03c4\u03c9\u03c3\u03b7\u03c2 \u03b8\u03b1 \u03c0\u03c1\u03b5\u03c0\u03b5\u03b9 \u03bd\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03bc\u03b9\u03ba\u03c1\u03cc\u03c4\u03b5\u03c1\u03bf \u03b1\u03c0\u03cc $A = \frac{60}{100} \text{ m} = 0,6 \text{ m}$.

Ένα ελατήριο και βαρούλκο

Στο παρακάτω σχήμα το σώμα έχει μάζα $m=1/\pi$ kgr ο κύλινδρος που έχει μάζα $M_1=2$ kg και ακτίνα $R_1=1$ m είναι στερεωμένος με κατάλληλο υποστήριγμα έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα. Πάνω στον κύλινδρο είναι κολλημένη ράβδος μήκους $L=2$ m και μάζας $M_2=3$ Kg με το ένα της άκρο να βρίσκεται στο κέντρο του κυλίνδρου.



Η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα. Το ελατήριο έχει σταθερά $K=100/\pi$ N/m και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος με το νήμα να είναι τεντωμένο και δεμένο στο ανώτερο σημείο του κυλίνδρου. Με την βοήθεια κατάλληλης δύναμης αρχίζουμε να περιστρέφουμε το σύστημα επιμηκύνοντας το ελατήριο με το νήμα να τυλίγεται στον κύλινδρο μέχρι η ράβδος να περιστραφεί κατά 90° .

Να βρεθούν:

- A) Το μέτρο της δύναμης που πρέπει ασκούμε κάθετα στην ράβδο αν το σύστημα ισορροπεί μετά από την διαγραφή των 90° .
- B) Ποια η ελάχιστη ενέργεια που δαπανήσαμε έως εκείνη την στιγμή αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν οποιαδήποτε είδη τριβών.
- Όταν το σύστημα έχει διαγράψει γωνία 90° και το σύστημα ισορροπεί το νήμα κόβεται και η εξωτερική δύναμη καταργείται.
- Γ) Πόση μέγιστη ταχύτητα θα αποκτήσει το σώμα m και πόση μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου;
- Δ) Ποιο από τα δύο συστήματα θα αποκτήσει πρώτο την μέγιστη κινητική ενέργεια.

Δίνονται για τον κύλινδρο $I=0,5M_1.R_1^2$ για την ράβδο $I=1/3M_2.L^2$ και $\pi=3,14$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου ισορροπεί. Αν εφαρμόσουμε $\Sigma \tau = 0$ γύρω από τον άξονα περιστροφής του συστήματος θα έχουμε

$$-F \cdot L - M_2 g \cdot L/2 + T \cdot R_1 = 0 \quad (1)$$

Για την ισορροπία όμως του σώματος m θα έχουμε $F_{ελ} = T$ άρα $K \cdot 2\pi R_1/4 = T$ άρα $T = 50 \text{ N}$.

Από την (1) θα βρούμε $F = 10 \text{ N}$

B) Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική μέχρι την τελική θέση θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_{\min} + U_{\text{ωράβδου}} &= U_{\text{ελατηρίου}} \\ \text{έτσι } E_{\min} + M_2 \cdot g \cdot L/2 &= 1/2 K \cdot (2\pi R_1/4)^2 \\ \text{άρα } E_{\min} &= 9,25 \text{ J} \end{aligned}$$

Γ) Όταν κοπεί το νήμα τα σώματα δεν έχουν ταχύτητα. Έτσι το σώμα m που είναι δεμένο στο ελατήριο θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Το πλάτος ταλάντωσης του θα είναι $A = 2\pi R_1/4 = \pi/2 \text{ m}$ άρα η μέγιστη ταχύτητά του θα βρεθεί από την σχέση $U_{\max} = \omega \cdot A = 5\pi \text{ m/sec}$.

Το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια την στιγμή που η δυναμική του ενέργεια θα γίνει ελάχιστη δηλαδή στην θέση όπου η ράβδος θα βρεθεί στην κατώτερή της θέση δηλαδή στην κατακόρυφη θέση κατεβαίνοντας. Με την βοήθεια την ΑΔΕ για το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου από την στιγμή που κόβουμε το νήμα και μέχρι την κατώτερη θέση θα έχουμε

$$\begin{aligned} U_{\text{ωράβδου}} &= K_{\max} \quad \text{άρα} \\ M_2 \cdot g \cdot L/2 &= 1/2 I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\max}^2 \\ \text{με } I_{\text{ολ}} &= 1/2 M_1 \cdot R_1^2 + 1/3 M_2 \cdot L^2 = 5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \\ \text{θα βρούμε } \omega_{\max} &= 2\sqrt{3} \text{ r/sec.} \end{aligned}$$

Δ)Το σώμα m θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα μετά από χρόνο $T/4$ αφού βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του δηλαδή μετά από χρόνο:

$$t=\pi\sqrt{m/K/2} = \pi/20\approx 0,157 \text{ sec.}$$

Το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με συνεχώς μειούμενη γωνιακή επιτάχυνση αφού η ροπή του βάρους της ράβδου M_2 συνεχώς μειώνεται. Αν υποθέσουμε ότι η ροπή αυτή ήταν σταθερή και ίση με την μέγιστη αρχική τιμή τότε $M_2 \cdot g \cdot L/2 = I_o \lambda \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu\max}$ θα υπολογίζαμε $\alpha_{\gamma\omega\nu\max} = 6 \text{ r/sec}^2$. Η γωνία τότε διαγραφής του συστήματος θα δινόταν από την σχέση:

$$\theta = 1/2 \alpha_{\gamma\omega\nu\max} \cdot t_{\min}^2 \text{ και με } \theta = \pi/2$$

θα βρίσκαμε τον ελάχιστο χρόνο που θα χρειαζόταν το σύστημα για να φτάσει στην κατώτερή του θέση.

$$\text{Αρα } t_{\min} = \sqrt{\pi/6} \approx 0,72 \text{ sec.}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σώμα m φτάνει στην ΘΙΤ σε μικρότερο χρόνο από τον χρόνο που θα έφτανε το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου στην κατώτερη θέση αν είχε συνεχώς σταθερή-μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση. Ο χρόνος που θα χρειασθεί το σύστημα κύλινδρος-ράβδος είναι μεγαλύτερος από τον ελάχιστο.

Τελικά πρώτο θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο.

Ελαστική παραμόρφωση

Δύο λείες και τέλεια ελαστικές σφαίρες με μάζες $m_1=4 \text{ kg}$ και $m_2=1 \text{ kg}$ κινούνται αντίθετα πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο χωρίς να περιστρέφονται με ταχύτητες $v_1=5\text{m/sec}$ και $v_2=10\text{m/sec}$ με αποτέλεσμα κάποια στιγμή οι σφαίρες να συγκρουστούν τέλεια ελαστικά. Η σφαίρα m_1 έχει πάνω της πομπό ηχητικών ήχων με συχνότητα $F_s=670\text{Hz}$ ενώ η μάζα m_2 έχει πάνω της ανιχνευτή ήχων.

- A) Να βρεθεί η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής ήχων πριν και μετά την ελαστική κρούση
- B) Κάποια στιγμή ο ανιχνευτής ανιχνεύει συχνότητα $F=670\text{Hz}$. Ποια η ταχύτητα της κάθε σφαίρας τότε;
- Γ) Να γίνει μία ποιοτική γραφική παράσταση της ολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών αλλά και της δυναμικής ενέργειας ελαστικής παραμόρφωσης των δύο σφαιρών σε συνάρτηση με τον χρόνο αν η κρούση διήρκεσε $\Delta t=10^{-2}\text{sec}$.

Η ταχύτητα του ήχου $v_{\eta\chi}=340\text{m/sec}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Η πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν πριν την κρούση τους έτσι με βάση τον τύπο από το φαινόμενο Doppler θα έχουμε

$$F_{\text{ανιχ}} = (v_{\eta\chi} + v_2) \cdot F_s / (v_{\eta\chi} - v_1) = 700\text{Hz}$$

Με την βοήθεια των τύπων της θεωρίας μας για την ελαστική κρούση δύο κινούμενων σωμάτων θα έχουμε

$$v_1' = (m_1 - m_2) v_1 / (m_1 + m_2) + 2m_2 \cdot v_2 / (m_1 + m_2) = -1\text{m/sec}$$

$$v_2' = (m_2 - m_1) v_2 / (m_1 + m_2) + 2m_1 \cdot v_1 / (m_1 + m_2) = 14\text{m/sec}$$

Από τα πρόσημα των ταχυτήτων καταλαβαίνουμε ότι τώρα η πηγή γυρίζει προς τα πίσω και ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή. Έτσι και πάλι με βάση τον τύπο για το φαινόμενο Doppler για μετά την κρούση θα έχουμε

$$F_{\text{ανιχ}'} = (v_{\text{ηχ}} - v_2').Fs / (v_{\text{ηχ}} + |v_1'|) = 640,53\text{Hz}$$

Β) Για να ανιχνεύει ο ανιχνευτής συχνότητα ήχου ίση με αυτήν της πηγής σημαίνει ότι η σχετική απόσταση των δύο σωμάτων στιγμιαία δεν μεταβάλλεται. Έτσι εκείνη την στιγμή οι ταχύτητες των δύο σφαιρών πρέπει να είναι ίσες. Με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε $P_{\text{αρχ}} = P_{\text{τελ}}$ άρα:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) v_{\text{κοινή}}$$

$$\text{άρα } v_{\text{κοινή}} = 2\text{m/sec.}$$

Γ) Η αρχική κινητική και η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος αφού η κρούση είναι ελαστική είναι ίδια και θα βρεθεί από την σχέση

$$K_{\text{ολ}} = 1/2 m_1 v_1^2 + 1/2 m_2 \cdot v_2^2 = 100\text{J}$$

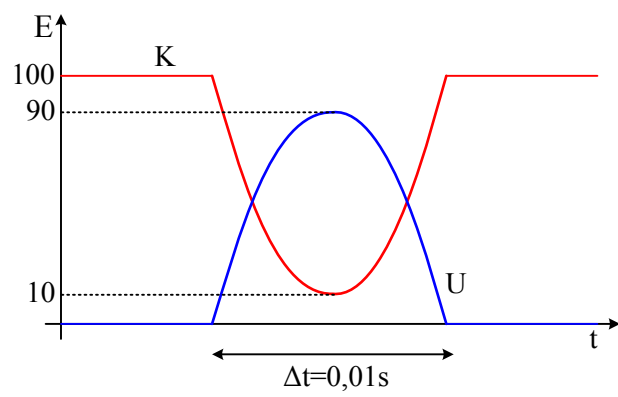
Κατά την διάρκεια της κρούσης οι σφαίρες αρχίζουν να παραμορφώνονται η μέγιστη ελαστική τους παραμόρφωση θα συμβεί την στιγμή που η σχετική τους απόσταση παύει να μειώνεται ή την στιγμή που αρχίζει να αυξάνει δηλαδή την στιγμή που αποκτάνε την ίδια ταχύτητα δηλαδή την $U_{\text{κοινή}}$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση μέχρι την στιγμή που θα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα θα έχουμε:

$$K_{\text{ολαρχ}} = K_{\text{συστ}} + U_{\text{ελαστ.παραμ.max}}$$

$$100 = 10 + U_{\text{ελαστ.παραμ.max}}$$

$$\text{άρα η μέγιστη ελαστική παραμόρφωση θα είναι } 90\text{J.}$$

Ένα ποιοτικό διάγραμμα των παραπάνω ενεργειών με τον χρόνο θα μπορούσε να είναι



Ελαστική κρούση με μικρότερης μάζας σώμα.

Ένα σώμα τεράστιας μάζας χτυπάει κεντρικά και ελαστικά ένα δεύτερο αρχικά ακίνητο σώμα πολύ μικρότερης μάζας και αυτό με την σειρά του χτυπάει ένα τρίτο σώμα πολύ μικρότερης μάζας και κ.ο.κ. Να βρεθεί η ταχύτητα του τελευταίου σώματος αν έχουν προηγηθεί πέντε συνολικά κρούσεις αν η αρχική ταχύτητα του πρώτου σώματος είναι $u=1\text{m/sec}$.

Απάντηση:

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία όταν ένα σώμα πολύ μεγάλης μάζας χτυπήσει κεντρικά και ελαστικά ακίνητο σώμα το μικρό σώμα απομακρύνεται με ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από το αρχικά κινούμενο σώμα.

Έτσι μετά από πέντε κρούσεις θα έχουμε $v=2.2.2.2.1=32\text{m/sec}$.

Δύο τροχαλίες και μια ράβδος.

Η παρακάτω ράβδος ΑΓ του σχήματος είναι αβαρής και έχει μήκος $L=1\text{m}$, την συγκρατούμε σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια εξωτερικών δυνάμεων. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο καρφί σε θέση Ο. Στο κάθε άκρο Α και Γ της ράβδου πριτσινώνουμε (Βαγγέλη είναι όρος των σιδεράδων) δύο τροχαλίες μάζας $M_1=4\text{Kg}$ και $M_2=2\text{Kg}$ με ίδιες ακτίνες $R_1=R_2=10\text{cm}$ που μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από δύο οριζόντιους άξονες και παράλληλους με τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο.



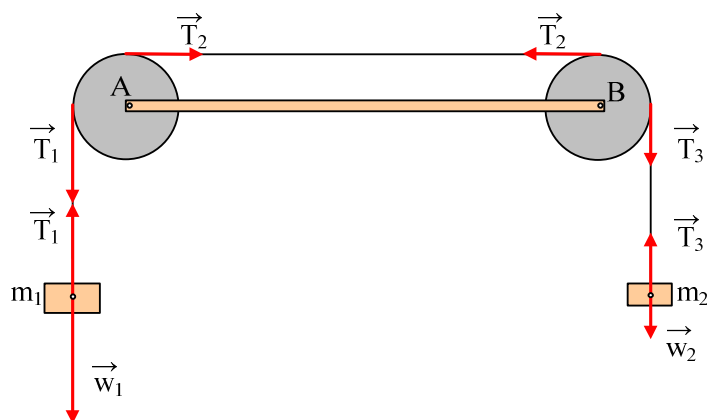
Με τη βοήθεια αβαρούς νήματος δένουμε δύο σώματα με μάζες $m_1=4\text{Kg}$ και $m_2=3\text{Kg}$ που την στιγμή $t=0$ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Την στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο καταργώντας τις εξωτερικές δυνάμεις και παρατηρούμε ότι η ράβδος συνεχίζει να παραμένει οριζόντια ενώ το σύστημα των δύο μαζών αρχίζει να κινείται έτσι ώστε το σώμα μάζας m_1 να αρχίζει να κατέρχεται. Να υπολογιστούν :

α) Ποια η απόσταση ΑΟ

β) Ποια η απόσταση των δύο μαζών σε συνάρτηση με το χρόνο αν οι μάζες θεωρηθούν σημειακές

$$I_{cm}=0,5MR^2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



A) Για την κίνηση του σώματος μάζας m_1 $m_1g - T_1 = m_1a$ (1)

Για την κίνηση της τροχαλίας $T_1 \cdot R_1 - T_2 \cdot R_1 = 0,5 \cdot M_1 \cdot R_1^2 \cdot \alpha$ άρα $T_1 - T_2 = 0,5 \cdot M_2 \cdot a$ (2)

Για την κίνηση του σώματος μάζας m_2 $T_3 - m_2g = m_2a$ (3)

Για την κίνηση της τροχαλίας $T_2 \cdot R_1 - T_3 \cdot R_1 = 0,5 \cdot M_2 \cdot R_1^2 \cdot \alpha$ άρα $T_2 - T_3 = 0,5 \cdot M_2 \cdot a$ (4)

Από (1),(2),(3) και (4) θα βρούμε $a = 1 \text{ m/sec}^2$ και $T_1 = 36 \text{ N}$ $T_2 = 34 \text{ N}$ $T_3 = 33 \text{ N}$

Για την ισορροπία της πρώτης τροχαλίας θα ισχύει $N_1 = M_1 \cdot g + T_1$ (5) άρα $N_1 = 76 \text{ N}$

Για την ισορροπία της δεύτερης τροχαλίας θα ισχύει $N_2 = M_2 \cdot g + T_3$ (6) άρα $N_2 = 53 \text{ N}$

Όπου N_1 και N_2 οι κατακόρυφες συνιστώσες των δυνάμεων που ασκεί η ράβδος στις τροχαλίες.

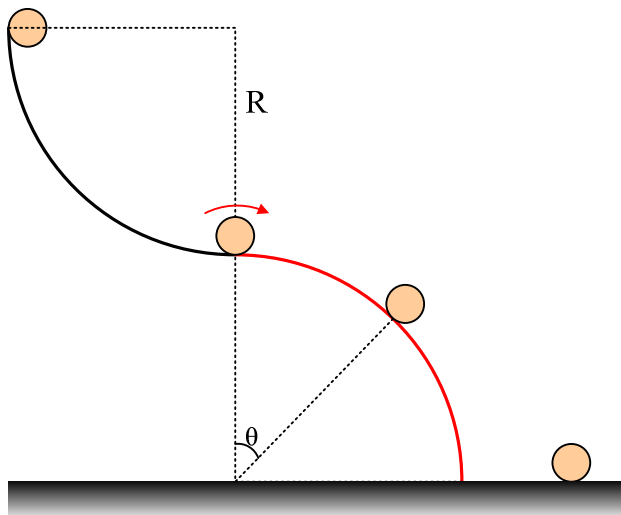
Για την ισορροπία της ράβδου $\Sigma \tau(o) = 0$ άρα $N_1 \cdot (AO) - N_2 \cdot (L - AO) = 0$ (7) άρα
 $AO = 53/129 \text{ m}$

B) Η απόσταση των δύο σημειακών μαζών θα δοθεί με τη βοήθεια του Π.Θ.

$$D = \{(L + 2R_1)^2 + (2H)^2\}^{1/2} = \{1,44 + 2 \cdot t^2\}^{1/2} \text{ (S.I)}$$

Δύο τεταρτοκύκλια

Τα δύο κατακόρυφα τεταρτοκύκλια του σχήματος έχουν τη ίδια ακτίνα R . Σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται να κυλίσει χωρίς να ολισθαίνει από το ανώτερο σημείο του και στο εσωτερικό του πρώτου τεταρτοκύκλιου και στην συνέχεια μπαίνει στο εξωτερικό μέρος του δεύτερου τεταρτοκύκλιου χωρίς απώλειες ενέργειας όπου και εκεί συνεχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



Να βρεθούν:

Α) Το συνθ εκείνης της γωνία θ όπου η μικρή σφαίρα χάνει την επαφή με την εξωτερική επιφάνεια του δεύτερου τεταρτοκύκλιου σε σχέση με τις δύο ακτίνες R και r . Ποια θα έπρεπε να είναι η σχέση των δύο ακτίνων R και r ώστε η σφαίρα να μην κυλίσει καθόλου στην εξωτερική επιφάνεια του δεύτερου τεταρτοκύκλιου.

Β) Ποια η τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας λόγω της μεταφορικής κίνησης όταν φτάσει στο έδαφος.

Για την σφαίρα $I_{cm} = \frac{2}{5} m r^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για τη κίνηση της σφαίρας στο πρώτο τεταρτοκύκλιο θα έχουμε

$$m \cdot g \cdot (R-r) = \frac{1}{2} m \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \quad \text{άρα } U = \sqrt{g(R-r)} / 0,7 \quad (1)$$

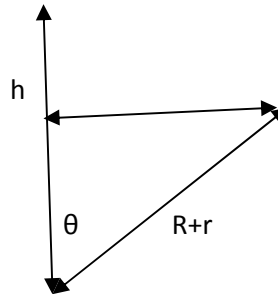
Για την κίνηση της σφαίρας στο εξωτερικό του δεύτερου τεταρτοκύκλιου θα βρούμε με την βοήθεια της ΑΔΕ

$$\frac{1}{2} m \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot U_{τελ}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \omega_{τελ}^2 \quad (2)$$

Την στιγμή που η σφαίρα θα χάσει την επαφή της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο η μοναδική δύναμη που θα ασκείται στη σφαίρα θα είναι το βάρος της και μία συνιστώσα του βάρους θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης με τη βοήθεια της οποίας θα βρούμε

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot v_{τελ}^2 / (R+r) \quad (3)$$

από το ορθογώνιο τρίγωνο



$$h = (r+R)(1 - \sin \theta) \quad (4)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4) (3) και (1) στην (2) θα βρούμε μετά από πράξεις

$$\sin \theta = 2R / 1,7(R+r) \quad (5)$$

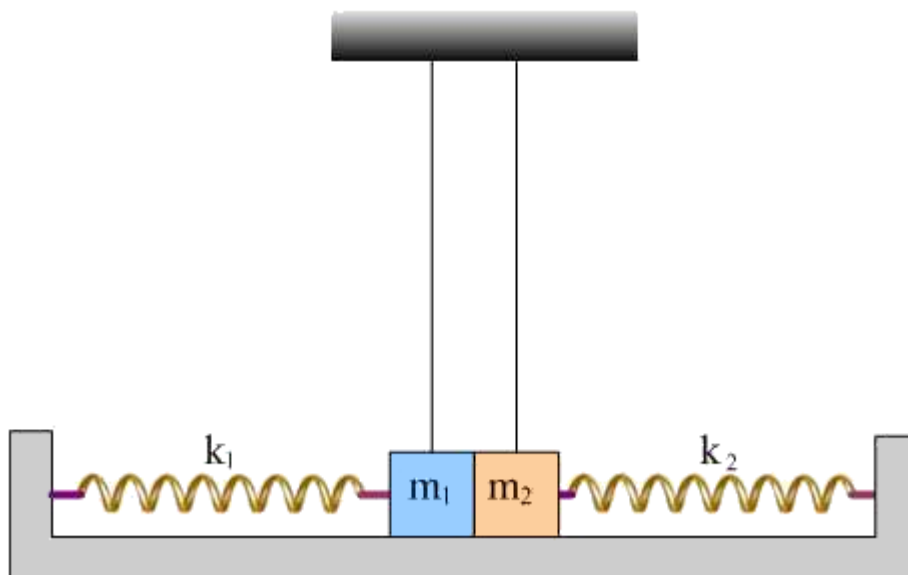
Για να μην κυλίσει καθόλου η σφαίρα στη εξωτερική επιφάνεια του δεύτερου τεταρτοκύκλιου θα έπρεπε το $\theta = 0 \text{ rad}$ άρα από την εξίσωση (5) $r = 3R/17$

Β) Η σφαίρα μετά το χάσιμο της επαφής της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο θα κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους της. Έτσι η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής δεν θα αλλάξει. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα έχουμε

$$m \cdot g \cdot (2R-r) = K_{τελ} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_{τελ}^2 \text{ με την βοήθεια των σχέσεων (3) και (5) μετά από πράξεις θα φτάσουμε } K_{τελ} = m \cdot g \cdot (30R/17 - r)$$

Δυο ταλαντώσεις και δυο κύματα.

Στο παρακάτω σχήμα τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος και τα σώματα ισορροπούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1 = \pi^2 \text{ N/m}$ και $K_2 = 4\pi^2 \text{ N/m}$ και οι μάζες $m_1 = m_2 = 1 \text{ Kg}$. Πάνω στα σώματα m_1 και m_2 είναι στερεωμένες δύο κατακόρυφες ελαστικές χορδές μήκους $L = 5 \text{ m}$ όπου μπορούν να διαδοθούν εγκάρσια αρμονικά κύματα με ταχύτητα $v = 1 \text{ m/sec}$.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνουμε ταχύτητα μέτρου $v = 0,1\pi \text{ m/sec}$ στο σώμα M_1 προς τα αριστερά και μετά την επιστροφή του στη αρχική του θέση τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά.

- A) Να βρεθεί η περίοδος της περιοδικής κίνησης που θα εκτελέσει το σύστημα των δύο μαζών.
- B) Να σχεδιασθούν οι απομακρύνσεις των ταλαντώσεων για τα δύο σώματα μέχρι την στιγμή t_2 που η διαταραχή στην πρώτη χορδή θα έχει φτάσει στο άλλο της άκρο.

Γ) Να σχεδιασθούν οι μορφές των δύο χορδών την χρονική στιγμή t_2 .

Να θεωρηθεί αμελητέα η χρονική διάρκεια της κάθε κρούσης των σωμάτων και θετική φορά των απομακρύνσεων η φορά προς τα δεξιά.

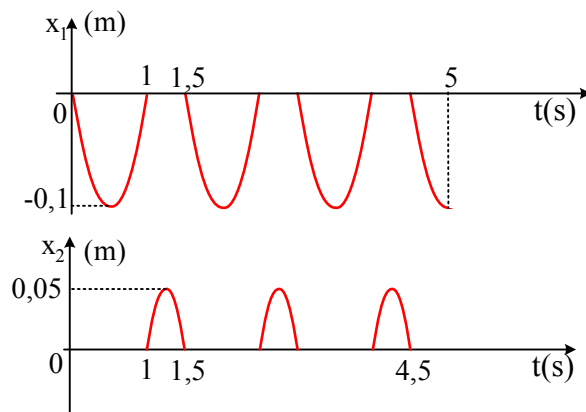
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Το σώμα m_1 είναι δεμένο στο ελατήριο K_1 και θα εκτελέσει μισή γ.α.τ. μέχρι να επιστρέψει στην αρχική του θέση. Η περίοδος θα βρεθεί από την σχέση $T_1 = 2\pi\sqrt{m_1/K_1}$ άρα $T_1 = 2\text{sec}$. Η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι και η μέγιστη της ταλάντωσης άρα $v = \omega_1 \cdot A_1$ άρα $A_1 = 0,1\text{m}$. Τα σώματα έχουν ίδιες μάζες άρα μετά την ελαστική τους κρούση θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι το σώμα με μάζα m_2 θα αρχίσει να εκτελεί και αυτό μισή γ.α.τ. με $T_2 = 2\pi\sqrt{m_2/K_2}$ άρα $T_2 = 1\text{sec}$. Η αρχική ταχύτητα του σώματος m_2 μετά την ελαστική κρούση είναι και η μέγιστη της ταλάντωσης άρα $v = \omega_2 \cdot A_2$ άρα $A_2 = 0,05\text{m}$.

Ο χρόνος επανάληψης του φαινομένου θα είναι $T_{\alpha} = T_1/2 + T_2/2 = 1,5\text{sec}$.

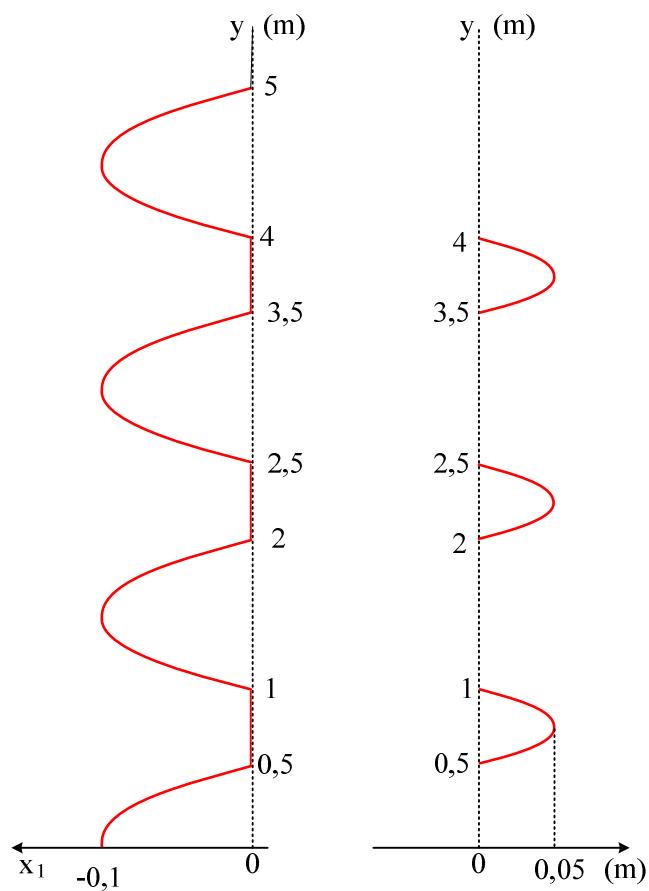
Β) Για να φτάσει η διαταραχή στην άλλη άκρη της χορδής θα χρειασθεί χρόνος $t = L/U = 5\text{sec}$.

Για να αρχίσει η ταλάντωση του δεύτερου σώματος θα χρειασθεί χρόνος $t_3 = T_1/2 = 1\text{sec}$. Οι γραφικές παραστάσεις των απομακρύνσεων των δύο σωμάτων θα είναι θεωρώντας θετική φορά την φορά προς τα δεξιά.



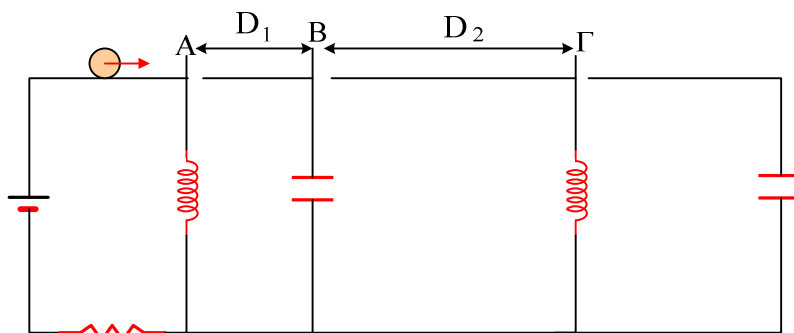
Τα «μήκη κύματος» σε κάθε χορδή θα είναι $v = \lambda_1 \cdot F_1$ άρα $\lambda_1 = 2\text{m}$ και $v = \lambda_2 \cdot F_2$ άρα $\lambda_2 = 1\text{m}$.

Η μορφή των δύο χορδών θα είναι



Δύο πυκνωτές και δύο πηνία

Στο παρακάτω κύκλωμα δίνονται $E=20V$, $R=10\Omega$, $L_1=L_2=100mH$ και $C_1=C_2=10\mu F$. Ένα βλήμα κινούμενο οριζόντια με σταθερή ταχύτητα $v=80m/sec$ μπορεί να συμπαρασύρει στο περασμά του όλους τους αβαρείς μεταγωγούς χωρίς απώλεια ενέργειας. Ο μεταγωγέας Α βρίσκεται σε μόνιμη θέση έτσι ώστε το ρεύμα στο πρώτο πηνίο να είναι σταθεροποιημένο ενώ οι πυκνωτές είναι αφόρτιστοι. Την χρονική στιγμή $t=0$ το βλήμα χτυπά το μεταγωγέα Α. Η απόσταση μεταξύ των μεταγωγέων ΑΒ είναι σταθερή και ίση με $D_1=4\pi cm$ και των μεταγωγέων ΒΓ είναι $D_2=12\pi cm$.



Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των φορτίων των κάτω οπλισμών του κάθε πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πρώτο πηνίο πριν το χτύπημα του βλήματος στον μεταγωγέα Α είναι $I = \frac{E}{R} = 2A$. Την στιγμή $t=0$ ο μεταγωγέας Α μετακινείται άρα αρχίζουν οι πρώτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις στο πρώτο κύκλωμα και για χρόνο:

$$t_1 = \frac{D_1}{v} = \frac{\pi \cdot 10^{-3}}{2} s.$$

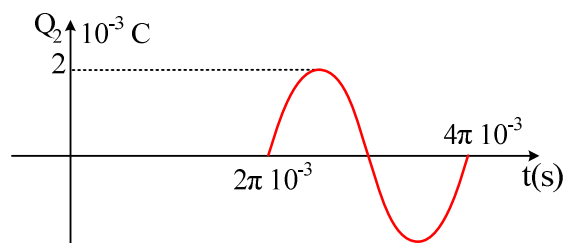
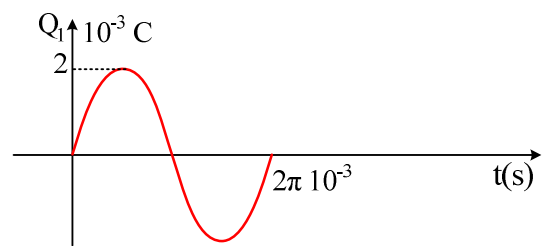
Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων δίνεται από την σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi \cdot 10^{-3} s.$$

Παρατηρώ ότι ο χρόνος t_1 αντιστοιχεί σε χρόνο $T/4$. Έτσι ο πυκνωτής έχει πλήρως φορτιστεί με τον κάτω οπλισμό του θετικά φορτισμένο. Την στιγμή t_2 ο μεταγωγέας Β αλλάζει θέση και έτσι αρχίζουν ηλεκτρικές ταλαντώσεις στο δεύτερο ηλεκτρικό κύκλωμα C-L και για χρόνο:

$$\Delta t_2 = \frac{D_2}{v} = 1,5\pi \cdot 10^{-3} s.$$

Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί σε χρονική διάρκεια $3T/4$ των ηλεκτρικών ταλαντώσεων του δεύτερου κυκλώματος C-L. Έτσι ο πρώτος πυκνωτής δεν θα έχει καθόλου φορτίο άρα όλη η ενέργειά του έχει μεταφερθεί στο πηνίο. Θα αρχίσουν ηλεκτρικές ταλαντώσεις στο τελευταίο κύκλωμα L-C με μέγιστο αρχικό ρεύμα που θα έχει φορά προς τα κάτω. Έτσι αρχικά θα φορτιστεί θετικά ο κάτω οπλισμός του δεύτερου πυκνωτή. Το μέγιστο φορτίου του κάθε πυκνωτή θα βρεθεί από τη σχέση $I=\omega \cdot Q$ άρα $Q=2 \cdot 10^{-3} C$.



Δύο πηγές ήχου και ένας ταλαντωτής.

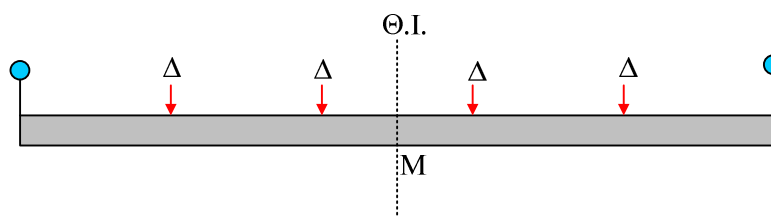
Ανάμεσα σε δύο ακίνητες πηγές (1) & (2) που εκπέμπουν αρμονικό ήχο συχνότητας $F_1=F_2=680\text{Hz}$ βρίσκεται ανιχνευτής ήχων μάζας $m=0,5\text{kg}$ που μπορεί να ταλαντώνεται οριζόντια έχοντας για θέση ισορροπίας ταλάντωσης το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δυο πηγές. Στις δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του ο ανιχνευτής ήχων δεν καταγράφει ένταση ήχου και το ίδιο συμβαίνει σε άλλες δύο θέσεις ανάμεσα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του. Αν η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης για τον ανιχνευτή ήχων είναι $D=50\text{N/m}$ και ο ταλαντωτής την στιγμή $t=0$ βρίσκεται στο σημείο M και πλησιάζει την πηγή (1) να βρεθούν:

- A) Το πλάτος ταλάντωσης του ανιχνευτή ήχων.
- B) Σε ποιες θέσεις ο ανιχνευτής καταγράφει μέγιστη ένταση ήχου.
- Γ) Ποια η εξίσωση της συχνότητας σε συνάρτηση με τον χρόνο που καταγράφει ο ανιχνευτής ήχων για κάθε ήχο που προέρχεται ξεχωριστά από την κάθε πηγή.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $u_{\text{ηχ}}=340\text{m/sec}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές Π1 και Π2 διαδίδονται δύο ηχητικά κύματα με μήκος κύματος που θα βρεθεί από την σχέση $u_{\text{ηχ}}=\lambda \cdot f$ άρα $\lambda=0,5\text{m}$. Τα κύματα αυτά διαδίδονται αντίθετα με αποτέλεσμα πάνω στην ευθεία που ενώνει τις δύο πηγές να δημιουργηθεί «στάσιμο κύμα». Το μέσο M είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής «κοιλία» του «στάσιμου κύματος». Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος θα μπορούσαμε να κάνουμε το παρακάτω σχήμα



Οι δύο ακραίοι δεσμοί αποτελούν και τα άκρα της ταλάντωσης του ταλαντωτή.

$$\text{Έτσι } A=3\lambda/4=0,375\text{m}.$$

- B) Για να καταγράφει μέγιστη ένταση ήχου θα πρέπει να βρίσκεται σε θέση όπου θα αντιστοιχεί κοιλία του «στάσιμου κύματος». Αυτό συμβαίνει στην θέση Θ.Ι.Τ. και σε οριζόντια απόσταση $\lambda/2$ δεξιά και αριστερά της θέσης ισορροπίας

της ταλάντωσης του ανιχνευτή ήχων. Δηλαδή στις θέσεις $-0,25\text{m}$ και $0,25\text{m}$ αριστερά και δεξιά του M .

Γ) Η εξίσωση ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση $U=\omega \cdot A \cdot \sin \omega t=3,75 \sin 10 t$ (S.I.)

Έτσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (1) θα έχουμε

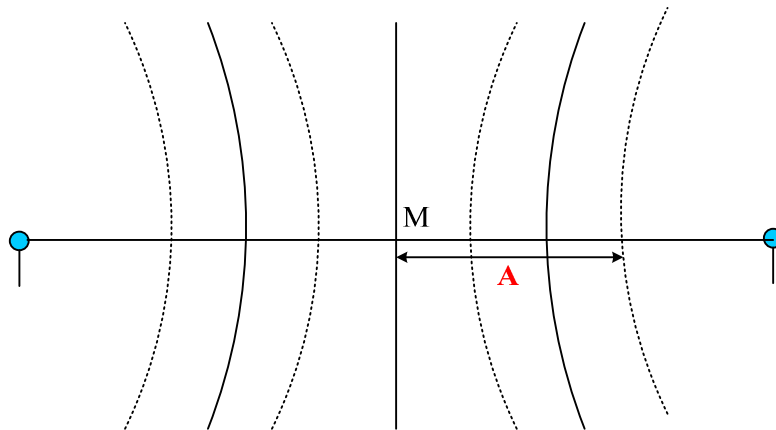
$$F_1=(340+3,75 \sin 10 t) \cdot 680 / 340=680+7,5 \sin 10 t \text{ (S.I.)}$$

Έτσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (2) θα έχουμε

$$F_2=(340-3,75 \sin 10 t) \cdot 680 / 340=680-7,5 \sin 10 t \text{ (S.I.)}$$

Δεύτερη λύση:

Α) Πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές Π1 και Π2 διαδίδονται δύο ηχητικά κύματα με μήκος κύματος που θα βρεθεί από την σχέση $u \lambda = \lambda \cdot F$ άρα $\lambda=0,5\text{m}$. Οι σύγχρονες πηγές δημιουργούν φαινόμενο συμβολής και οι κροσσοί συμβολής φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Ο κροσσός ενίσχυσης από τον κροσσό απόσβεσης πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές απέχει απόσταση $\lambda/4$ έτσι το πλάτος της ταλάντωσης του ανιχνευτή ήχων θα είναι $A=3\lambda/4=3/8\text{m}$.

Β) Για να καταγράψει μέγιστη ένταση ήχου θα πρέπει να βρίσκεται σε θέση όπου έχουμε κροσσό ενισχυτικής συμβολής. Αυτό συμβαίνει στην θέση Θ.Ι.Τ. και σε οριζόντια απόσταση $\lambda/2$ δεξιά και αριστερά της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης

του ανιχνευτή ήχων. Δηλαδή στις θέσεις $-0,25\text{m}$ και $0,25\text{m}$ αριστερά και δεξιά του Μ.

Γ) Η εξίσωση ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση $U=\omega \cdot A \cdot \sin \omega t=3,75\sin 10t$ (S.I.)

Έτσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (1) θα έχουμε

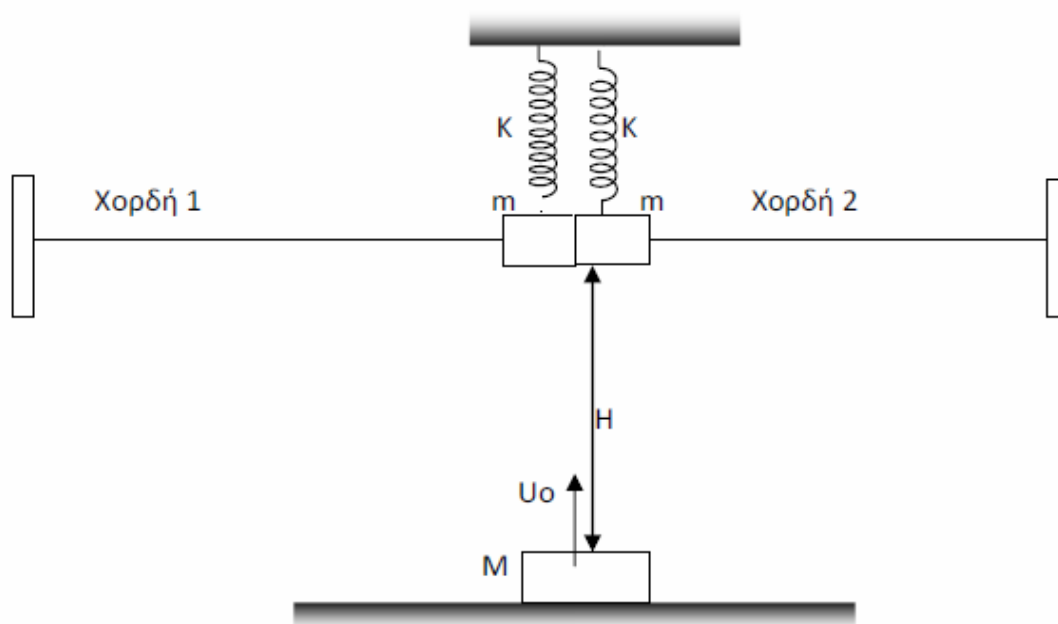
$$F_1=(340+3,75\sin 10t) \cdot 680/340=680+7,5\sin 10t \text{ (S.I.)}$$

Έτσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (2) θα έχουμε

$$F_2=(340-3,75\sin 10t) \cdot 680/340=680-7,5\sin 10t \text{ (S.I.)}$$

Δύο κύματα και μια κρούση.

Τα κατακόρυφα ιδανικά ελατήρια του παρακάτω σχήματος έχουν σταθερά $K=100\pi^2\text{N/m}$. Στο κάτω άκρο του κάθε ελατηρίου δένεται σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ και το κάθε σώμα ισορροπεί σε ύψος H πάνω από το έδαφος. Δύο οριζόντιες ελαστικές χορδές από διαφορετικό υλικό δένονται στο κάθε σώμα όπως στο παρακάτω σχήμα. Εκτοξεύουμε ταυτόχρονα το κάθε σώμα μάζας m με κατάλληλη ταχύτητα μέτρου U με φορά προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή $t=0$ τα σώματα μόλις και φτάνουν στη θέση φυσικού μήκους του κάθε ελατηρίου.



Την στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα μέτρου $U_0=2,5\text{m/sec}$ δεύτερο σώμα μάζας $M=2\text{Kg}$ από το έδαφος και την χρονική στιγμή $t=0,25\text{sec}$ τα τρία σώματα συγκρούονται ελαστικά ενώ το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων μάζας m και το κέντρο μάζας του σώματος μάζας M βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Στις δύο μεγάλου μήκους ελαστικές χορδές μπορούν να διαδίδονται εγκάρσια αρμονικά κύματα με ταχύτητες $U_1=5\text{m/sec}$ στην χορδή 1 και $U_2=10\text{m/sec}$ στη χορδή 2.

Να χαραχθούν οι μορφές των χορδών τις χρονικές στιγμές

A) $t_1=0$

B) $t_2= 0,25\text{sec}$

Γ) $t_3=0,35\text{sec}$

Το κάθε σώμα m να θεωρηθεί σημειακό και ότι τα δύο σώματα μάζας m δεν συγκρούονται μεταξύ τους. Να θεωρηθεί το $\pi^2=10$

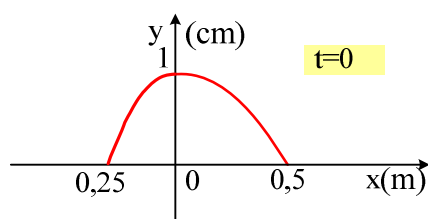
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Το κάθε σώμα μάζας m είναι η πηγή εγκάρσιων κυμάτων που θα διαδοθούν στις δύο χορδές. Η συχνότητα της πηγής άρα και του κάθε κύματος θα βρεθεί $f = 1/2\pi\sqrt{m/K} = 5\text{Hz}$. Το πλάτος ταλάντωσης του κάθε σώματος θα βρεθεί από την σχέση ισορροπίας για το σώμα μάζας m $m \cdot g = K \cdot A$ άρα $A = 0,01\text{m}$. Οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας για το κάθε σώμα μάζας m θα δίνονται από τις σχέσεις $\psi = 0,01\eta\mu(10\pi t + \pi/2)$ (S.I.) και

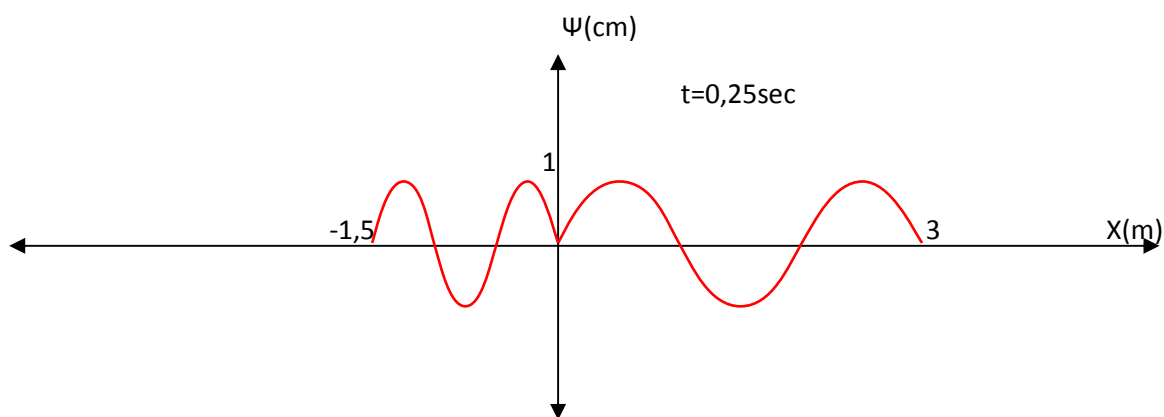
$$U = \pi/10 \sin(10\pi t + \pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Από τον νόμο της κυματικής για τα δύο κύματα θα έχουμε $U_1 = \lambda_1 \cdot f$ άρα $\lambda_1 = 1\text{m}$ και αντίστοιχα για τη χορδή 2 $\lambda_2 = 2\text{m}$.

Την χρονική στιγμή $t = 0\text{sec}$ οι πηγές θα βρίσκονται στην Θ.Μ.Α. έτσι οι μορφές των δύο χορδών θα είναι



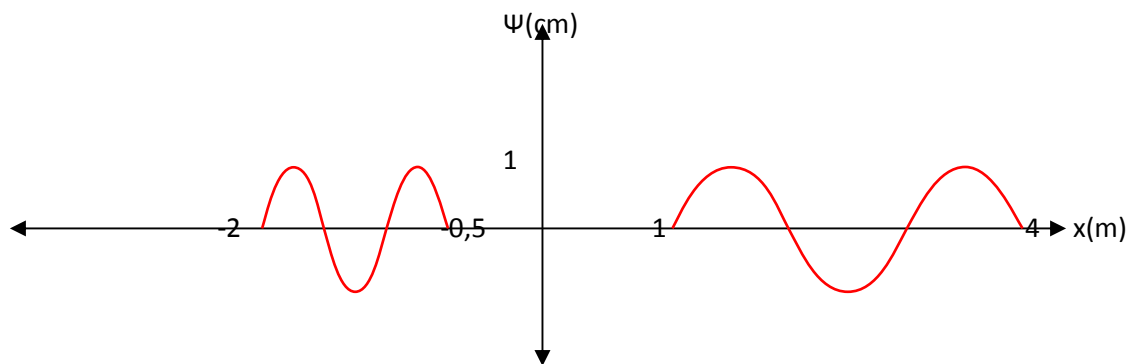
Την χρονική στιγμή $t_2 = 0,25\text{sec}$ κύμα στη χορδή 1 έχει διαδοθεί κατά $\Delta x_1 = U_1 \cdot t_2 = 1,25\text{m}$ ενώ στη χορδή 2 $\Delta x_2 = U_2 \cdot t_2 = 2,5\text{m}$. Έτσι το κύμα στη χορδή 1 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x_1 = -1,5\text{m}$ και το κύμα στη χορδή 2 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x_2 = 3\text{m}$. Η μορφή των δύο χορδών θα έχει μορφή



Την χρονική στιγμή $t = 0,25\text{sec}$ θα γίνει η κρούση. Με αντικατάσταση στις εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας για το σώμα μάζας m θα βρούμε $\psi = 0\text{m}$ και $U = -\pi/10 \text{ m/sec}$ δηλαδή το σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ και πλησιάζει προς το έδαφος. Την ίδια στιγμή το σώμα μάζας M από το νόμο της ταχύτητας στην κατακόρυφη βολή προς τα πάνω θα μας δώσει $U_2 = U_0 - g \cdot t = 0\text{m/sec}$. Τα τρία σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και τα σώματα με μάζες m έχουν άθροισμα μαζών ίσο με την μάζα M . Έτσι θα ανταλλάξουν

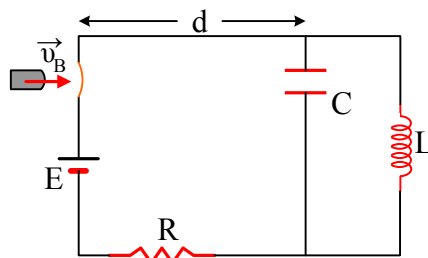
ταχύτητες. Δηλαδή τα σώματα με μάζας m (η πηγή του κάθε κύματος) θα σταματήσουν ακαριαία και το σώμα μάζας M θα κάνει μία κατακόρυφη βολή προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα μέτρου $V = \pi/10$ m/sec. Οι πηγές λοιπόν των δύο κυμάτων θα σταματήσουν στην ΘΙΤ. Έτσι παύουν πλέον να παράγονται κύματα.

Την χρονική στιγμή $t_3 = 0,35$ sec κύμα στη χορδή 1 έχει διαδοθεί κατά $\Delta x_3 = U_1 \cdot t_3 = 1,75$ m ενώ στη χορδή 2 $\Delta x_4 = U_2 \cdot t_3 = 3,5$ m. Έτσι το κύμα στη χορδή 1 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x_3 = -2$ m και το κύμα στη χορδή 2 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x_4 = 4$ m. Η μορφή των δύο χορδών θα είναι



Δύο ηλεκτρικές ταλαντώσεις στο ίδιο κύκλωμα.

Ενα βλήμα από καουτσούκ κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα κόβει το λεπτό αλουμινόχαρτο του παρακάτω σχήματος την στιγμή $t=0$. Στη συνέχεια το βλήμα σφηνώνεται ακαριαία και καλύπτει όλο το χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή την χρονική στιγμή $2T$ όπου T η περίοδος ταλάντωσης του αρχικού κυκλώματος L-C. Δίνονται $E=100V$, $C=1mF$, $L=1mH$ και $R=20\Omega$, ενώ η διηλεκτρική σταθερά του βλήματος είναι $\epsilon=4$. Αν η απόσταση αλουμινόχαρτου- πυκνωτή είναι $d=20cm$ να βρεθούν :



- A) Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος αν αυτή θεωρηθεί σταθερή και οριζόντια
B) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του φορτίου του κάτω οπλισμού πυκνωτή για χρόνο $t=8\pi ms$ μετά το κόψιμο του αλουμινόχαρτου.

Απάντηση:

Την στιγμή $t=0$ που το βλήμα κόβει το αλουμινόχαρτο η πηγή βγαίνει εκτός κυκλώματος και αρχίζει η ηλεκτρική ταλάντωση L-C έχοντας όλη της ενέργειά της στο πηνίο αφού το ρεύμα σε αυτό έχει ήδη αποκατασταθεί. Ο πυκνωτής εκείνη τη στιγμή είναι αφορτιστος αφού η τάση του είναι ίση με του πηνίου δηλαδή 0.

Το ρεύμα λοιπόν που διαρρέει το πηνίο την $t=0$ είναι $I=E/R=5A$.

$$\text{Η } T=2\pi\sqrt{LC} \text{ άρα } T=2\pi\cdot 10^{-3}\text{sec.}$$

Το βλήμα εκτελεί ομαλή κίνηση. Έτσι:

$$d=V_B\cdot 2T \text{ άρα } V_B=50/\pi \text{ m/sec}$$

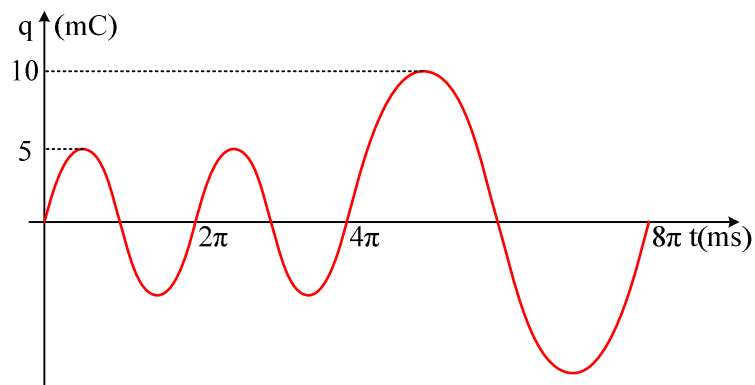
Την στιγμή του σφηνώματος η ενέργεια του κυκλώματος είναι και πάλι στο πηνίο. Τότε όμως η προσθήκη του βλήματος στον πυκνωτή του αλλάζει την χωρητικότητα

και άρα την περίοδο ταλάντωσης του κυκλώματος. Η νέα χωρητικότητα του πυκνωτή θα είναι $C' = \epsilon \cdot C = 4 \cdot 10^{-3} \text{F}$.

Η νέα λοιπόν περίοδος θα είναι $T' = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{sec}$.

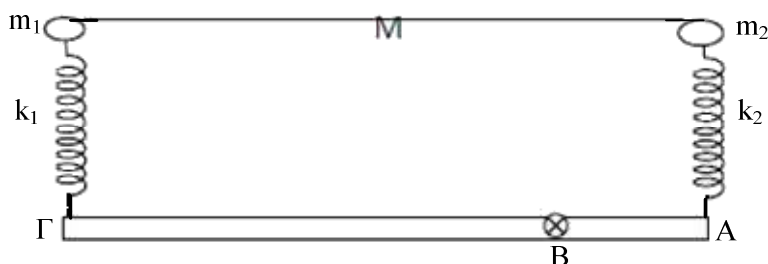
Από την ΑΔΕΤ στο αρχικό κύκλωμα $UB_{\max} = UE_{\max}$ έχουμε $Q = 5 \text{mC}$ ενώ για το τελικό κύκλωμα $Q' = 10 \text{mC}$.

Έτσι η γραφική παράσταση του κάτω οπλισμού που φορτίζεται πρώτα θετικά έχουμε



Δύο ελατήρια- ταλάντωση και κύμα.

Η αβαρής ράβδος ΑΓ του παρακάτω σχήματος έχει μήκος $L=\pi/5\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο καρφί που σταθερά στερεωμένο στο σημείο Β με την απόσταση $AB=AG/5$. Στα άκρα Α και Γ της ράβδου ισορροπούν κατακόρυφα δύο ελατήρια με το ίδιο φυσικό μήκος και σταθερές $K_1=100\text{N/m}$ και $K_2=400\text{N/m}$ και πάνω στα ελατήρια τοποθετούνται δύο σημειακά σώματα με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$. Συνδέουμε τα δύο σώματα με αβαρή οριζόντια ελαστική χορδή.



Την χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε τα δύο σώματα με κατάλληλη αρχική ταχύτητα και φορά προς τα πάνω έτσι ώστε τα ελατήρια μόλις και να μην ξεπερνούν το φυσικό τους μήκος. Στην ελαστική χορδή μπορούν να διαδοθούν αρμονικά κύματα με ταχύτητα $U=0,5\text{ m/sec}$.

Α) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα ισορροπεί και να βρεθεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται το καρφί σε συνάρτηση με το χρόνο.

Β) Να σχεδιασθεί η μορφή της ελαστικής χορδής την χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το μέσο Μ της χορδής. Ποια η ταχύτητα ταλάντωσης του μέσου της χορδής εκείνη τη στιγμή. Πόσα ακόμη σημεία της χορδής έχουν εκείνη τη στιγμή την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης;

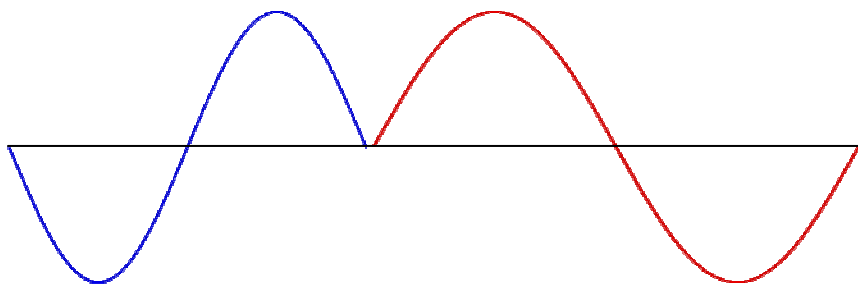
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Για την ισορροπία του κάθε σώματος $m_1 \cdot g = K_1 \cdot x_1$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$ $m_2 \cdot g = K_2 \cdot x_2$ άρα $x_2 = 0,1\text{m}$. Για να μην ξεπερνάνε τα δύο σώματα τη Θ.Φ.Μ.Ε θα πρέπει και το πλάτος της ταλάντωσης του κάθε σώματος να είναι $A_1 = A_2 = 0,1\text{m}$. Η δύναμη του κάθε ελατηρίου για μία τυχαία θέση θα δίνεται από την σχέση $F_{ελ1} - m_1 \cdot g = -K_1 \cdot A_1 \sin \omega_1 \cdot t$ και $F_{ελ2} - m_2 \cdot g = -K_2 \cdot A_2 \sin \omega_1 \cdot t$ μετά από πράξεις $F_{ελ1} = 10 - 10\eta\mu 10t$ (SI) και $F_{ελ2} = 40 - 40\eta\mu 10t$ (SI)

Για να ισορροπεί το σύστημα θα πρέπει $\Sigma \tau(0) = 0$ άρα $-F_{ελ2} \cdot (BG) + F_{ελ1} \cdot (AB) = 0$ άρα

$-(40 - 40\eta\mu 10t) \cdot \pi/5 + (10 - 10\eta\mu 10t) \cdot 4\pi/5 = 0$ που ισχύει άρα το σύστημα ισορροπεί. Για την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα $F_{καρφιού} = F_{ελ1} + F_{ελ2} = 50 - 50\eta\mu 10t$.

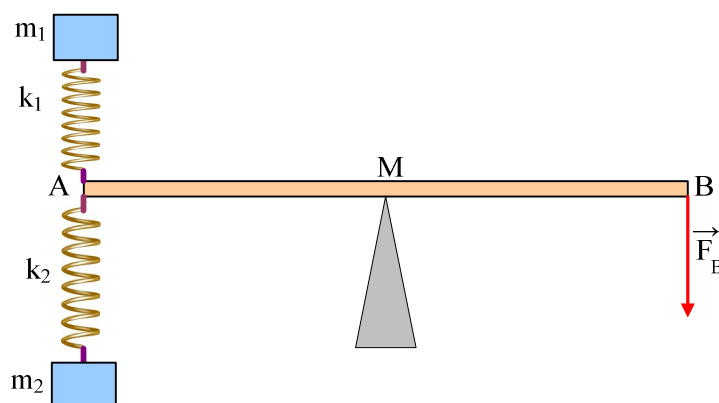
Β) Το μέσο Μ απέχει απόσταση $L/2 = \pi/10\text{ m}$ και θα χρειασθεί χρόνος $t = L/2/U = \pi/5\text{sec}$ για να φτάσει το κάθε κύμα στο μέσο Μ. Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί και με την περίοδο και των δύο κυμάτων που δημιουργούν οι δύο ταλαντώσεις. Έτσι το σχήμα της χορδής θα είναι



Το μέσο M είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και η μέγιστη ταχύτητά του θα δίνεται από τη σχέση $U_{\max} = \omega \cdot 2A = 2\pi/\text{sec}$. Κανένα άλλο σημείο δεν έχει την ίδια ταχύτητα με το μέσο M γιατί δεν έχει αρχίσει ακόμη η συμβολή των δύο κυμάτων.

Δυο ελατήρια και μια ράβδος.

Στο παρακάτω σχήμα η αβαρής ράβδος AB ισορροπεί συνεχώς οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου υποστηρίγματος που βρίσκεται στο μέσο M της ράβδου και την βοήθεια κατάλληλης κατακόρυφης δύναμης F_B που ασκείται στο σημείο B της ράβδου.



Πάνω στα κατακόρυφα ελατήρια με σταθερές $K_1=100\text{N/m}$ και $K_2=400\text{N/m}$ και με το ίδιο φυσικό μήκος l_0 ισορροπούν δύο σώματα με μάζες $m_1=1\text{ kg}$ και $m_2=4\text{ kg}$. Την χρονική στιγμή $t=0$ φέρνουμε τα ελατήρια στο φυσικό τους μήκος και τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 αφήνονται ταυτόχρονα ελεύθερα ενώ η ράβδος AB με την βοήθεια της εξωτερικής δύναμης συνεχίζει να παραμένει ακίνητη σε όλη της διάρκεια της ταλάντωσης των δύο σωμάτων.

A) Να βρεθεί η εξίσωση της δύναμης F_B σε συνάρτηση με το χρόνο.

B) Αν τα δύο σώματα θεωρηθούν σημειακά να αποδειχθεί ότι η μεταξύ τους απόσταση παραμένει σταθερή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Το κάθε σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση με γωνιακές συχνότητες που θα βρεθούν από την σχέση $\omega=\sqrt{K/m}$ άρα $\omega_1=\omega_2=10\text{rad/sec}$ και πλάτη που θα βρεθούν από την συνθήκη ισορροπίας του κάθε σώματος $M \cdot g = K \cdot A$ άρα $A_1=A_2=0,1\text{m}$.

Η εξίσωση λοιπόν της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του για το κάθε σώμα, αν θεωρήσουμε θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, θα είναι

$$\psi_1=\psi_2=0,1\sin(10t+\pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Το πάνω ελατήριο θα είναι συνεχώς συμπιεσμένο και άρα η δύναμη του ελατηρίου θα έχει φορά συνεχώς προς τα κάτω ενώ το κάτω ελατήριο θα είναι συνεχώς τεντωμένο άρα και η δύναμη αυτού του ελατηρίου θα έχει συνεχώς φορά προς τα κάτω.

Για μία τυχαία θέση για το πάνω σώμα $\Sigma F = -K_1 \cdot \psi$ άρα $F_{ελ1} - m_1 \cdot g = -K_1 \cdot \psi_1$ (1)

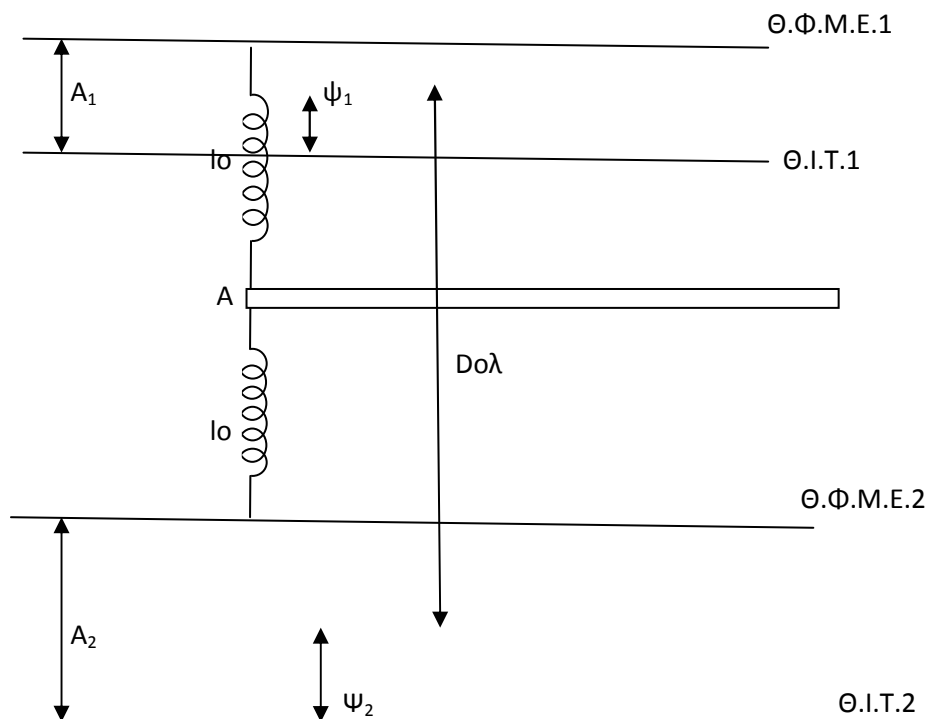
Για μία τυχαία θέση για το κάτω σώμα $\Sigma F = -K_2 \cdot \psi$ άρα $F_{ελ2} - m_2 \cdot g = -K_2 \cdot \psi_2$ (2)

Κάνοντας πράξεις στην (1) και (2) θα βρούμε $F_{ελ1}=10-10\eta\mu(10t+\pi/2)$ (S.I.)

Και $F_{ελ2}=40-40\eta\mu(10t+\pi/2)$ (S.I.)

Από την ισορροπία της ράβδου θα έχουμε $\Sigma\tau(M)=0$ άρα $-F_B \cdot L/2 + F_{ελ1} \cdot L/2 + F_{ελ2} \cdot L/2=0$ άρα $F_B=F_{ελ1} + F_{ελ2}$ και μετά από πράξεις $F_B=50-50\eta\mu(10t+\pi/2)$ (S.I.)

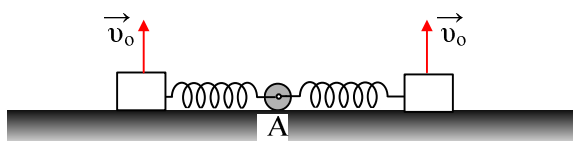
Β) Η απόσταση $Do\lambda$ των δύο σημειακών σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 μπορεί να βρεθεί με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος



$$Do\lambda=2l_0+A_2-A_1+\psi_1-\psi_2=2l_0$$

Δύο ελατήρια και μια κρούση

Στο παρακάτω σχήμα τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=K_2=100\text{N/m}$, φυσικό μήκος $l_0=0,51\text{m}$, ενώ τα σώματα έχουν μάζες $m_1=m_2=1\text{kg}$. Κάποια χρονική στιγμή εκτοξεύουμε ταυτόχρονα τα δύο σώματα με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα μέτρου U_0 . Τα ελατήρια αρχικά έχουν το φυσικό τους μήκος και είναι στερεωμένα ακλόνητα στο σημείο Α. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά όταν τα ελατήρια γίνουν κατακόρυφα και οι ταχύτητες των σωμάτων γίνουν οριζόντιες.



Αν μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί με την βοήθεια των δύο ελατηρίων κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση πλάτους $A=0,09\text{ m}$. Να βρεθούν:

- A) Το ύψος πάνω από το έδαφος που έγινε η σύγκρουση
- B) Το μέτρο της αρχικής U_0 .
- Γ) Η απώλεια της ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της πλαστικής κρούσης των δύο σωμάτων.

Δίνεται ότι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με το μήκος του ελατηρίου στη θέση αυτή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

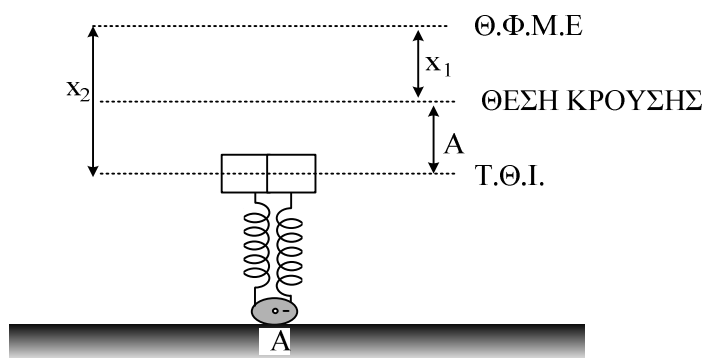
Σχόλια για την άσκηση:

Η άσκηση δεν μελετά τη κίνηση των σωμάτων, δίνω σαν δεδομένα δύο πράγματα.

- 1) το ότι τη στιγμή της σύγκρουσης οι ταχύτητες είναι οριζόντιες και
- 2) η ακτίνα καμπυλότητας την στιγμή της κρούσης πρέπει να θεωρηθεί ίση με το μήκος του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή.

Με αυτά τα δεδομένα η λύση στέκει.

A)Επειδή τα σώματα έχουν την ίδια αρχική ταχύτητα την ίδια μάζα και φτάνουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη θέση μετά την κρούση τους θα έχουν μηδενική ταχύτητα εξαιτίας της Α.Δ.Ο.Μετά την κρούση υπάρχει ένα σώμα μάζας $m_{ολ}=2\text{Kg}$ που είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια όπως στο παρακάτω σχήμα.



Για την θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει $m_{ολ}.g=(K_1+K_2).x_2$ άρα $x_2=0,1\text{m}$

Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα δεν έχει ταχύτητα άρα βρισκόταν σε ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το $A=x_2-x_1$ (1) όπου x_1 η συσπίρωση του κάθε ελατηρίου πριν την κρούση των δύο σωμάτων.Με την βοήθεια της σχέσης (1) $x_1=0,01\text{m}$.Άρα το ύψος της κρούσης από το έδαφος θα είναι $H=l_0-x_1=0,5\text{m}$.

B) Αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με το μήκος του ελατηρίου στη θέση αυτή με την βοήθεια της κεντρομόλου δύναμης για κατακόρυφη θέση θα έχουμε

$$M.g-k.x_1=M.U^2/H \text{ μετά από πράξεις } U=\sqrt{4,5}\text{m/sec.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην θέση κρούσης θα έχουμε

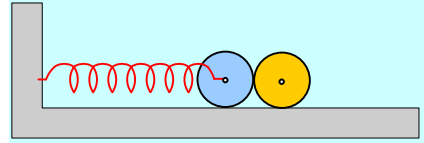
$$\frac{1}{2}.M.U_0^2=\frac{1}{2}.K.x_1^2 +M.g.H +\frac{1}{2}.M.U^2 \text{ θα βρούμε } U_0=\sqrt{14,51}\text{m/sec}$$

Γ)Με την βοήθεια της ΑΔΕ πριν και μετά την κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{2}.M.U^2 + \frac{1}{2}.M.U^2=Q_{κρ} \text{ άρα } Q_{κρ}=4,5\text{J}$$

Δύο σφαίρες σε επαφή και ταλάντωση

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο μη λείες σφαίρες ίσης μάζας $M=1\text{Kg}$ και ίδιας ακτίνας $R=0,1\text{m}$. Η μία σφαίρα είναι συνδεδεμένη με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=70\text{N/m}$ που δεν εμποδίζει την περιστροφή της σφαίρας και η δύναμη του ελατηρίου ασκείται στο κέντρο της σφαίρας.



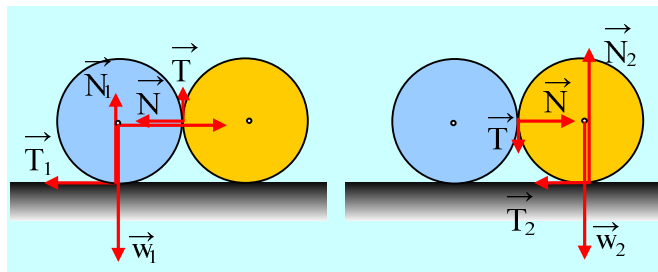
Συσπειρώνουμε το ελατήριο σε σχέση με το φυσικό του μήκος κατά $x=0,2\text{m}$ και φέρνουμε σε επαφή τις δύο σφαίρες. Την χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα. Οι σφαίρες συνεχώς κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν και δεν αναπηδάνε.

- A) Ποια χρονική στιγμή θα χαθεί η επαφή των δύο σφαιρών;
B) Να βρεθεί το τελικό πλάτος ταλάντωσης του κέντρου μάζας της σφαίρας που είναι δεμένη στο ελατήριο.
Γ) Να βρεθεί η συνάρτηση της απόστασης των δύο κέντρων μάζας των δύο σφαιρών σε σχέση με το χρόνο.

$$I_{\text{cm}}=0,4 MR^2$$

Απάντηση

A) Οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο σφαίρες φαίνονται στο σχήμα



Για την μεταφορική κίνηση των δύο σφαιρών θα έχουμε

$$Kx - N - T_1 = M a_{\text{cm}} \quad (1)$$

$$N - T_2 = M a_{\text{cm}} \quad (2)$$

$$\text{Αν προσθέσουμε τις δύο σχέσεις } Kx - T_1 - T_2 = 2M a_{\text{cm}} \quad (3)$$

Για την στροφική κίνηση των δύο σφαιρών θα έχουμε

$$T_1 R - TR = 0,4MR^2 \alpha_{\text{γων}} \quad \text{ή} \quad T_1 - T = 0,4M a_{\text{cm}} \quad (4)$$

$$T_2 R - TR = 0,4MR^2 \alpha_{\text{γων}} \quad \text{ή} \quad T_2 - T = 0,4M a_{\text{cm}} \quad (5)$$

$$\text{Αν προσθέσουμε τις σχέσεις } T_1 + T_2 = 0,8M a_{\text{cm}} \quad (6)$$

$$\text{Με την βοήθεια των σχέσεων (3) και (6) θα βρούμε } a_{\text{cm}} = \frac{kx}{2,8M}$$

Για την ταλάντωση των δύο κέντρων μάζας των σφαιρών θα έχουμε

$$\Sigma F = T_1 + T_2 - Kx + N - N = 0,8 \frac{kx}{2,8} - kx = -\frac{5}{7} kx \quad \text{άρα το σύστημα θα εκτελούσε γατ.}$$

Μόλις το ελατήριο φτάνει στην θέση του φυσικού του μήκους αρχίζει να ασκεί δύναμη αντίθετη της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας που είναι δεμένη με το ελατήριο. Έτσι η σφαίρα αρχίζει να επιβραδύνεται. Εκείνη τη στιγμή η δύο σφαίρες χάνουν την επαφή τους.

$$\text{Η στιγμή που θα χαθεί η επαφή των δύο σφαιρών θα είναι } t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

Β) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της κάθε σφαίρας την στιγμή του χάσιμου της επαφής θα είναι:

$$v_{cm} = \omega A = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ m/s}$$

Η σφαίρα που δεν ήταν δεμένη με το ελατήριο συνεχίζει την κίνησή της στο οριζόντιο επίπεδο

εκτελώντας ομαλή στροφική με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{v_{cm}}{R} = 10 \text{ rad/s}$ και ομαλή μεταφορική κίνηση

με $v_{cm} = 1 \text{ m/s}$.

Για τη σφαίρα που είναι δεμένη στο ελατήριο θα ισχύουν

$$Kx - T = M a_{cm} \quad (7) \quad TR = 0,4 MR^2 \alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad T = 0,4 M a_{cm} \quad (8)$$

$$\text{Με την βοήθεια των σχέσεων } T = \frac{2}{7} kx \quad (9)$$

Για την ταλάντωση του κέντρου μάζας της σφαίρας που είναι δεμένη με το ελατήριο θα έχουμε

$$\Sigma F = T - kx = -\frac{5}{7} kx \quad \text{άρα το κέντρο μάζας της σφαίρας και πάλι εκτελεί γατ με } D = \frac{5}{7} k$$

$$\text{Η } v_{cm} = \omega' A' \quad \text{άρα } A' = 0,1 \sqrt{2} \text{ m}$$

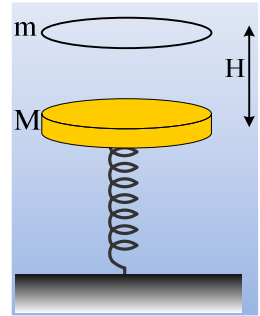
Γ) Η απόσταση των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών θα δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\Delta X = 2R = 0,2 \quad 0 < t < \pi/10 \quad (\text{SI})$$

$$\Delta X = 2R + x' - x = 0,2 + v_{cm} \left(t - \frac{\pi}{10} \right) - 0,1 \sqrt{2} \eta \mu \left[5 \sqrt{2} \left(t - \frac{\pi}{10} \right) \right] \quad t > \frac{\pi}{10} \quad (\text{S.I.})$$

Δίσκος και δαχτυλίδι με κρούση και ταλάντωση

Ένας λεπτότατος δίσκος μάζας $M=1\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,3\text{m}$ ισορροπεί οριζόντιος με την βοήθεια ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $L_0=0,7875\text{m}$. Το ελατήριο είναι περασμένο στο κέντρο του δίσκου αφήνοντας τον ελεύθερο να περιστρέφεται οριζόντιος και χωρίς τριβές με το άκρο του ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο έδαφος. Δαχτυλίδι μάζας $m=0,5\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,3\text{m}$ βρίσκεται ακίνητο σε ύψος $H=0,8\text{m}$ πάνω από τον δίσκο σε οριζόντια θέση έτσι ώστε τα κέντρα του δίσκου και του δαχτυλιδιού να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη. Με την βοήθεια μιας στιγμιαίας ροπής ζεύγους δίνουμε στο δαχτυλίδι αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0=10\text{r/s}$ και ταυτόχρονα αφήνουμε το δαχτυλίδι ελεύθερο. Το δαχτυλίδι μετά από λίγο και τη χρονική στιγμή $t=0$ διαπερνάει ακαριαία το δίσκο και εξέρχεται από αυτόν με το μέτρο της αρχικής του γωνιακής ταχύτητας να μειώνεται κατά 50%. Το δαχτυλίδι εξαιτίας της κρούσης με το δίσκο χάνει το 75% της κινητικής του ενέργειας που είχε λίγο πριν γίνει η κρούση με το δίσκο.



Να βρεθούν:

- A) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του δαχτυλιδιού αν η κρούση με το δάπεδο είναι πλαστική.
- B) Η μέγιστη κινητική του δίσκου
- Γ) Η σχέση του μέτρου της ταχύτητας ενός σημείου του άκρου του δίσκου σε συνάρτηση του χρόνου αν θετική φορά θεωρηθεί η φορά προς τα κάτω.

Για το δίσκο $I_{cm}=0,5MR^2$ και $g=10\text{m/sec}^2$.

Απάντηση:

A) Το δαχτυλίδι πέφτοντας εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή την αρχική του γωνιακή ταχύτητα μιας και η μοναδική δύναμη που επιδρά πάνω του είναι το βάρος που δεν μπορεί να προκαλέσει καμία ροπή. Ταυτόχρονα όμως εκτελεί και μεταφορική κίνηση που είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση μέχρι την κρούση με το δίσκο θα έχουμε $mgH = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$ άρα $v_{cm}=4\text{m/sec}$.

Με την βοήθεια των δεδομένων ισχύει $K_{τελ}=0,25K_{αρχ}$ άρα:

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{\omega_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m v_{cmτελ}^2 = 0,25 \left(\frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \right)$$

θα βρούμε $v_{cmτελ}=2\text{m/sec}$.

Για την αρχική ισορροπία του δίσκου θα ισχύει $Mg = Kx_1$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$. Ο δίσκος βρίσκεται σε ένα τελικό ύψος πάνω από το έδαφος $D = L_0 - x_1 = 0,6875\text{m}$.

Μετά την κρούση το δαχτυλίδι εκτελεί και πάλι ομαλή στροφική και επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση. Έτσι την μέγιστη κινητική του ενέργεια το δαχτυλίδι θα την έχει λίγο πριν την πλαστική του κρούση με το δάπεδο. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση του δαχτυλιδιού μετά την κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{\omega_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m v_{\text{cmτελ}}^2 + mgD = K_{\text{max}} \quad \text{άρα} \quad K_{\text{max}} = 5\text{J}$$

Β) Για την στιγμιαία κρούση του δαχτυλιδιού και του δίσκου θα πάρουμε με την βοήθεια της ΑΔΣ και της ΑΔΟ

$$mR^2\omega_0 = 0,5MR^2\omega_1 + mR^2\omega_0/2 \quad \text{θα βρούμε} \quad \omega_1 = 5\text{r/s}$$

$$m v_{\text{cm}} = m v_{\text{cmτελ}} + M v_{\text{δίσκ}} \quad \text{θα βρούμε} \quad v_{\text{δίσκ}} = 1\text{m/s}$$

Ο δίσκος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 5\text{r/s}$ και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας του δίσκου θα εκτελεί κατακόρυφη γ.α.τ. με εξίσωση ταλάντωσης ταχύτητας:

$$v = 1 \sin 10t \quad (\text{S.I.})$$

Έτσι η μέγιστη κινητική ενέργεια του δίσκου θα είναι όταν αυτός βρίσκεται στην ΘΙΤ για την ταλάντωση και θα είναι:

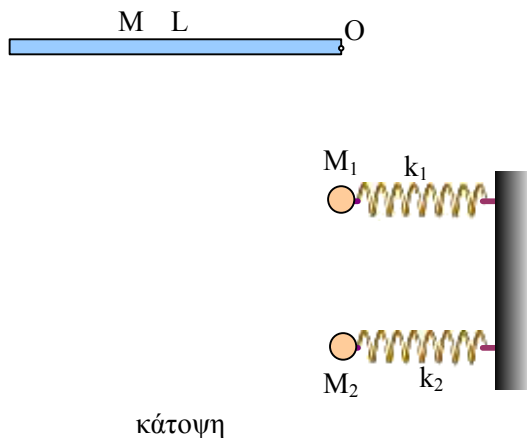
$$K_{\text{max}} = K_{\text{μετmax}} + K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} M v_{\text{δίσκ}}^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = 1,0625\text{J}$$

Γ) Οποιοδήποτε σημείο της περιφέρειας του δίσκου θα ταχύτητα που θα αποτελείται από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας λόγω μεταφορά και της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής. Οι δύο αυτές ταχύτητες είναι συνεχώς κάθετες μεταξύ τους. Έτσι το μέτρο της συνολικής ταχύτητας του κάθε σημείου της περιφέρειας του δίσκου θα δίνεται από την σχέση

$$v = \sqrt{(\omega_1 R)^2 + v^2} = \sqrt{2,25 + \sin^2 10t} \quad (\text{SI})$$

Διπλή κρούση ράβδου με σημειακές μάζες

Ράβδος μάζας $M=0,3\text{Kg}$ και μήκους $L=2\text{ m}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το ένα της άκρο στο σημείο O πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι όπως στο παρακάτω σχήμα.



Το σημείο O και τα σημειακά σώματα M_1 και M_2 που έχουν μάζες $M_1 = M_2 = 1\text{ Kg}$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και απέχουν $L/2$ και L αντίστοιχα από το σημείο O . Οι άξονες των ελατηρίων είναι παράλληλοι μεταξύ τους και κάθετοι στην ευθεία που ενώνει τα σώματα και το σημείο O . Δίνουμε αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\text{ r/s}$ στην ράβδο έτσι ώστε η ράβδος μετά από λίγο να χτυπήσει ταυτόχρονα τις ακίνητες μάζες M_1 και M_2 . Μετά την ταυτόχρονη κρούση της ράβδου με τα δύο σώματα η ράβδος σταματάει ακαριαία. Τα σώματα με μάζες M_1 και M_2 είναι συνδεδεμένα με ιδανικά ελατήρια που έχουν σταθερές $K_1=100\text{N/m}$ και $K_2=25\text{N/m}$ και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω στο τραπέζι. Αν μετά και τη δεύτερη κρούση η ράβδος απομακρυνθεί με κάποιο τρόπο από το τραπέζι και το ένα σώμα συνεχίζει να ταλαντώνεται με το αρχικό του πλάτος $A=0,1\text{m}$ ενώ το άλλο σώμα ταλαντώνεται με το μισό του αρχικού του πλάτους να βρεθούν:

- Α) Το αρχικό και το τελικό πλάτος ταλάντωσης του ενός σώματος
- Β) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά και την δεύτερη κρούση
- Γ) Πόση η συνολική θερμότητα παράχθηκε στο παραπάνω φαινόμενο.

Δίνεται για την ράβδο $I_{cm}=1/12 \cdot M \cdot L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Για την κρούση της ράβδου με τα δύο σημειακά σώματα θα βρω με τη βοήθεια της ΑΔΣ

$$I \cdot \omega = M_1 \cdot U_1 \cdot L/2 + M_2 \cdot U_2 \cdot L \quad (1)$$

Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος M_1 είναι $T_1 = 2\pi \sqrt{M_1/K} = \pi/5\text{s}$

Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος M_2 είναι $T_2 = 2\pi \sqrt{M_2/K} = 2\pi/5\text{s}$

Παρατηρώ ότι $T_1 < T_2$ άρα το σώμα με μάζα M_1 θα επιστρέψει πρώτο στην θέση ισορροπίας του μετά από χρόνο $T_1/2$ και έτσι αυτό θα είναι το σώμα που θα ξαναχτυπήσει τη ράβδο. Το σώμα μάζας M_2 θα συνεχίσει την αρχική του ταλάντωση με το αρχικό πλάτος ενώ το σώμα μάζας M_1 θα ταλαντώνεται με το μισό του αρχικού του πλάτους

Από την ταλάντωση του σώματος M_2 $U_2 = \omega_2 \cdot A_2$ άρα $U_2 = 0,5 \text{ m/s}$ και από την σχέση (1) $U_1 = 3 \text{ m/sec}$

Από την ταλάντωση του σώματος M_1 $U_1 = \omega_1 \cdot A_1$ άρα $A_1 = 0,3 \text{ m}$ και από τα δεδομένα του προβλήματος $A_1' = 0,15 \text{ m}$.

Β) Μετά την δεύτερη κρούση του σώματος M_1 με την ράβδο το σώμα εκτελεί ταλάντωση με το μισό του αρχικού πλάτους αλλά δεν γνωρίζουμε τη φορά της ταχύτητας του σώματος M_1 . Έτσι πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις.

ι) αν η φορά της ταχύτητας είναι ίδια με την αρχική

ή ιι) η φορά της ταχύτητας είναι αντίθετη της αρχικής.

Για την πρώτη περίπτωση και με την βοήθεια της ΑΔΣ θα βρω:

$$M_1 \cdot U_1 \cdot L/2 = I \cdot \omega_1 + M_1 \cdot U_1' \cdot L/2 \quad (2) \quad \text{και} \quad U_1' = \omega_1 \cdot A_1' \quad \text{άρα} \quad U_1' = 1,5 \text{ m/s} \quad \text{και από την (2)} \quad \omega_1 = 15/4 \text{ r/s}$$

Για την δεύτερη περίπτωση και με την βοήθεια της ΑΔΣ θα βρω:

$$M_1 \cdot U_1 \cdot L/2 = I \cdot \omega_1 - M_1 \cdot U_1' \cdot L/2 \quad (3) \quad \text{και} \quad U_1' = \omega_1 \cdot A_1' \quad \text{άρα} \quad U_1' = 1,5 \text{ m/s} \quad \text{και από την (2)} \quad \omega_1 = 45/4 \text{ r/s}$$

Παρατηρώ ότι η τελική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στην δεύτερη περίπτωση είναι μεγαλύτερη της αρχικής γωνιακής ταχύτητας. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί γιατί τότε το σύστημα θα είχε μεγαλύτερη ενέργεια από την αρχική ενέργεια αφού και η ράβδος αλλά και τα σώματα θα είχαν μεγαλύτερη ενέργεια από την αρχική τους. Έτσι η δεύτερη περίπτωση πρέπει να απορριφθεί.

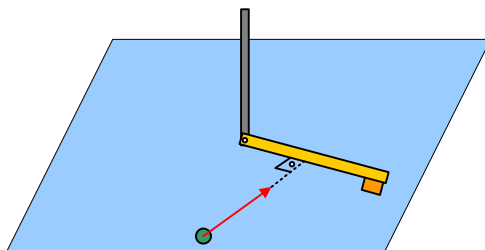
Γ) Για να βρω την θερμότητα θα εφαρμόσουμε ΑΔΕ για την αρχική και τελική κατάσταση της ράβδου και των δύο σωμάτων

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + E_1 + E_2 + Q \quad \text{άρα} \quad \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1'^2 + \frac{1}{2} K_1 \cdot A_1'^2 + \frac{1}{2} K_2 \cdot A_2'^2 + Q \quad \text{μετά από πράξεις}$$

θα βρούμε $Q = 15,9375 \text{ J}$

Διπλή κρούση και ρυθμοί μεταβολής Κινητικής ενέργειας

Πάνω σε οριζόντιο τραπέζι βρίσκεται ράβδος μάζας $M=3\text{Kg}$ και μήκους $l=2\text{m}$. Το ένα άκρο της ράβδου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο άξονα ενώ στο άλλο άκρο της ράβδου έχουμε στερεώσει σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ που ακουμπάει στο τραπέζι. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται παράλληλα με το τραπέζι χωρίς να βρίσκεται σε επαφή με αυτό γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής της. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος m και τραπεζιού είναι $\mu=0,3$. Βλήμα μάζας $m_1=1\text{ kg}$ κινείται παράλληλα με το τραπέζι και κάθετα προς την ράβδο με ταχύτητα $v=100\text{ m/s}$. Το βλήμα συγκρούεται πλαστικά με το κέντρο μάζας της ράβδου.



Μετά από χρόνο $\Delta t=5/9\text{sec}$ από την πρώτη κρούση ένα δεύτερο βλήμα μάζας $m_2=0,25\text{kg}$ πέφτει κατακόρυφα προς το τραπέζι συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m .

- A) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λίγο πριν συμβεί η δεύτερη κρούση και αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση.
- B) Να βρεθεί η συνολική γωνία που θα διαγράψει η ράβδος μέχρι να σταματήσει. Τα βλήματα να θεωρηθούν σημειακά και ότι οι κρούσεις γίνονται ακαριαία. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής της $I=1/3ML^2$.

Απάντηση:

A) Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \quad \text{άρα } m_1 v \cdot L/2 = I_0 \omega_1 \quad (1)$$

$$\text{Το } I_0 = 1/3 ML^2 + m_1 (L/2)^2 + m \cdot L^2 = 9\text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Με αντικατάσταση στην (1) θα πάρουμε $\omega_1 = 100/9\text{ r/sec}$.

Η δύναμη τριβής είναι $T=\mu \cdot N$ όπου N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στο σώμα m . Αν πάρουμε την ισορροπία του συστήματος στον άξονα $\psi\psi'$ με την συνθήκη των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου θα έχουμε

$$\begin{aligned}\Sigma\tau(O) &= 0 \quad \text{άρα} \\ -Mg \cdot L/2 - m \cdot g \cdot L - m_1 \cdot g \cdot L/2 + N \cdot L &= 0 \\ \text{άρα } N &= 30N \\ \text{άρα } T &= 0,3 \cdot 30 = 9N.\end{aligned}$$

Το σύστημα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφικά κίνηση με την δύναμη της τριβής να επιβραδύνει το σώμα. Από τον νόμο της στροφικής κίνησης θα πάρουμε

$$\begin{aligned}\Sigma\tau &= I \alpha_{γων} \quad \text{άρα } T \alpha \cdot L = I_{ολαγων} \alpha_{γων} \quad \text{άρα} \\ \alpha_{γων} &= 2 \text{rad/sec}^2.\end{aligned}$$

Έτσι:

$$\omega_2 = \omega_1 - \alpha_{γων} \cdot t = 100/9 - 2,5/9 = 10 \text{rad/sec}.$$

Αρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$\Delta K / \Delta t = -T \cdot L \cdot \omega_2 = -180 \text{J/sec}.$$

$$\text{Το } I_{ολ} = 1/3 ML^2 + m_1(L/2)^2 + m \cdot L^2 + m_2 \cdot L^2 = 10 \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα και για την δεύτερη κρούση θα έχουμε

$$\begin{aligned}L \alpha_{ρχ} &= L \tau_{τελ} \quad \text{άρα } I_{ολ} \omega_2 = I_{ολ} \omega_3 \\ \text{θα πάρουμε } \omega_3 &= 9 \text{r/sec}.\end{aligned}$$

Αν πάρουμε και πάλι την ισορροπία του συστήματος στον άξονα $\psi\psi'$ με την συνθήκη των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου θα έχουμε

$$\begin{aligned}\Sigma\tau(O) &= 0 \rightarrow \\ -Mg \cdot L/2 - m \cdot g \cdot L - m_1 \cdot g \cdot L/2 - m_2 \cdot g \cdot L + N' \cdot L &= 0 \rightarrow \\ N' &= 32,5N \quad \text{άρα} \\ T' &= 0,3 \cdot 32,5 = 9,75N.\end{aligned}$$

Αρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας αμέσως μετά την κρούση θα είναι :

$$\Delta K/\Delta t' = -T' \cdot L \cdot \omega_3 = -175,5 \text{ J/sec.}$$

B) Για την πρώτη κίνηση θα βρούμε την γωνιακή μετατόπιση της ράβδου από την σχέση $\theta_1 = \omega_1 \cdot t - 1/2 \alpha \gamma \omega \nu \cdot t^2 = 475/81 = 5,86 \text{ rad.}$

Για την κίνηση του συστήματος μετά την κρούση και με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} K_{\text{συσ}} &= Q_{\text{τρ}} \rightarrow \\ 1/2 I_{\text{ολ}} \cdot \omega_3^2 &= T' L \cdot \theta_2 \rightarrow \\ \theta_2 &= 20,77 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Αρα $\theta_{\text{ολ}} = 26,63 \text{ rad.}$

Διπλή κρούση και περιστροφή.

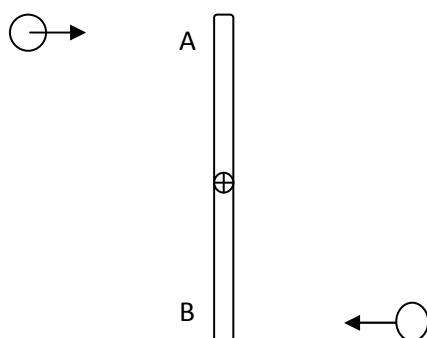
Οριζόντια λεπτή ράβδος AB μάζας $M=1,2\text{ kg}$ και μήκους $L=1\text{ m}$ μπορεί να ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=120\text{ N/m}$ που είναι συνδεδεμένο στο κέντρο της ράβδου. Η ράβδος έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται χωρίς τριβές οριζόντια γύρω από το κατακόρυφο ελατήριο. Δύο σημειακά βλήματα με μάζες $m_1=m_2=0,1\text{ kg}$ μπορούν να κινούνται οριζόντια με ταχύτητες $U_1=U_2=10\text{ m/sec}$ παράλληλα προς το έδαφος και κάθετα προς τη ράβδο κινούμενα αντίθετα και με φορά προς τα άκρα A και B της ράβδου. Τα δύο βλήματα συγκρούονται ακαριαία και πλαστικά με τα άκρα A και B της ράβδου. Να βρεθούν:

- A) Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου-σημειακών μαζών μετά την κρούση.
- B) Το πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει το κέντρο μάζας της ράβδου.
- Γ) Η ολική μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση.

Για την ράβδο $I_{cm}=1/12 \cdot M \cdot L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Με τη βοήθεια της κάτοψης του σχήματος

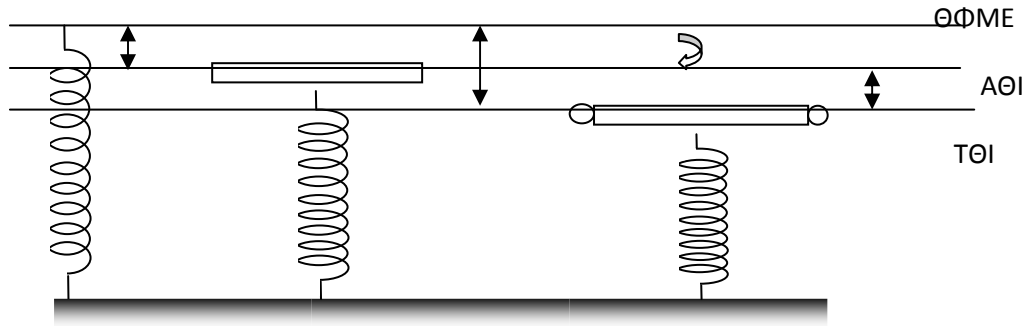


Και με τη βοήθεια της ΑΔΟ και της ΑΔΣ θα έχουμε

$m_1 \cdot U_1 - m_2 \cdot U_2 = (m_1 + m_2 + M) U_{\text{συστ}}$ θα βρούμε $U_{\text{συστ}} = 0\text{ m/sec}$. Το κέντρο μάζας δηλαδή δεν θα κινηθεί οριζόντια.

$m_1 \cdot U_1 \cdot L/2 + m_2 \cdot U_2 \cdot L/2 = (m_1 \cdot L^2/4 + m_2 \cdot L^2/4 + 1/12 \cdot M \cdot L^2) \cdot \omega_{\text{συστ}}$ μετά από πράξεις $\omega_{\text{συστ}} = 20/3\text{ rad/sec}$

Β) Μετά την κρούση και επειδή οι μάζες m_1 και m_2 είναι ίσες και η απόστασή τους από το κέντρο της ράβδου είναι ίδια η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο της ράβδου είναι 0. Άρα το σύστημα δεν θα περιστραφεί κατακόρυφα. Μετά την κρούση έχουμε αλλαγή της μάζας του συστήματος άρα και αλλαγή της θέσης ισορροπίας για την κατακόρυφη τώρα πια ταλάντωση του κέντρου μάζας της ράβδου



Για την αρχική ισορροπία της ράβδου $Mg = K \cdot x_1$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$

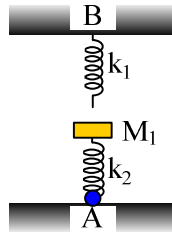
Για την τελική ισορροπία της ράβδου $(M + m_1 + m_2)g = Kx_2$ άρα $x_2 = 7/60\text{m}$

Το σύστημα μετά την κρούση δεν έχει κατακόρυφη ταχύτητα. Έτσι το κέντρο μάζας του συστήματος θα βρίσκεται στην ακραία θέση ταλάντωσης του. Άρα $A_{cm} = x_2 - x_1 = 1/60\text{m}$.

Γ) Το σύστημα τώρα εκτελεί ομαλή οριζόντια στροφική κίνηση με $\omega_{\text{συστ}} = 20/3 \text{ r/sec}$ αλλά και κατακόρυφη ταλάντωση με πλάτος $A_{cm} = 1/60\text{m}$. Άρα η μέγιστη κινητική του ενέργεια θα συμβαίνει ότι το σύστημα διέρχεται από την ΤΘΙ. Άρα $K_{\text{ολmax}} = 1/2 \cdot K \cdot A_{cm}^2 + 1/2 \cdot I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\text{συστ}}^2 = 3,35\text{J}$.

Διπλή αλλαγή θέσης ισορροπίας

Τα ελατήρια στο παρακάτω σχήμα έχουν ίδιο φυσικό μήκος $L_0=0,6\text{m}$ έχουν σταθερές $K_1 = K_2=200\text{N/m}$ και είναι στερεωμένα στην ίδια κατακόρυφο στα σημεία Α και Β και σε απόσταση $AB=1,2\text{m}$.



Πάνω στο ελατήριο με σταθερά K_1 ισορροπεί δεμένο σημειακό σώμα μάζας $M_1=2\text{Kg}$. Από τη θέση Α εκτοξεύουμε κατακόρυφα δεύτερο σημειακό μάζας $M_2=2\text{Kg}$ με αρχική ταχύτητα $v_0=4\text{ m/s}$ με αποτέλεσμα τα δύο σώματα να συγκρουστούν πλαστικά. Αν μετά την πλαστική κρούση το σύστημα των δύο σωμάτων ενώνεται ακαριαία και χωρίς απώλεια ενέργειας με το δεύτερο ελατήριο σταθεράς K_1 να βρεθούν:

- i) Η απώλεια ενέργειας κατά την πλαστική κρούση
- ii) Η ενέργεια ταλάντωσης που θα εκτελέσει τελικά το σύστημα
- iii) Ο χρόνος μετά την κρούση που θα χρειασθεί το σύστημα των δύο σωμάτων μέχρι να αποκτήσει για πρώτη φορά την μέγιστη ταχύτητά του.

Απάντηση:

- i) Από την ισορροπία του σώματος M_1 θα έχουμε $K_2 \cdot x_1 = M_1 \cdot g$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$.

Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σώματος M_2 θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} M_2 \cdot v^2 + M_2 \cdot g \cdot (L_0 - x_1)$$

μετά από πράξεις $v = \sqrt{6}\text{ m/s}$.

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ για την πλαστική κρούση $M_2 \cdot v = (M_1 + M_2) \cdot v_{\text{συσ}}$ θα βρούμε:

$$v_{\text{συσ}} = \sqrt{1,5}\text{ m/s}$$

Αν πάρουμε μία ΑΔΕ για την κρούση θα έχουμε

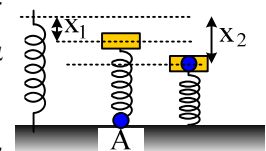
$$\frac{1}{2} M_2 v^2 = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v_{\text{συσ}}^2 + Q_{\text{κρούσης}}, \text{ θα βρεθεί } Q_{\text{κρούσης}} = 3\text{J}$$

- ii) Με την αύξηση της μάζας εξαιτίας της κρούσης έχουμε και αλλαγή της θέσης ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα. Για την νέα θέση ισορροπίας θα έχουμε $K_2 \cdot x_2 = (M_1 + M_2) \cdot g$ άρα $x_2 = 0,2\text{ m}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την αρχική ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα και πριν γίνει η σύγκρουση με το δεύτερο ελατήριο θα έχουμε

$$\frac{1}{2} M_{\text{ολ}} v_{\text{συσ}}^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} K_2 A^2 \text{ άρα } A = 0,2\text{m}.$$

Παρατηρώ ότι το πλάτος ταυτίζεται με την συσπείρωση του ελατηρίου για την θέση ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης. Αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο τελικά μόλις και φτάνει στην θέση του φυσικού του μήκους. Η θέση όμως αυτή είναι η θέση του φυσικού μήκους και του δεύτερου ελατηρίου μιας και η α-



πόσταση $AB=2L_0$. Άρα εκείνη την στιγμή πάνω στο σώμα που δεν έχει στιγμιαία ταχύτητα γαντζώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας και το δεύτερο ελατήριο με σταθερά K_1 . Μετά το γάντζωμα και του δεύτερου ελατηρίου θα αλλάξει και πάλι η θέση ισορροπίας εξαιτίας της αλλαγής της σταθεράς επαναφοράς της ταλάντωσης. Η νέα θέση ισορροπίας θα βρεθεί από την συνθήκη ισορροπίας $(K_2+K_1) \cdot x_3 = (M_1+M_2) \cdot g$ άρα $x_3=0,1\text{m}$. Το x_3 ταυτίζεται με το νέο πλάτος της νέας ταλάντωσης

Η ενέργεια της τελικής ταλάντωσης θα είναι $E_{\text{ταλ}} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)A_{\text{ταλ}}^2 = 2\text{J}$.

iii) Παρατηρώ ότι μετά την πρώτη κρούση το σώμα θα εκτελέσει δύο διαφορετικές αλλά διαδοχικές γ.α.τ.

Η πρώτη είναι ταλάντωση με περίοδο:

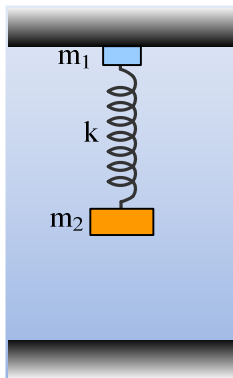
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{K_2}} = \frac{2\pi}{5\sqrt{2}} \text{ s} \text{ και στην συνέχεια με } T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{K_1 + K_2}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s}.$$

Η θέση της κρούσης ισοδυναμεί με το μισό του αρχικού πλάτους άρα θα χρειασθεί χρόνο $T_1/6$ μέχρι να φτάσει στην θέση μέγιστης αρχικής απομάκρυνσης. Στην συνέχεια θα χρειασθεί χρόνο $T_2/4$ μέχρι να φτάσει για πρώτη φορά στην τελική θέση ισορροπίας του από την ακραία του θέση. Άρα ο συνολικός ζητούμενος χρόνος θα είναι:

$$t_{\text{ολ}} = \frac{T_1}{6} + \frac{T_2}{4} = \left(\frac{2\pi}{30\sqrt{2}} + \frac{\pi}{20} \right) \text{ s}$$

Διπλή Ταλάντωση.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο σημειακά σώματα με μάζες $m_1=0,25\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$ που είναι δεμένα με ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $L_0=0,5\text{m}$.



Το πάτωμα και το ταβάνι έχουν την ιδιότητα όταν έρθουν σε επαφή με ένα από τα δύο σώματα να κολλάνε απευθείας με αυτό ενώ την ίδια στιγμή το άλλο σώμα να απελευθερώνεται. Την στιγμή $t=0$ σώμα μάζας m_2 αφήνεται ελεύθερο με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος και το σώμα μάζας m_1 να είναι κολλημένο στο ταβάνι. Μόλις το σώμα μάζας m_2 φτάσει στο πάτωμα κολλάει αυτόματα σε αυτό και την ίδια στιγμή ξεκολλάει το σώμα μάζας m_1 από το ταβάνι. Σε όλο το παραπάνω φαινόμενο και στη συνέχεια αυτού δεν θέλουμε να χάνεται καθόλου ενέργεια. Να βρεθούν:

- Η κατακόρυφη απόσταση του πατώματος από το ταβάνι.
- Ο χρόνος που θα χρειασθεί μέχρι να ξαναβρεθούν τα δύο σώματα στην αρχική τους θέση
- Η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων.

Δίνεται το $g=10\text{m/sec}^2$.

Απάντηση:

- Για να μην υπάρχουν απώλειες ενέργειας σε όλο το παραπάνω φαινόμενο το κάθε σώμα θα φτάνει στο πάτωμα ή στο ταβάνι έχοντας μηδενική ταχύτητα.

Το σώμα m_2 δεν έχει αρχικά ταχύτητα άρα θα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσής του. Η θέση ισορροπίας του απέχει από την αρχική θέση απόσταση που θα βρεθεί από την σχέση $m_2g=Kx_2$ άρα $x_2=0,1\text{m}$. Η απομάκρυνση αυτή ταυτίζεται και με το πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_2 . Έτσι το σώμα μάζας m_2 θα διανύσει απόσταση $S=2A_2$ μέχρι να σταματήσει άρα να ακουμπήσει στο πάτωμα. Άρα η κατακόρυφη απόσταση του δαπέδου από το ταβάνι θα είναι $D=L_0+2A_2=0,7\text{m}$.

- Ο χρόνος που θα χρειασθεί το πρώτο σώμα για να πάει στο πάτωμα θα είναι $T_2/2$ αμέσως μετά ξεκινάει η ταλάντωση του δεύτερου σώματος που για να επανέλθει στην αρχική του θέση θα χρειασθεί χρόνο T_1 ενώ ο χρόνος που θα κάνει το πρώτο σώμα να επανέλθει στην αρχική του θέση θα είναι πάλι $T_2/2$. Έτσι ο συνολικός μας χρόνος θα είναι

$$\Delta t = T_1 + T_2/2 = 0,3\pi \text{ sec}$$

- Την στιγμή που αποκολλάται το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του και απέχει από την θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου $2A_2=0,2\text{m}$.

Για την νέα θέση ισορροπίας αυτού του σώματος θα ισχύει

$$M_1g = Kx_1 \quad \text{άρα } x_1 = 0,025\text{m} \quad \text{άρα το } A_1 = 0,225\text{m}.$$

Ετσι η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα είναι όταν το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στην κατώτερη θέση της ταλάντωσής του και άρα τότε το ελατήριο θα είναι συσπειρωμένο κατά:

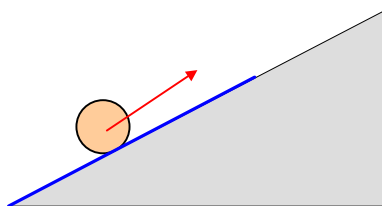
$$x_{\text{ολ}} = A_1 + x_1 = 0,25\text{m} \quad \text{άρα η } x_{\text{min}} = L_0 - x_{\text{ολ}} = 0,25\text{m}.$$

Η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων είναι η απόσταση του πατώματος από το νταβάνι

$$H_{\text{max}} = 0,7\text{m}.$$

Διατηρείται η ενέργεια για την κίνηση της σφαίρας;

Σφαίρα μάζας $M=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ ανέρχεται κυλιόμενη χωρίς να ολισθαίνει σε ένα παράξενο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ που στην αρχή του παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu=\sqrt{3}/3$ και στην συνέχεια είναι εντελώς λείο. Η σφαίρα την χρονική στιγμή $t=0$ έχει αρχική ταχύτητα $U_0=30\text{m/sec}$. Την στιγμή $t=7\text{sec}$ η σφαίρα μπαίνει στο λείο μέρος του κεκλιμένου επιπέδου.

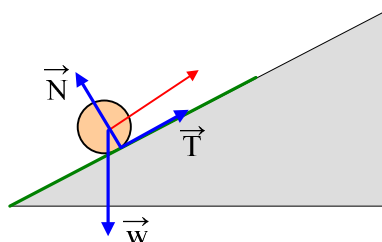


Να βρεθούν:

- A) Το μέγιστο ύψος του κέντρου μάζας της σφαίρας.
 - B) Την τελική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή που αυτή θα περάσει από την αρχική θέση της εκτόξευσής της.
 - Γ) Γιατί η τελική ταχύτητα δεν είναι πάλι 30m/sec ;
- Η ροπή αδράνειας της σφαίρας δίνεται από την σχέση $I_{cm}=0,4MR^2$.
 $g=10\text{m/sec}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για την κίνηση της σφαίρας πάνω στο τραχύ κεκλιμένο επίπεδο και για την άνοδο της σφαίρας από του νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε



$$\Sigma F = M \cdot a_{cm}$$

$$\text{άρα } Mg \sin \varphi - T \cos \varphi = M a_{cm} \quad (1)$$

$$\text{και } T_{\text{στ.}} R = 0,4MR^2 \cdot \alpha_{\text{γων}}$$

$$\text{άρα } T_{\text{στ.}} = 0,4Macm \quad (2) \quad \text{από την (1)}$$

$$Mg\eta\mu\phi - 0,4Macm = Macm \quad \text{άρα } acm = 25/7 \text{ m/sec}^2.$$

Η σφαίρα λοιπόν εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση και επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Μετά λοιπόν από 7sec θα έχει διανύσει διάστημα:

$$x_1 = U_0 \cdot t - 1/2 acm \cdot t^2 = 122,5 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι:

$$v = v_0 - acm \cdot t = 5 \text{ m/sec.}$$

Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας θα είναι $\omega = U/R = 50 \text{ r/sec.}$

Μόλις μπαίνει η σφαίρα στο λείο κεκλιμένο

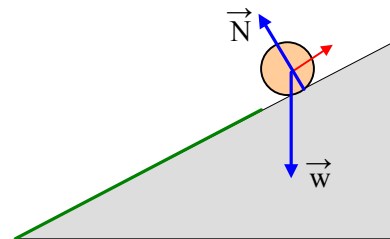
επίπεδο παύει να υπάρχει η τριβή. Έτσι η

σφαίρα στροφικά έχει σταθερή γωνιακή

ταχύτητα ω ενώ η U_{cm} μειώνεται λόγω της

συνιστώσας του βάρους. Η σφαίρα δηλαδή

εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορικά κίνηση ενώ εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με την ω που είχε της στιγμή που μπήκε στο λείο επίπεδο.



$$\Sigma F = M \cdot acm' \quad Mg\eta\mu\phi = Macm' \quad \text{άρα } acm' = 5 \text{ m/sec}^2.$$

Από τον νόμο της ταχύτητα για την επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε:

$$U = U_{\text{αρχ.}} - acm' t_2$$

άρα $t_2 = 1 \text{ sec}$ και από το νόμο του διαστήματος για την επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε:

$$x_2 = U_{\text{αρχ.}} \cdot t_2 - 1/2 acm' \cdot t_2^2 = 2,5 \text{ m.}$$

Άρα το συνολικό μήκος της διαδρομής της σφαίρας κατά την άνοδο θα είναι $x_{\text{ολ}} = 122,5 + 2,5 = 125 \text{ m}$ από $\eta\mu 30^\circ = H/x_{\text{ολ}}$ άρα

$$H = 62,5 \text{ m.}$$

B) Τώρα η σφαίρα θα αρχίσει να κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο και θα φτάσει στην αρχή του επιπέδου που έχει τριβές με αρχική μεταφορική ταχύτητα $U=5\text{m/sec}$ και $\omega=50\text{r/sec}$. Το χαμηλότερο όμως σημείο της σφαίρας που είναι σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο έχει συνολική ταχύτητα:

$$U_{\text{ολ}}=U_{\text{cm}}+U_{\text{περ}}=5+5=10\text{m/sec}.$$

Ετσι θα εμφανισθεί τριβή ολίσθησης αυτή τη φορά που θα έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο $T=\mu N \sin\varphi=5\text{N}$.

Από τον νόμο του Νεύτωνα $\Sigma F=M \cdot a_{\text{cm}}$ θα βρω $a_{\text{cm}}=0\text{m/sec}^2$.

Δηλαδή η σφαίρα αρχίζει να εκτελεί ομαλή μεταφορική κίνηση προς τα κάτω.

Για στροφική κίνηση:

$$T \cdot R=0,4MR^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \quad \text{άρα } \alpha_{\text{γων}}=125\text{rad/sec}^2.$$

Για να αρχίσει κανονική κύλιση θα πρέπει η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας να γίνει -50r/sec έτσι από την σχέση:

$$-50=50-\alpha_{\text{γων}} \cdot t_3 \quad \text{θα βρούμε } t_3=0,8\text{sec}.$$

Στον παραπάνω χρόνο η σφαίρα εκτελούσε ομαλή μεταφορική κίνηση προς τα κάτω διανύοντας διάστημα:

$$x_3=v \cdot t_3=4\text{m}.$$

Τώρα η σφαίρα αρχίζει να κυλίνεται άρα υπάρχει πλέον στατική τριβή και το σώμα επιταχύνει στροφικά και μεταφορικά σύμφωνα με του νόμους του Νεύτωνα:

$\Sigma F=M \cdot a_{\text{cm}}$ άρα $Mg \sin\varphi - T_{\text{στ}}=M a_{\text{cm}}$ (3) και $T_{\text{στ}} \cdot R=0,4MR^2 \cdot \alpha_{\text{γων}}$ άρα

$$T_{\text{στ}}=0,4M a_{\text{cm}} \quad (4) \quad \text{από την (3):}$$

$$Mg \sin\varphi - 0,4M a_{\text{cm}}=M a_{\text{cm}} \quad \text{άρα}$$

$$a_{\text{cm}}=25/7\text{m/sec}^2.$$

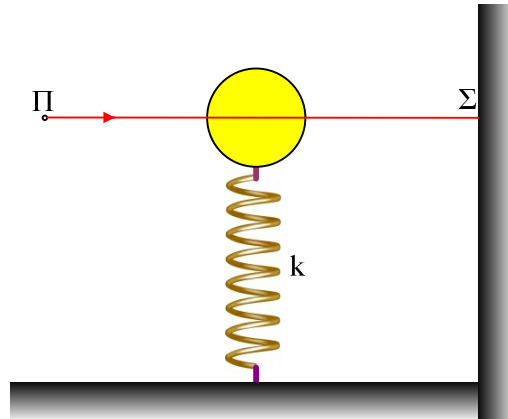
Το διάστημα που απομένει μέχρι να φτάσει στην αρχική θέση η σφαίρα είναι $122,5 - 4 = 118,5\text{m}$ Άρα από το νόμο του διαστήματος για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

$$118,5 = 5t_4^2 + 0,5 \cdot 25/7 t_4^2 \text{ θα βρούμε } t_4 \approx 6,86\text{sec} \text{ Άρα } v_{cm\text{τελ}} = v + a_{cm} \cdot t_4 \approx 29,5 \text{ m/sec.}$$

Γ) Η τελική ταχύτητα δεν είναι ίδια με την αρχική γιατί κατά την είσοδο της σφαίρας στο τραχύ μέρος του κεκλιμένου επιπέδου ασκήθηκε πάνω στην σφαίρα τριβή ολίσθησης άρα παράχθηκε θερμότητα. Η ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση μπορεί να το αποδείξει αυτό $K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + Q$ όπου $Q = \mu Mg \sin \varphi \cdot 4 = 20\text{J}$.

Διάθλαση του φωτός και ταλάντωση σφαίρας

Γυάλινη σφαίρα ακτίνας $R=0,3\text{m}$ και μάζας $m=2\text{kg}$ είναι δεμένη σε κατακόρυφο ελατήριο και ισορροπεί. Ο Γιάννης παίζει με ένα POINTER LASER στέλνοντας σε οριζόντια διεύθυνση και προς το κέντρο της γυάλινης σφαίρας μία ακτίνα φωτός που κατά τον κινέζο κατασκευαστή του POINTER LASER έχει μήκος κύματος στον αέρα 600nm .



Δίνουμε στην γυάλινη σφαίρα κατακόρυφη ταχύτητα V και η σφαίρα αρχίζει να εκτελεί α.α.τ. Η ακτίνα που παράγει το LASER διέρχεται περιοδικά εφαπτομενικά και οριακά από το κατώτερο και από το ανώτερο σημείο της σφαίρας. Η Νίκη βρίσκεται στον απέναντι τοίχο από τον Γιάννη και παρατηρεί ότι η ακτίνα εμφανίζεται στον τοίχο στο ίδιο ύψος με αυτό της πηγής κάθε $\Delta t = \pi/2 \text{ sec}$. Στη διάρκεια της ταλάντωσης της σφαίρας η μέγιστη χρονική καθυστέρηση που υφίσταται η ακτίνα εξαιτίας της διέλευσης μέσα από την γυάλινη σφαίρα είναι $\Delta t_{\text{max}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$. Να βρεθούν:

- i) Ο δείκτης διάθλασης της γυάλινης σφαίρας
- ii) Η σταθερά K του ελατηρίου και η αρχική ταχύτητα V
- iii) Από πόσα μήκη κύματος αποτελείται η διαδρομή μέσα στο γυαλί όταν η ακτίνα κινείται οριζόντια.

Δίνεται $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Η χρονική καθυστέρηση:

$$\Delta t = t_{\text{υλικού}} - t_{\text{κενού}} = d/V_{\text{υλικού}} - d/C = d \cdot n/C - d/C = d(n-1)/C. \quad (1)$$

Για να είναι μέγιστη η χρονική καθυστέρηση θα πρέπει η οριζόντια διαδρομή της ακτίνας μέσα στο γυαλί να είναι μέγιστη. Η μέγιστη διαδρομή που μπορεί να διανύσει το φως μέσα στο γυαλί είναι $d_{\max}=2R=0,6\text{m}$. Από την σχέση (1) θα πάρουμε $n=2$.

Β) Η ακτίνα εμφανίζεται στο ίδιο ύψος με την πηγή στην περίπτωση που δεν εκτρέπεται από την αρχική της πορεία. Αυτό συμβαίνει ή όταν η ακτίνα περνάει επαπτομενικά από το πάνω ή κάτω άκρο της σφαίρας ή όταν πέφτει κάθετα στην επιφάνεια της σφαίρας και περνά από το κέντρο της σφαίρας.

Άρα ο χρόνος $\Delta t=\pi/2\text{sec}$ θα αντιστοιχεί σε χρόνο $T/4$.

Έτσι $T=2\pi\text{ sec}$.

$$T=2\pi\sqrt{m/K} \quad \text{άρα } K=2N/m$$

Η ταχύτητα V είναι η μέγιστη της ταλάντωσης. Η ακτίνα μόλις και περνάει επαπτομενικά από το πάνω και κάτω μέρος της σφαίρας άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A=R=0,3\text{m}$.

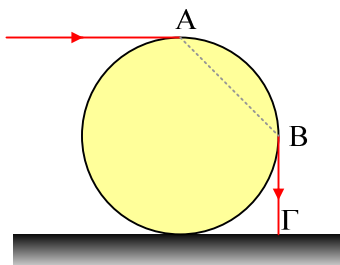
Έτσι $V=\omega\cdot A=0,3\text{m/sec}$.

Γ) Το μήκος κύματος μέσα στο γυαλί θα βρεθεί από $n=\lambda_0/\lambda$ άρα $\lambda=300\text{nm}$.

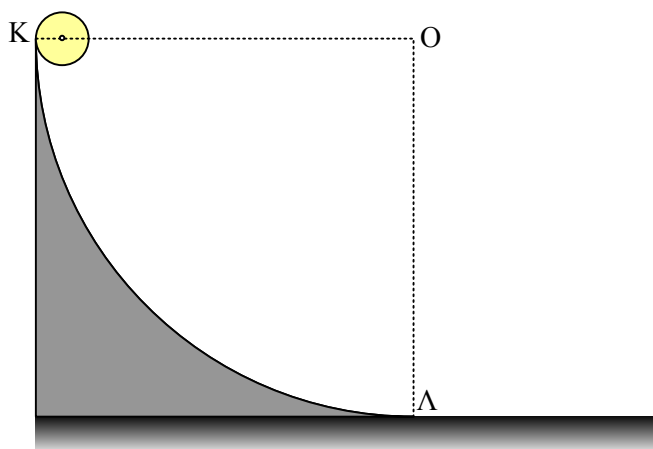
Για την διαδρομή $2R$ θα υπάρχουν $N=2R/\lambda=2\cdot 10^6$ μήκη κύματος

Διάθλαση σε μια σφαίρα, που θα κάνει και ... τούμπες.

Ομογενής γυάλινη σφαίρα έχει ακτίνα $R=0,2\text{m}$. Η σφαίρα ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Μονοχρωματική ακτινοβολία προσπίπτει εφαπτομενικά και οριζόντια στο ανώτερο σημείο Α της σφαίρας και εξέρχεται αφού διαθλαστεί εφαπτομενικά και κατακόρυφα από το σημείο Β όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στην συνέχεια η γυάλινη σφαίρα τοποθετείται στο ανώτερο σημείο κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ΚΛ ακτίνας $R_1= 1,95\text{m}$ με το σημείο Κ στο ανώτερο σημείο και το σημείο Λ στο κατώτερο σημείο του τεταρτοκύκλιου που βρίσκεται πάνω στο οριζόντιο έδαφος. Το κέντρο της σφαίρας και το σημείο Κ βρίσκονται πάνω σε ευθεία παράλληλη προς το έδαφος.



Η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη από το σημείο Κ και αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει μέσα στο τεταρτοκύκλιο.

- Α) Να βρείτε τον δείκτη διάθλασης της σφαίρας
 - Β) Να βρείτε τον συνολικό χρόνο που κάνει η ακτίνα για να φτάσει από το ανώτερο σημείο Α της σφαίρας στο έδαφος στο σημείο Γ.
 - Γ) Να βρεθεί ο αριθμός των περιστροφών μέχρι η σφαίρα να φτάσει από το σημείο Κ στο σημείο Λ του τεταρτοκύκλιου.
 - Δ) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας.
- Το $I_{\text{cm σφαίρας}}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Αν εφαρμόσουμε νόμο του Snell για την πρώτη διάθλαση θα έχουμε:

$$n_1 \eta \mu \theta_1 = n_2 \eta \mu \theta_2 \quad \text{θα πάρουμε } 1.1 = n_2 \eta \mu \theta_2 \quad (1).$$

Αν εφαρμόσουμε νόμο του Snell για την διάθλαση στο σημείο Β θα έχουμε
 $n_2 \eta \mu \theta_3 = n_1 \eta \mu 90^\circ$ θα πάρουμε $n_2 \eta \mu \theta_3 = 1$ (2) από την (1) και (2) θα βγει $\theta_2 = \theta_3$.
Επειδή σχηματίζεται και ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο $\theta_2 = \theta_3 = 45^\circ$.

Ετσι από την (1) θα πάρουμε $n_2 = \sqrt{2}$.

Β) Για να φτάσει η ακτίνα από το σημείο Α στο έδαφος διανύει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μέσα στο γυαλί με ταχύτητα C_γ και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ στον αέρα. Το ΒΓ θα προκύψει από το ΠΘ $AB = R\sqrt{2} = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$ και το $B\Gamma = R = 0,2 \text{ m}$
 $n = C_0 / C_\gamma$ άρα $C_\gamma = 3 \cdot 10^8 / \sqrt{2} \text{ m/sec}$ από τον νόμο του διαστήματος στην ομαλή κίνηση της ακτίνας μέσα στο γυαλί θα έχουμε $R\sqrt{2} = C_\gamma \cdot t_1$ άρα $t_1 = 4/3 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$.
Το ίδιο θα εφαρμόσουμε για την διαδρομή ΒΓ. $R = C_0 \cdot t_2$ άρα $t_2 = 2/3 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$.
Άρα ο συνολικός χρόνος θα είναι $t_{\text{ολ}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$.

Γ) Επειδή η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει μέσα στο τεταρτοκύκλιο για κάθε περιστροφή που εκτελεί διανύει διάστημα $2\pi R = 0,4\pi \text{ m}$.

Το συνολικό μήκος του τεταρτοκύκλιου είναι $2\pi R_1/4 = 0,975\pi \text{ m}$ άρα

$$N = 0,975\pi / 0,4\pi = 2,4375 \text{ περιστροφές.}$$

Δ) Την μέγιστη ταχύτητα θα την έχει η σφαίρα στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της δηλαδή στο σημείο Λ. Αν εφαρμόσουμε ΑΔΕ από το σημείο Κ στο σημείο Λ θα έχουμε

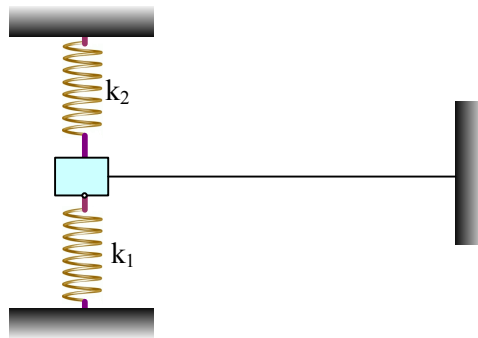
$$U_w = K_{\text{περ}} + K_{\text{μετ}} \quad \text{άρα}$$

$$Mg(R_1 - R) = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + \frac{1}{2} 0,4MR^2 \omega^2$$

θα πάρουμε $v = 5 \text{ m/sec}$.

Διάδοση δύο διαφορετικών παλμών.

Στο παρακάτω σχήμα το σώμα $m=1\text{kg}$ ισορροπεί ανάμεσα σε δύο κατακόρυφα ελατήρια με το $K_2=300\pi^2\text{ N/m}$ να έχει το φυσικό του μήκος και να μην είναι δεμένο με το σώμα m αλλά να είναι στερεωμένο στο πάνω μέρος του. Το ελατήριο με σταθερά $K_1=100\pi^2\text{ N/m}$ είναι στερεωμένο με το σώμα και με το έδαφος. Στο σώμα m υπάρχει ελαστική οριζόντια αβαρής χορδή με μεγάλο μήκος πάνω στην οποία μπορεί να διαδίδεται κύμα με ταχύτητα $V=10\text{m/sec}$. Δίνουμε στο σώμα ακαριαία την στιγμή $t=0$ αρχική ταχύτητα $v=\pi\text{ m/s}$ με φορά προς τα πάνω με αποτέλεσμα να εκτελεί ταλάντωση.



Να σχεδιασθεί η μορφή της ελαστικής χορδής την στιγμή $t=0,15\text{ sec}$.

Απάντηση:

Το σώμα m είναι η πηγή του κύματος-διαταραχής που θα δημιουργηθεί στην ελαστική χορδή. Το σώμα θα εκτελέσει περιοδική κίνηση η οποία θα αποτελείται από δύο μισές γ.α.τ. και οι οποίες έχουν κοινή θέση ισορροπίας αλλά διαφορετικές συχνότητες και διαφορετικά πλάτη. Η προς τα πάνω από την Θ.Ι.Τ. κίνηση είναι μισή γ.α.τ. με $D_1=K_1+K_2$ και η προς τα κάτω κίνηση επίσης μισή γ.α.τ. με $D_2=K_1$. Έτσι στην χορδή θα διαδίδονται εναλλάξ δύο παλμοί με διαφορετική συχνότητα και διαφορετικό πλάτος.

Έτσι $f_1=10\text{Hz}$ και $f_2=5\text{Hz}$.

Από την $v_{\max}=\omega_1 \cdot A_1$ θα πάρουμε $A_1=0,05\text{m}$ και $v_{\max}=\omega_2 \cdot A_2$ θα πάρουμε $A_2=0,1\text{m}$.

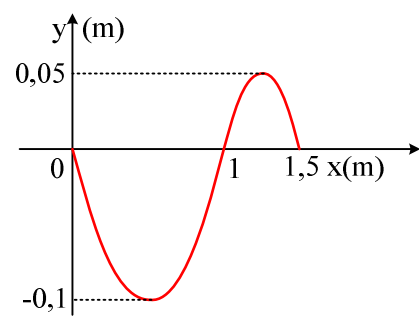
Η περίοδος της περιοδικής κίνησης θα είναι $T=T_1/2 + T_2/2 = 0,15\text{sec}$.

Η μορφή λοιπόν της ελαστικής χορδής θα είναι ουσιαστικά για μία περίοδο της περιοδικής κίνησης του m .

Η διαταραχή λοιπόν θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x=V \cdot t=1,5\text{m}$.

$V=\lambda_1 \cdot f_1$ άρα $\lambda_1=1\text{m}$ και $V=\lambda_2 \cdot f_2$ άρα $\lambda_2=2\text{m}$

Η μορφή λοιπόν της ελαστικής χορδής θα είναι



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ
ΛΥΚΕΙΟΥ 2011-2012

ΘΕΜΑ Α

Στις ερωτήσεις 1-4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί η σωστή απάντηση

1. Ένας δίσκος ,μία σφαίρα και ένα δακτυλίδι αφήνονται από το ψηλότερο σημείο λείου κεκλιμένου επιπέδου. Ποιο στερεό σώμα θα εκτελέσει περισσότερες περιστροφές μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου

α.Ο δίσκος

β.Η σφαίρα

γ.Το δακτυλίδι

δ.Δεν θα εκτελέσει καμία περιστροφή κανένα στερεό σώμα

(Μονάδες 5)

2. Ο νόμος του Snell

α.Δεν ισχύει στις οπτικές ίνες

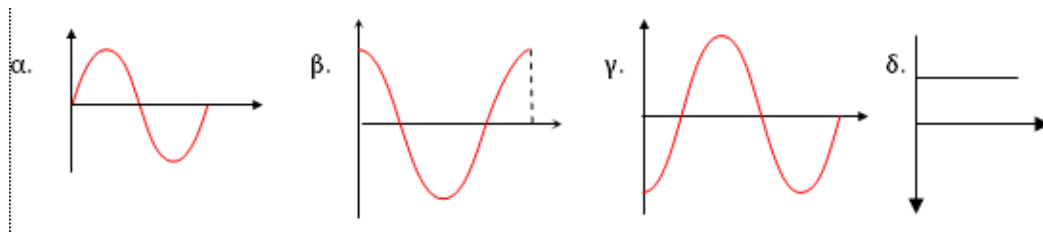
β.Είναι νόμος που έχει αποδείξει το πείραμα

γ.Ισχύει μόνο για τα Η/Μ κύματα

δ. Εξηγεί γιατί μία ακτίνα όταν κτυπάει υπο γωνία στην διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων προερχόμενη από το πυκνό στο αραιό υλικό η ακτίνα πλησιάζει προς την κάθετη

(Μονάδες 5)

3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, του οποίου η ταχύτητα μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $U=10\pi\sin 10t$ (S.I).Η γραφικά παράσταση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο μπορεί να είναι



(Μονάδες 5)

4. Παρατηρητής πλησιάζει προς ακίνητη πηγή που εκπέμπει ήχο για χρόνο Δt_s . Αν παρατηρητής ακούει τον ήχο για χρόνο Δt_a για τους δύο αυτούς χρόνους θα ισχύει:

α. $\Delta t_s > \Delta t_a$

β. $\Delta t_s < \Delta t_a$

γ. $\Delta t_s = \Delta t_a$

δ. Δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε

(Μονάδες 5)

5. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες

α. Το φαινόμενο στο οποίο κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση το σύστημα απορροφά ενέργεια κατά το βέλτιστο τρόπο ονομάζεται συντονισμός

β. Στις φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις ο κύριος λόγος απώλειας της ενέργειας είναι η ωμική αντίσταση του κυκλώματος

γ. Στα στάσιμα κύματα όλα τα σημεία του κύματος σταματούν ταυτόχρονα

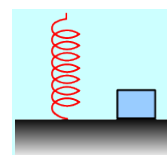
δ. Στις ελαστικές κρούσεις τα σώματα που συγκρούονται ανταλλάσσουν ταχύτητες όταν έχουν ίδιες μάζες

ε. Ένα στερεό μπορεί να έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής αλλά να μην έχει στροφορμή.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K και φυσικού μήκους L_0 στερεωμένο στο έδαφος και ένα σώμα μάζας M που βρίσκεται στο έδαφος. Πόση η ελάχιστη ενέργεια πρέπει να δαπανήσει ένας άνθρωπος για να αναγκάσει το



σώμα να ταλαντώνεται σε κατακόρυφη ταλάντωση με την βοήθεια του παραπάνω ελατηρίου με πλάτος ταλάντωσης A.

1. $\frac{1}{2} KA^2$ 2. $\frac{1}{2} K(A+Mg/K)^2$ 3. $\frac{1}{2} K(A+Mg/K)^2 + Mg(L_0 - A - Mg/K)$

(Μονάδες 3)

Να δικαιολογήσετε την απαντήσή σας.

(Μονάδες 6)

2. Οι ηγέτες της Ευρώπης μη έχοντας άλλη λύση για το πρόβλημα της κρίσης αποφασίζουν ότι πρέπει να αυξηθεί η διάρκεια της μέρας για να δουλεύουν περισσότερο οι εργαζόμενοι. Για να το πετύχουν αυτό θα πρέπει:

A. Να μεταφερθούν όλοι οι Έλληνες στην Γερμανία

B. Να μεταφερθούν όλοι οι Γερμανοί στην Ελλάδα

Γ. Να διώξουν κόσμο στο Φεγγάρι

Ποια από τις παραπάνω πρόταση πρέπει να εφαρμοσθεί;

(Μονάδες 2)

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

(Μονάδες 6)

3. Μία ελαστική τρίχα μήκους L στερεώνεται στα δύο άκρα της. Με κατάλληλο τρόπο δημιουργούμε πάνω στην ελαστική τρίχα στάσιμο κύμα. Αν U η ταχύτητα διάδοσης του κύματος πάνω στην τρίχα και f η συχνότητα ταλάντωσης όλων των σημείων που ταλαντώνονται πάνω στην τρίχα πόσες το πολύ ψείρες μπορούν να κοιμούνται ήσυχες πάνω στην τρίχα

A. $2Lf/U$ B. $2Lf/U + 1$ Γ. Lf/U

(Μονάδες 3)

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Σώμα μάζας $M=4\text{Kg}$ είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά $K=100\pi^2\text{N/m}$ και ισορροπεί σε ύψος $H=3,2\text{m}$ το έδαφος. Στο σώμα είναι δεμένος ένας οριζόντιος αβαρής ιστός αράχνης με μεγάλο μήκος. Δύο αράχνες βρίσκονται σε αποστάσεις $0,3\text{m}$ και $0,5\text{m}$ αντίστοιχα από το σώμα κολλημένες στον ιστό. Η

ταχύτητα διάδοσης του κύματος στον ιστό είναι $V=1\text{m/sec}$. Ένα δεύτερο σώμα μάζας $M=4\text{Kg}$ κινείται κατακόρυφα και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο έχοντας ταχύτητα μέτρου $0,5\text{ m/sec}$. Την στιγμή που το δεύτερο σώμα φτάνει στο έδαφος :

α) Να σχεδιαστεί η μορφή του ιστού της αράχνης.

(Μονάδες 8)

β) Πόσο απέχουν τα ζώφια.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα σημεία του ιστού έχουν ταχύτητα μέτρου $u_{\max}/2$ όπου $u_{\max}$ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης τους.

(Μονάδες 6)

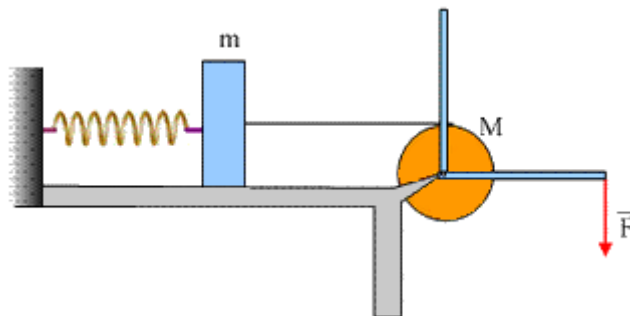
δ) Ποιος ο λόγος των μέτρων των δυνάμεων επαναφοράς που δέχονται τα ζώφια.

Δίνεται το $g=10\text{m/sec}^2$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα το σώμα έχει μάζα $m=1/\pi \text{ kg}$ ο κύλινδρος που έχει μάζα $M_1=2\text{kg}$ και ακτίνα $R_1=1\text{m}$ είναι στερεωμένος με κατάλληλο υποστήριγμα έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα. Πάνω στον κύλινδρο είναι κολλημένη ράβδος μήκους $L=2\text{m}$ και μάζας $M_2=3\text{Kg}$ με το ένα της άκρο να βρίσκεται στο κέντρο του κυλίνδρου.



Η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα. Το ελατήριο έχει σταθερά $K=100/\pi \text{ N/m}$ και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος με το νήμα να είναι τεντωμένο και δεμένο στο ανώτερο σημείο του κυλίνδρου. Με την βοήθεια κατάλληλης δύναμης αρχίζουμε να περιστρέφουμε το σύστημα επιμηκύνοντας το ελατήριο με το νήμα να τυλίγεται στον κύλινδρο μέχρι η ράβδος να περιστραφεί κατά 90° .

Να βρεθούν:

A) Το μέτρο της δύναμης που πρέπει ασκούμε κάθετα στην ράβδο αν το σύστημα ισορροπεί μετά από την διαγραφή των 90° .

(Μονάδες 7)

Όταν το σύστημα έχει διαγράψει γωνία 90° και το σύστημα ισορροπεί το νήμα κόβεται και η εξωτερική δύναμη καταργείται.

Β) Πόση μέγιστη ταχύτητα θα αποκτήσει το σώμα m και πόση μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου;

(Μονάδες 8)

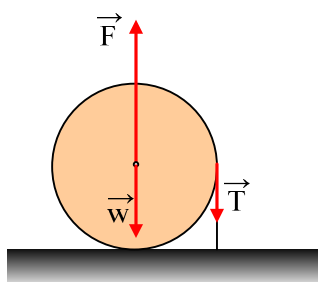
Γ) Ποιο από τα δύο συστήματα θα αποκτήσει πρώτο την μέγιστη κινητική ενέργεια.

(Μονάδες 10)

Δίνονται για τον κύλινδρο $I = 0,5M_1 \cdot R_1^2$ για την ράβδο $I = 1/3M_2 \cdot L^2$ και $\pi = 3,14$

Ένα γιο-γιο και μεταβλητή δύναμη

Γύρω από ομογενή κύλινδρο μάζας $M=10\text{Kg}$ έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα μεγάλου μήκους. Ο κύλινδρος ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το ένα άκρο του νήματος δεμένο στο έδαφος και το νήμα κατακόρυφο. Ασκούμε στο κέντρο του νήματος κατακόρυφη μεταβλητή δύναμη της μορφής $F=150-10h$ (S.I.) όπου h η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.



Το αποτέλεσμα της παραπάνω δύναμης είναι ο κύλινδρος να αρχίζει να ανέρχεται κατακόρυφα και το νήμα να ξετυλίγεται.

Να βρεθούν:

- α) Η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου
- β) Η μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

Για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Από τους νόμους την κίνησης για την μεταφορική και στροφική κίνηση θα έχουμε

$$F-M.g-T=M.a \quad (1)$$

$$T.R=0,5.M.R^2.\alpha_{γων}$$

$$\text{άρα } T=0,5.M.a \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$a = (50 - 10h)/15 \quad (3) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{και}$$

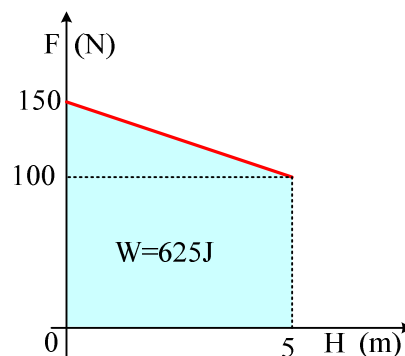
$$T = (50 - 10h)/3 \quad (4) \quad (\text{S.I.})$$

Από την σχέση (3) βλέπουμε ότι το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορικά κίνηση με επιτάχυνση που συνεχώς μειώνεται. Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα όταν $a = 0 \text{ m/sec}^2$. Αυτό θα συμβεί όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ανέλθει κατά $h = 5 \text{ m}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση μέχρι $\Delta h = 5 \text{ m}$

$$WF = K_{\text{μετ}} + K_{\text{στρ}} + UW \quad (5)$$

το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί με την βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης



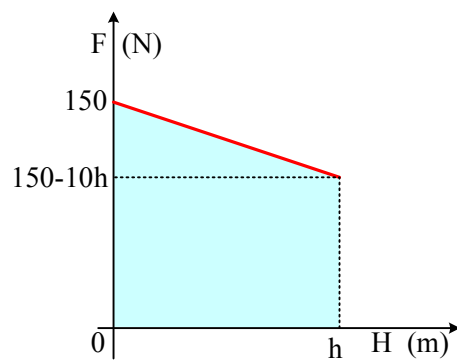
Από την (5) μετά από πράξεις θα βρούμε $U_{\text{max}} = 10/\sqrt{6} \text{ m/sec}$.

Β) Από την σχέση (4) παρατηρούμε ότι το νήμα χαλαρώνει ($T = 0 \text{ N}$) όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ανέλθει κατά $h = 5 \text{ m}$. Έτσι μετά τα 5 m ο κύλινδρος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση μιας και δεν θα υπάρχει καμία δύναμη που να προκαλεί ροπή.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$WF = K_{\text{στρ}} + UW \quad (6)$$

το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί με την βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης



$$W_F = 150h - 5h^2 \quad (\text{S.I.})$$

και με αντικατάσταση στην σχέση (6)

$$150h - 5h^2 = 125/3 + 100h$$

$$\text{άρα } h^2 - 10h + 25/3 = 0 \quad \text{άρα}$$

$$h \approx 9,08\text{m}$$

Μια άσκηση μεταβλητής δύναμης σε κύλινδρο

Πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή στατικής τριβής $\mu_s=0,5$ ισορροπεί κύλινδρος μάζας $M=4\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ στην θέση $x=0$. Στο κέντρο του κυλίνδρου αρχίζει να εφαρμόζεται μεταβλητή οριζόντια δύναμη $F=20+\theta$ (S.I) όπου θ η γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου. Αρχικά ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Μέχρι τη στιγμή που ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει να βρεθούν:

- A) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου
 - B) Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου σε συνάρτηση με την μετατόπιση του κέντρου μάζας.
 - Γ) Ποιος ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη στιγμή που είναι έτοιμος να ολισθήσει;
- Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει όταν:

$$T_{στ}=\mu_s \cdot N=\mu_s \cdot M \cdot g=0,5 \cdot 4 \cdot 10=20\text{N}$$

Η γωνία θ συνδέεται με την μετατόπιση του κέντρου μάζας με τη σχέση $x=R \cdot \theta$ άρα η δύναμη θα έχει μορφή:

$$F=20+10x \text{ (S.I.)}$$

Από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα πάρουμε

$$F-T_{στ}=M \cdot a_{cm} \quad (1) \quad \text{και} \quad T_{στ} \cdot R=0,5M \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων}=0,5M a_{cm} \quad (2)$$

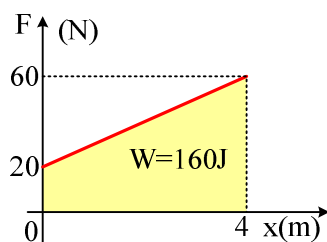
Αν διαιρέσουμε την (1) με την (2) θα έχουμε

$$(F-T_{στ})/T_{στ}=2 \quad \text{άρα} \quad F=3T_{στ} \quad \text{άρα} \quad T_{στ}=(20+10x)/3 \text{ (S.I.)}$$

Από την συνθήκη κύλισης θα πρέπει $T_{στ} \leq \mu_s \cdot N$ άρα $(20+10x)/3 \leq 20$ άρα $x \leq 4\text{m}$ ο κύλινδρος λοιπόν θα κυλίεται μέχρι την θέση $x=4\text{m}$ και σε εκείνη τη θέση ετοιμάζεται να ολισθήσει.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετακίνηση του κυλίνδρου για 4m θα έχουμε

$WF = K_{\text{περ}} + K_{\text{μετ}}$ το έργο της δύναμης θα βρεθεί από την παρακάτω γραφική παράσταση



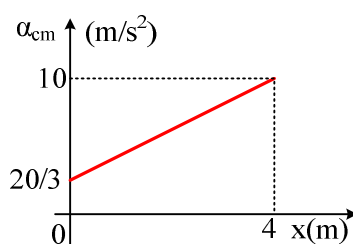
$$\text{Άρα } 160 = \frac{1}{2} M U_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \text{ άρα } U_{\text{cm}} = 4\sqrt{10/3} \text{ m/sec.}$$

Β) Από την σχέση (1) με αντικατάσταση του $T\sigma\tau$ θα έχουμε:

$$2T\sigma\tau = M a_{\text{cm}} \text{ άρα}$$

$$2(20 + 10x)/3 = 4a_{\text{cm}} \text{ άρα } a_{\text{cm}} = (20 + 10x)/6 \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση θα είναι



Γ) Ο ολικός ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα δίνεται από την σχέση:

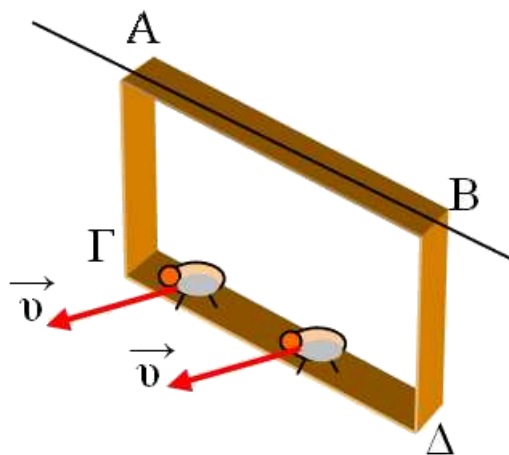
$$\Delta K / \Delta t = \Sigma F U_{\text{cm}} + \Sigma \tau \cdot \omega = M a_{\text{cm}} \cdot U_{\text{cm}} + T\sigma\tau \cdot R\omega = (M a_{\text{cm}} + T\sigma\tau) U_{\text{cm}}$$

και για $x=4\text{m}$ θα πάρουμε:

$$\Delta K / \Delta t = 240\sqrt{10/3} \text{ J/sec}$$

Αρχή διατήρησης της στροφορμής σε ένα τετράγωνο

Δύο πουλιά με ίδια μάζα $m = 0,05\text{ kg}$ το καθένα που μπορούμε να τα θεωρήσουμε σημειακά κάθονται στις δύο άκρες μιας ράβδου $\Gamma\Delta$. Η ράβδος $\Gamma\Delta$ αποτελεί την κατώτερη οριζόντια πλευρά κατακόρυφου τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ που μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα xx' ο οποίος ταυτίζεται με την πλευρά AB . Η κάθε ράβδος του τετραγώνου έχει μάζα $M = 0,3\text{ Kg}$ και μήκος $L = 0,1\text{ m}$. Ένας ξαφνικός θόρυβος τρομάζει τα πουλιά που φεύγουν ταυτόχρονα από τη ράβδο $\Gamma\Delta$ με οριζόντια ταχύτητα v και κάθετα προς την ράβδο $\Gamma\Delta$.



- A) Να βρεθεί η οριζόντια ταχύτητα v του κάθε πουλιού αν είναι γνωστό ότι το τετράγωνο μόλις και εκτελεί ανακύκλωση γύρω από τον άξονα περιστροφής του.
- B) Να βρεθεί το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τετραγώνου.
- Γ) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος όταν ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι μέγιστος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας της ότι είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η ράβδος AB βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής xx' άρα δεν παρουσιάζει ροπή αδράνειας. Οι κατακόρυφες ράβδοι $A\Delta$ και $B\Gamma$ περιστρέφονται γύρω από τα άκρα τους A και B έτσι θα παρουσιάσουν ροπή αδράνειας που θα βρεθεί με την βοήθεια του κανόνα του Στάινερ:

$$I_{A\Delta} = I_{B\Gamma} = I_{cm} + M(L/2)^2 = 1/3 ML^2 = 0,001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Όλα τα σημεία της ράβδου ΓΔ ισαπέχουν από τον άξονα χχ' και με την βοήθεια του ορισμού της ροπής αδράνειας θα βρούμε

$$I_{\Gamma\Delta} = \Delta m_1 \cdot R_1^2 + \Delta m_2 R_2^2 + \dots + \Delta m_n R_n^2 = ML^2 = 0,003 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

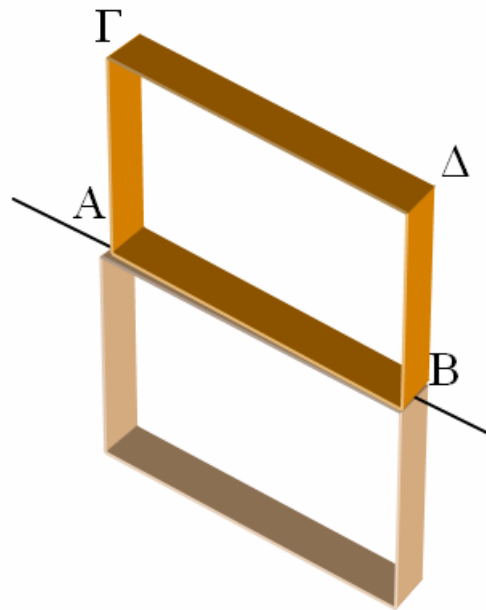
$$\text{Άρα το } I_{\text{ολxx}}' = 0,005 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα πουλιά-πλαίσιο.

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$$

$$\text{άρα } 0 = 2mv \cdot L - I_{\text{ολxx}}' \cdot \omega_{\text{αρχ}} \quad (1)$$

Το τετράγωνο μόλις και κάνει ανακύκλωση. Αυτό σημαίνει ότι μόλις η ράβδος ΓΔ φτάνει στο ανώτερο σημείο της έχοντας μηδενική γωνιακή ταχύτητα.



Αν εφαρμόσουμε ΑΔΕ για το ανέβασμα του τετραγώνου θεωρώντας το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το αρχικό επίπεδο όπου βρισκόταν η ράβδος ΓΔ.

$$K_{\text{αρχ}} + U_{A\Delta} + U_{B\Gamma} + U_{AB} = U_{A\Delta}' + U_{B\Gamma}' + U_{AB} + U_{\Gamma\Delta}$$

$$1/2 I_{\text{ολxx}}' \cdot \omega_{\text{αρχ}}^2 + MgL/2 + MgL/2 + MgL = Mg3L/2 + Mg3L/2 + MgL + Mg2L$$

$$\text{Άρα } \omega_{\text{αρχ}} = \sqrt{480} \text{ r/sec.}$$

Από την (1) θα πάρουμε:

$$v=2\sqrt{30}\text{m/sec.}$$

Β)Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής συμβαίνει όταν τα αποστήματα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο πλαίσιο γίνουν μέγιστα. Αυτό συμβαίνει όταν όλο το ΑΒΓΔ βρίσκεται σε οριζόντια θέση δηλαδή όταν έχει στραφεί το τετράγωνο κατά γωνία 90° σε σχέση με την αρχική του θέση. Αρα

$$|\Delta L/\Delta t|_{\max}=M_{\text{ΑΔ}}g.L/2 + M_{\text{ΒΓ}}g.L/2 + M_{\text{ΔΓ}}.g.L= 0,6\text{N.m.}$$

Γ)Για να βρω την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στην παραπάνω θέση θα ξαναπάρω ΑΔΕ

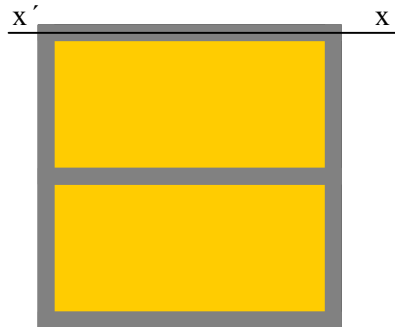
$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{ΑΔ}} + U_{\text{ΒΓ}} + U_{\text{ΑΒ}} = U_{\text{ΑΔ}}' + U_{\text{ΒΓ}}' + U_{\text{ΑΒ}} + U_{\text{ΓΔ}} + K_{\text{τελ}}$$

$$\frac{1}{2} I_{\text{ολxx}} \omega_{\text{αρχ}}^2 + MgL/2 + MgL/2 + MgL = MgL + MgL + MgL + MgL + \frac{1}{2} I_{\text{ολxx}} \omega_{\text{τελ}}^2$$

Μετά τις πράξεις το $\omega_{\text{τελ}}=4\sqrt{15}\text{ r/sec.}$

Αρχή διατήρησης στροφορμής και ανακύκλωση παραθύρου

Ένα ξύλινο παράθυρο αποτελείται από τέσσερις ράβδους μάζας $M=3\text{Kg}$ η κάθε μία και σχηματίζοντας ένα τετράγωνο πλευράς $L=1\text{m}$. Μία πέμπτη όμοια οριζόντια ράβδος χωρίζει το τετράγωνο στην μέση. Το ξύλινο αυτό παράθυρο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα xx' που διέρχεται από την πάνω οριζόντια ράβδο.



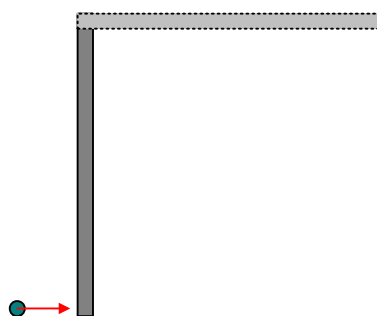
Ενας φυσικός συλλέκτης όπλων προσπαθεί να δοκιμάσει το καινούργιο του όπλο πυροβολώντας κατά «ρυπάζ» και οριζόντια εναντίον της κατώτερης οριζόντιας ράβδου. Παρατηρεί ότι όταν πυροβολεί 5 σφαίρες που σφηνώνονται στην κάτω οριζόντια ράβδο το παράθυρο μόλις και φτάνει σε γωνία 90° σε σχέση με την αρχική του θέση κατακόρυφη θέση. Πόσες τουλάχιστον σφαίρες πρέπει να ρίξει για να μπορέσει το παράθυρο να κάνει ανακύκλωση γύρω από το άξονα xx' . Να θεωρηθεί ότι η σφαίρες κινούνται οριζόντια και σφηνώνονται ταυτόχρονα στην ράβδο και ότι η κάθε σφαίρα έχει μάζα $m=0,05\text{kg}$. Δίνεται για τη κάθε ράβδο που περιστρέφεται γύρω από το ένα της άκρο η ροπή αδράνειας της είναι $I_a=1/3ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το παράθυρο έχει συνολικά πέντε ράβδους από τις οποίες οι δύο κατακόρυφες έχουν ροπή αδράνειας $I_a=1/3 \cdot ML^2=1\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Η μία είναι πάνω στον άξονα xx' άρα δεν παρουσιάζει ροπή αδράνειας ενώ οι άλλες δύο οριζόντιες έχουν ροπές αδράνειας που θα βρεθούν με την βοήθεια του ορισμού της ροπής αδράνειας $I_2=M \cdot L^2=3\text{kg}\cdot\text{m}^2$ και $I_3=M(L/2)^2=0,75\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Ετσι συνολικά το παράθυρο έχει $I_{ολ}=5,75\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Κατά την ταυτόχρονη κρούση των 5 σφαιρών θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα σφαιρών και παράθυρου.



$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$$

$$\text{άρα } 5m \cdot v \cdot L = I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\text{συσ}} \quad (1)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του παράθυρου θα πάρουμε:

$$K_{\text{συσ}} = U_{\text{συσ}}$$

$$\frac{1}{2} I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\text{συσ}}^2 = 5mgL + MgL/2 + MgL/2 + MgL/2 + MgL$$

και θα προκύψει $\omega_{\text{συσ}} = \sqrt{77,5/3} \text{ rad/sec}$ και με αντικατάσταση στην σχέση (1) θα βρεθεί η ταχύτητα του κάθε βλήματος $U = \sqrt{14496} \approx 120,4 \text{ m/sec}$.

Για να κάνει ανακύκλωση τώρα το παράθυρο με τα βλήματα μαζί θα πρέπει το σύστημα να φτάσει στην ανώτερη του θέση έχοντας ουσιαστικά μηδενική γωνιακή ταχύτητα.

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε και πάλι ΑΔΣ:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$$

$$\text{άρα } Nm \cdot v \cdot L = I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\text{συσ}} \quad (2)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του παράθυρου θα πάρουμε:

$$K_{\text{συσ}} = U_{\text{συσ}} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} I_{\text{ολ}} \cdot \omega_{\text{συσ}}^2 = Nmg2L + MgL + MgL + MgL + Mg2L \quad (3)$$

με αντικατάσταση της σχέσης (2) στην (3) θα καταλήξουμε στην δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$18,07N^2 - 13,25N - 862,5 = 0$$

η οποία έχει λύση την $N \approx 7,3$ βλήματα.

Αρα για να κάνει οπωσδήποτε ανακύκλωση το παράθυρο θα χρειαζόταν 8 τουλάχιστον βλήματα.



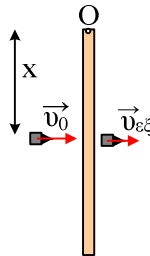
Ανοίγοντας μια οπή σε ξύλινη ράβδο

Ξύλινη ομογενής ράβδος μάζας $M=1,2\text{Kg}$ και μήκους $l=2\text{m}$ ισορροπεί κατακόρυφη με την βοήθεια οριζόντιου καρφιού που υπάρχει στο ανώτερο άκρο της ράβδου. Για να ανοίξουμε μία μικρή σημειακή οπή και να αφαιρέσουμε όλη τη μάζα του ξύλου που περιέχει η οπή χρειάζεται να δαπανήσουμε ελάχιστη ενέργεια $E_{\min}=30/7\text{ J}$. Η μάζα του ξύλου που θα αφαιρεθεί για να ανοίξει η οπή είναι $\Delta m=0,2\text{Kg}$. Ειδικό βλήμα μάζας $m=0,8\text{Kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα U_0 μόλις και διαπερνά την ξύλινη ράβδο συμπαρασέρνοντας και όλη τη μάζα που βρίσκεται μπροστά του. Η δημιουργία της οπής δεν αλλάζει θέση στο κέντρο μάζας της ράβδου ενώ η μάζα του βλήματος μετά την διέλευσή του μέσα από την ξύλινη ράβδο γίνεται $m'=1\text{Kg}$. Αν η ράβδος που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το οριζόντιο καρφί μόλις και καταφέρνει να φτάσει σε οριζόντια θέση να βρεθούν:

- A) Η απόσταση του βλήματος από τον άξονα περιστροφής την στιγμή της κρούσης.
- B) Η ροπή αδράνειας της ξύλινης ράβδου μετά την κρούση με το βλήμα αν η οπή θεωρηθεί σημειακή.
- Γ) Η αρχική ταχύτητα του ειδικού βλήματος πριν την κρούση με την ξύλινη ράβδο.
- Δ) Την θερμότητα που θα παραχθεί κατά την παραπάνω κρούση.

Δίνεται για την ράβδο $I_0=1/3 \cdot M \cdot L^2$.

Απάντηση:



A) Για να μην αλλάξει θέση το κέντρο μάζας της ξύλινης ράβδου η μάζα που αφαιρέθηκε αφαιρέθηκε από το κέντρο μάζας της. Άρα το $x=L/2=1\text{m}$.

B) Η ροπή αδράνειας της ράβδου θα δοθεί από την σχέση $I=1/3 \cdot M \cdot L^2 - \Delta m \cdot x^2$ (1) αν φυσικά υποθέσουμε ότι όλη η μάζα που αφαιρέσαμε ήταν συγκεντρωμένη σε ένα υλικό σημείο στο κέντρο της ράβδου. Από την σχέση (1) μετά από πράξεις θα βρούμε $I=1,4\text{Kg} \cdot \text{m}^2$.

Γ) Με τη βοήθεια της ΑΔΣ για το σύστημα βλήματος-ράβδου θα έχουμε

$$m \cdot U_0 \cdot x = I \cdot \omega + (\Delta m + m) U_{ex} \cdot x \quad (2)$$

Το βλήμα μόλις και καταφέρνει να εξέλθει από την ξύλινη ράβδο. Δηλαδή η ταχύτητα του βλήματος κατά την έξοδο του από την ράβδο είναι ίση με γραμμική ταχύτητα του σημείου της ράβδου όπου έγινε η οπή από το βλήμα. Έτσι θα ισχύει η σχέση $U_{ex} = \omega \cdot x$ (3)

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο της ράβδου μέχρι την οριζόντια θέση θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = (M - \Delta m) \cdot g \cdot L/2 \quad \text{άρα } \omega = 10/\sqrt{7} \text{ r/s}$$

Από την σχέση (3) $U_{\text{εξ}} = 10/\sqrt{7} \text{ r/s}$ και από την σχέση (2) $U_0 = 30/\sqrt{7} \text{ m/s}$

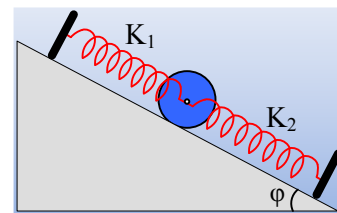
Δ) Με την βοήθεια της ΑΔΕ πριν και μετά την κρούση θα πάρουμε

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + K_{\text{ραβ}} + E_{\text{min}} + Q$$

μετά από πράξεις θα βρούμε $Q = 30 \text{ J}$

Άλλη μια παραλλαγή με κρούση.

Στο παρακάτω σχήμα ο ομογενής δίσκος έχει μάζα $M_1=2\text{ Kg}$, ακτίνας R και είναι δεμένος στο κέντρο του με δύο ελατήρια που έχουν σταθερές $K_1=200\text{N/m}$ και $K_2=100\text{N/m}$ και δεν εμποδίζουν την περιστροφή του δίσκου γύρω από το κέντρο μάζας του.



Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\varphi=30^\circ$ και την χρονική στιγμή $t=0$ ο

δίσκος αφήνεται ελεύθερος ενώ εκείνη τη στιγμή τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του.

Α) Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας του δίσκου θα εκτελέσει γ.α.τ.

Β) Να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου αν υποτεθεί ότι θετική φορά είναι η αρχική φορά της αρχικής επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου.

Γ) Να βρεθεί ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής έτσι ώστε ο δίσκος να συνεχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει

Κάποια στιγμή ένα σημειακό βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται παράλληλα με το κεκλιμένο επίπεδο και σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο μάζας του δίσκου ενώ η ταχύτητα του κέντρου μάζας η ταχύτητα του βλήματος έχουν αντίθετη φορά.

Δ) Σε ποια θέση πρέπει να γίνει η στιγμιαία κρούση των δύο σωμάτων αν θέλουμε το σύστημα να εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση;

Ε) Ποια το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος;

Δίνεται για το δίσκο $I_{cm} = \frac{1}{2}M_1R^2$

Απάντηση:

Α) Για την αρχική θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας του δίσκου θα ισχύει $M_1g\sin\varphi = (K_1+K_2)x_1$ θα βρούμε $x_1=1/30\text{ m}$.

Για μία τυχαία απομάκρυνση και με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε:

$$M_1g\sin\varphi - K_1(x_1-x) - K_2(x_1-x) - T\sigma\tau = M_1a_{cm} \quad (1)$$

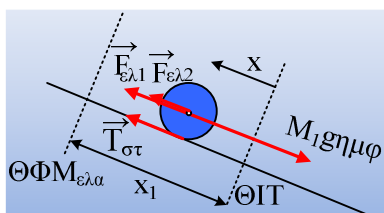
$$T\sigma\tau.R = 0,5M_1R^2\alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad T\sigma\tau = M_1a_{cm}/2 \quad (2)$$

$$\text{Και με τη βοήθεια των (1) και (2) } T\sigma\tau = (K_1+K_2)x/3 \quad (3)$$

Για την ταλάντωση και θεωρώντας θετική φορά την φορά της απομάκρυνσης θα έχουμε

$\Sigma F = T\sigma\tau + K_1(x_1-x) + K_2(x_1-x) - M_1g\sin\varphi$ και με την βοήθεια της σχέσης (3) θα καταλήξουμε ότι:

$\Sigma F = -2(K_1+K_2)x/3 = -200x$ (SI) άρα το κέντρο μάζας εκτελεί γ.α.τ. με $D=200\text{N/m}$



Β)Την χρονική στιγμή $t=0$ ο δίσκος είναι ακίνητος και βρίσκεται στην μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

Αρα η εξίσωση της απομάκρυνσης του κέντρου μάζας θα δίνεται από την σχέση $x_{cm}=A\eta\mu(\omega t+\phi_0)$ με

$$A=x_1=1/30 \text{ m} \quad \text{και} \quad \omega=\sqrt{\frac{D}{M_1}}=10\text{r/s} \quad \text{άρα η τελική εξίσωση}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{30} \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Γ)Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο δίσκος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης

$$T_{στ}<T_{ολ} \quad \text{και με την βοήθεια της σχέσης (3)} \quad T_{στ(max)}=(K_1+K_2)A/3=10/3 \text{ N}$$

$$\text{Αρα } \frac{10}{3} < \mu M_1 g \text{ συν}\varphi \quad \text{άρα } \mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Δ)Επειδή θέλουμε να σταματήσει η μεταφορική κίνηση του συστήματος των δύο σωμάτων μετά την πλαστική και ακαριαία κρούση τους το σύστημα θα πρέπει να βρίσκεται την στιγμή της κρούσης στην τελική θέση ισορροπίας του. Στην θέση αυτή θα ισχύει

$(M_1+m)g\eta\mu\varphi=(K_1+K_2)x_2$ θα βρούμε $x_2=1/20 \text{ m}$ όπου x_2 η απόσταση της τελικής θέσης ισορροπίας του συστήματος σε σχέση με το φυσικό μήκος των δύο ελατηρίων.

Ε)Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για αυτή τη θέση θα βρούμε τη ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου

$$\frac{1}{2} M_1 v_{cm}^2 + \frac{1}{2} D(x_2-x_1)^2 = \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{θα βρούμε } v_{cm} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ m/s}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΟ για τον άξονα της κίνησης των δύο σωμάτων θα έχουμε

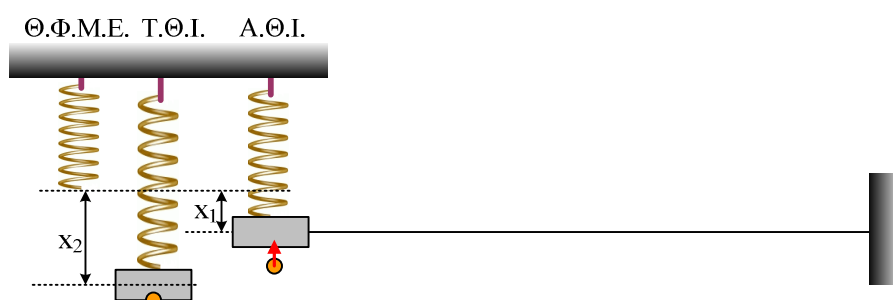
$$M_1 v_{cm} - m v = 0 \quad \text{άρα } v = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}$$

Την στιγμή της κρούσης οι δυνάμεις είναι κεντρικές και έτσι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου δεν θα αλλάξει. Έτσι στην θέση αυτή το σύστημα θα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση.

Αλλαγή στη θέση ισορροπίας ΑΔΤ και ένα κύμα.

Σώμα μάζας $m_1=2\text{kg}$ είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=10\pi^2\text{N/m}$ και ισορροπεί. Στο σώμα είναι δεμένη οριζόντια αβαρής ελαστική χορδή μεγάλου μήκους πάνω στην οποία μπορεί να διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με ταχύτητα $V=1\text{m/s}$. Βλήμα μάζας $m_2=0,5\text{kg}$ κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $u=\pi/2\text{ m/s}$ και σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα m_1 την στιγμή $t=0$. Να βρεθεί η εξίσωση απομάκρυνσης του συστήματος (θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω) των δύο σωμάτων και να σχεδιαστεί η μορφή της ελαστικής χορδής την χρονική στιγμή $t=2,625\text{s}$. Να θεωρηθεί ότι η απομάκρυνση ψ θα έχει σαν αρχή Ο την θέση ισορροπίας του συστήματος (m_1+m_2) με το ελατήριο. $\pi^2=10$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:



Για την ισορροπία του m_1 θα έχουμε $m_1 \cdot g = Kx_1$ και $x_1 = 0,2\text{m}$

Για την ισορροπία του (m_1+m_2) θα έχουμε $(m_1+m_2) \cdot g = Kx_2$ και $x_2 = 0,25\text{m}$

Για την κρούση από την ΑΔΟ θα πάρουμε:

$$m_2 \cdot u = (m_1 + m_2) \cdot V_{\text{συσσωμ}} \quad \text{και} \\ V_{\text{συσσωμ}} = 0,1\pi \text{ m/sec.}$$

Η αλλαγή της μάζας θα επιφέρει αλλαγή της ΘΙ και η ΑΔΕΤ θα μας δώσει το νέο πλάτος ταλάντωσης.

$$K + U = E_{\text{ολ}} \\ \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{\text{συσσωμ}}^2 + \frac{1}{2} K (\chi_2 - \chi_1)^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

$$\text{και } A=0,05 \sqrt{2} \text{ m}$$

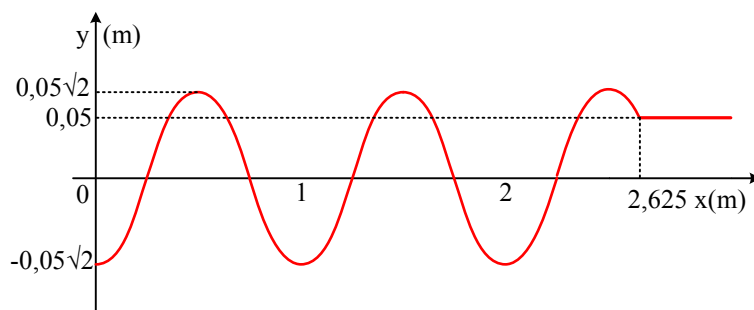
Η εξίσωση απομάκρυνσης για τα σύστημα των δύο σωμάτων θα δίνεται από την σχέση $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ για $t=0$ $x=0,05\text{m}$ και $V>0$ Άρα $0,05=0,05\sqrt{2}\eta\mu\varphi_0$ και έτσι $\varphi_0=\pi/4$. Το $\omega=\sqrt{K/M}\text{ολ}=2\pi \text{ r/sec}$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\Psi=0,05\sqrt{2} \eta\mu(2\pi t+\pi/4) \text{ (S.I.)}$$

Το κύμα θα έχει διαδοθεί πάνω στη χορδή κατά $x=V\cdot t=2,625\text{m}$. Στον χρόνο αυτό η πηγή με βάση την εξίσωση απομάκρυνσης θα έχει φτάσει στη θέση $\psi= -0,05\sqrt{2} \text{ m}$ δηλαδή στην θέση $-A$. Το σημείο $x=2,625\text{m}$ είναι το σημείο που ετοιμάζεται να ταλαντωθεί αλλά φυσικά βρίσκεται στην θέση $\psi=0,05\text{m}$ εκεί δηλαδή που βρισκόταν όλη η οριζόντια χορδή την στιγμή $t=0$.

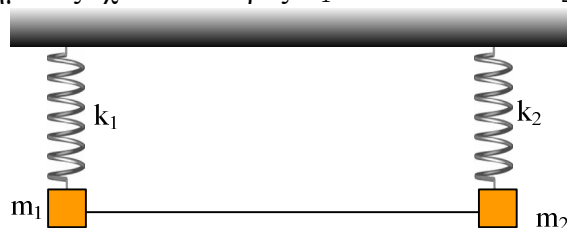
Το μήκος κύματος του κύματος θα είναι $u=\lambda\cdot f$ άρα $\lambda=1\text{m}$.

Έτσι η μορφή της χορδής θα είναι



Τα ελατήρια και η συμβολή των κυμάτων

Τα ελατήρια του σχήματος έχουν σταθερές $K_1=100\pi^2\text{N/m}$ και $K_2=400\pi^2\text{N/m}$.



Τα σώματα $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$ ισορροπούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και συνδέονται με ελαστική χορδή που έχει μήκος 2m και μπορεί πάνω της να διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$. Την χρονική στιγμή $t=0$ δίνουμε ταυτόχρονα και στις δύο μάζες ταχύτητα μέτρου $3\pi\text{ m/s}$ με φορά προς τα πάνω.

Να σχεδιασθεί η μορφή της ελαστικής μορφής τις χρονικές στιγμές:

i) $0,2\text{s}$

ii) $0,5\text{s}$

και iii) $0,75\text{s}$.

Ποια θα ήταν η μορφή του σχοινιού στις παραπάνω χρονικές στιγμές αν η δεύτερη μάζα βαλλόταν την στιγμή $t=0$ προς τα κάτω;

Αρχή των αξόνων να θεωρηθεί το σώμα m_1 .

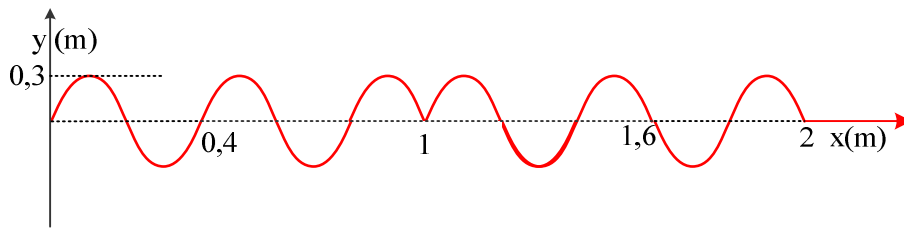
ΛΥΣΗ

Τα δύο σώματα είναι πηγές κυμάτων που θα διαδοθούν στην ελαστική χορδή. Η συχνότητα του πρώτου κύματος που δημιουργεί το m_1 είναι $f_1=5\text{Hz}$ και η συχνότητα του δεύτερου κύματος που δημιουργεί το m_2 είναι επίσης $f_2=f_1=5\text{Hz}$. Το πλάτος ταλάντωσης των σωμάτων θα βρεθεί από την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης $V_{\max}=\omega \cdot A$ άρα $A=0,3\text{m}$. Το μήκος κύματος θα βρεθεί από τον νόμο της κυματικής $v=\lambda \cdot f$ άρα $\lambda=2/5=0,4\text{m}$.

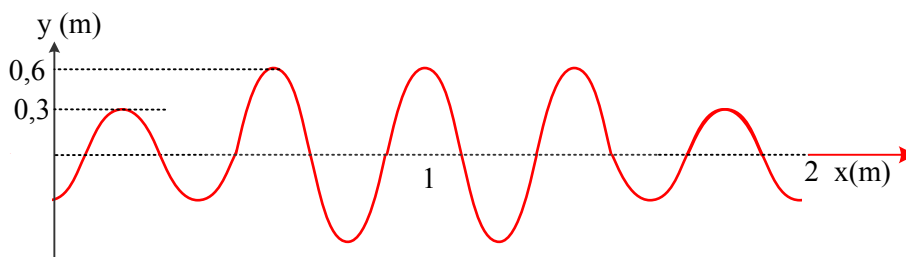
Έτσι την χρονική στιγμή $t=0,2\text{sec}$ η κάθε πηγή έχει κάνει μία πλήρη ταλάντωση άρα τα κύματα έχουν διαδοθεί το καθένα κατά ένα μήκος κύματος. Έτσι η μορφή της ελαστικής χορδής θα είναι



Την χρονική στιγμή $0,5\text{s}$ το κάθε κύμα έχει διανύσει απόσταση $s=2 \cdot 0,5=1\text{m}$ από την κάθε πηγή. Είναι δηλαδή τα κύματα έτοιμα να συναντηθούν αφού η απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι 2m . Η πηγές έχουν ταλαντωθεί για $2,5T$ άρα το σχήμα της χορδής θα είναι



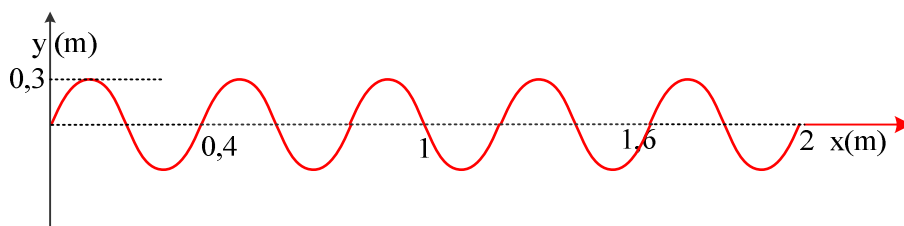
Την χρονική στιγμή $0,75s$ τα κύματα έχουν διανύσει απόσταση $s=2,0,75=1,5m$ από την κάθε πηγή. Έτσι από το μέσο της χορδής και μέχρι $0,5m$ από το μέσο και δεξιά και αριστερά του μέσου έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα. Έτσι η μορφή της ελαστικής χορδής θα είναι



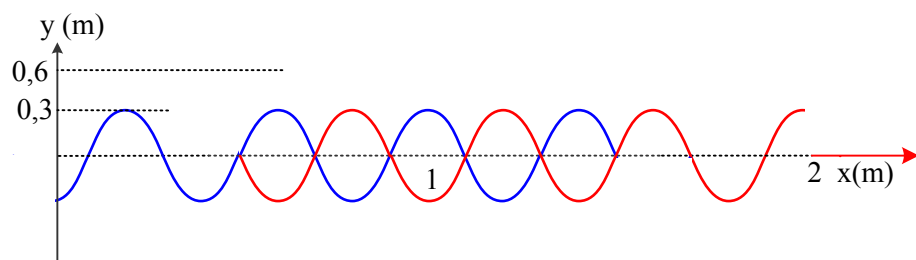
Αν τώρα το σώμα m_2 αρχικά βαλλόταν προς τα κάτω τα σημεία της χορδής θα ξεκινούσαν να ταλαντώνονται αρχικά προς τα κάτω. Έτσι η μορφή της χορδής θα ήταν για την χρονική στιγμή $0,2sec$



Ενώ για την χρονική στιγμή $0,5sec$ θα ήταν



Αν σχεδιάσουμε τα στιγμιότυπα των κυμάτων την χρονική στιγμή $t=0,75sec$ βλέπουμε ότι από την θέση $x_1=0,5m$ έως την θέση $x_2=1,5m$ τα σημεία είναι συνεχώς σε αντίθετη φάση άρα όλα τα σημεία θα είναι ακίνητα. Με κόκκινο χρώμα είναι το κύμα που παράγεται από την πηγή 2 ενώ με μπλε χρώμα το κύμα που παράγεται από την πηγή 1.

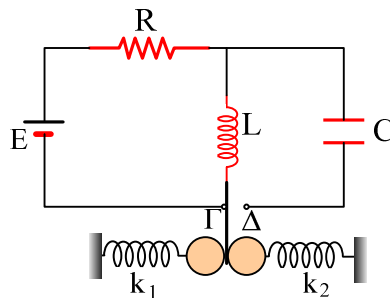


Αρα συνολικά η χορδή θα έχει μορφή



Η κρούση επιφέρει μετακίνηση διακόπτη και Ηλεκτρική ταλάντωση.

Στο παρακάτω κύκλωμα ο αβαρής μεταγωγέας Α μπορεί να κινείται οριζόντια χωρίς τριβές από τη θέση Γ στην θέση Δ.



Τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=K_2=10^3 \text{ N/m}$ και το φυσικό τους μήκος ταυτίζεται με τις θέσεις Γ και Δ ενώ τα σώματα έχουν ίδια μάζα $m_1=m_2=0,1 \text{ Kg}$. Συσπειρώνουμε το ελατήριο με σταθερά K_1 κατά Α και την στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σύστημα να εκτελέσει ταλαντώσεις. Η μπαταρία έχει ΗΕΔ $E=8 \text{ V}$ η αντίσταση είναι $R=8 \Omega$ ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι $L=10 \text{ mH}$ και ο αφόρτιστος αρχικά πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C=40 \text{ mF}$. Μετά από τρεις κεντρικές και ελαστικές κρούσεις η σφαίρα με μάζα m_2 σταματάει ακαριαία μέσω μίας εξωτερικής δύναμης και ο μεταγωγέας μένει ακίνητος στην θέση Δ.

- Α) Να βρεθεί η ενέργεια που έδωσε η πηγή του συνεχούς ρεύματος στο κύκλωμα L-C.
- Β) Να γίνει η γραφική παράσταση του φορτίου του κάτω οπλισμού του πυκνωτή σε συνάρτηση το χρόνο.

Να υποθεθεί ότι στο κύκλωμα R-L όταν επιστρέφει ο μεταγωγέας στην θέση Γ το ρεύμα προλαβαίνει να αποκατασταθεί.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

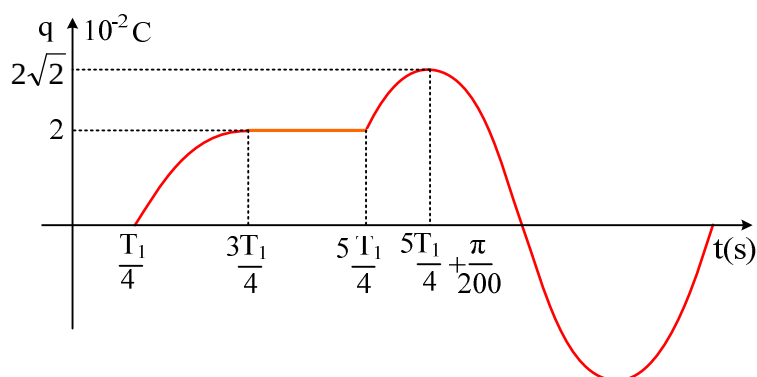
Α) Η κρούση των σωμάτων γίνεται στην θέση ισορροπίας των σωμάτων που ταλαντώνονται και επειδή τα σώματα που συγκρούονται έχουν την ίδια μάζα θα έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων στην θέση ισορροπίας τους. Η κάθε κρούση μεταφέρει τον μεταγωγέα από την θέση Γ στην θέση Δ και το αντίστροφο. Η περίοδος για το κάθε σώμα θα ήταν $T_1=2\pi\sqrt{M/K}=2\pi/100 \text{ sec}$. Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων θα ήταν $T_2=2\pi\sqrt{L/C}=4\pi \cdot 10^{-2} \text{ sec}$. Η πρώτη κρούση θα μεταφέρει τον μεταγωγέα από την θέση Γ στην θέση Δ. Την στιγμή της κρούσης το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα $I=E/R=1 \text{ A}$. Η δεύτερη κρούση θα γίνει μετά από χρόνο $T_1/2=\pi/100 \text{ sec}$ που αντιστοιχεί όμως σε $T_2/4$. Δηλαδή την στιγμή της δεύτερης κρούσης η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι 0. Μετά την δεύτερη κρούση ο μεταγωγέας έχει έρθει στην θέση Γ και το κύκλωμα R-L προσπαθεί να αποκατασταθεί. Ο χρόνος αποκατάστασης του ρεύματος είναι $5L/R=5/8 \cdot 10^{-2}$. Ο μεταγωγέας θα μείνει στην θέση Γ για χρονικό διάστημα $\Delta t=T_1/2=\pi/100 \text{ sec}$. Έτσι το ρεύμα θα προλάβει να πάρει και πάλι τη μέγιστη τιμή του $I=1 \text{ A}$. Με πέρασμα του διακόπτη από τη θέση Γ στην θέση Δ ο πυκνωτής ο πυκνωτής θα αποκτήσει περισσότερη ενέργεια κατά

$\Delta E = 1/2 \cdot L \cdot I^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$. Επειδή έχουμε τρεις συνολικά κρούσεις πριν ο μεταγωγέας καταλήξει να μείνει μόνιμα στην θέση Δ η συνολική ενέργεια του κυκλώματος L-C θα είναι $E_{ολ} = 2 \cdot \Delta E = 10^{-2} \text{ J}$.

Β) Ο πυκνωτής με το γύρισμα του μεταγωγέα από την θέση Γ στην θέση Δ θα αποκτάει και νέο φορτίο λόγω της “εκφόρτισης” του πηνίου. Έτσι με την πρώτη μεταφορά του διακόπτη από την θέση Γ στην Δ το μέγιστο φορτίο θα είναι $1/2 Q^2/C = 5 \cdot 10^{-3}$ άρα το

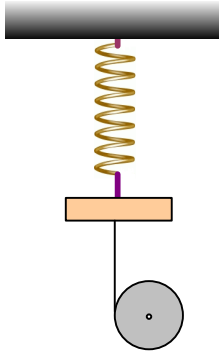
$Q = 2 \cdot 10^{-2} \text{ C}$ για την δεύτερη επαναφορά θα έχουμε $1/2 Q_2^2/C = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ άρα $Q_2 = \sqrt{8} \cdot 10^{-2} \text{ C}$. Ο πυκνωτής στην δεύτερη αυτή φάση έχει αρχικό φορτίο άρα υπάρχει και αρχική φάση. Από την εξίσωση του φορτίου του κάτω σπλισμού του πυκνωτή θα έχουμε

$q = Q \sin(\omega t' + \phi_0)$ όπου t' η χρονική στιγμή που ξεκινάει η τελική ηλεκτρική ταλάντωση L-C $\sin \phi_0 = \sqrt{2}/2$ άρα για πρώτη φορά η αρχική φάση θα είναι $\phi_0 = -\pi/4$. Ο πυκνωτής θα αποκτήσει μέγιστο φορτίο την χρονική στιγμή t' που θα βρεθεί από την σχέση $Q = Q \sin(\omega \cdot t' - \pi/4)$ άρα $t' = \pi/200 \text{ sec}$. Έτσι η γραφική παράσταση του φορτίου του κάτω σπλισμού του πυκνωτή θα είναι



Doppler με γιο-γιο και ταλάντωση

Το κατακόρυφο ελατήριο του παρακάτω σχήματος έχει σταθερά $K=100\text{N/m}$ και έχει το ανώτερό του άκρο ακλόνητα δεμένο ενώ στο κατώτερό του άκρο είναι δεμένο σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ όπου και ισορροπεί με την βοήθεια κατάλληλης εξωτερικής κατακόρυφης δύναμης. Στο κάτω μέρος του σώματος και στην ίδια κατακόρυφο με το ελατήριο συνδέουμε ένα αβαρές μη εκτατό νήμα το οποίο το έχουμε τυλίξει σε κύλινδρο ακτίνας $R=10\text{cm}$ και μάζας $M=3\text{kg}$.



Στο κέντρο του κυλίνδρου έχει στερεωθεί ανιχνευτής ήχων. Την στιγμή $t=0$ ο κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος το σκοινί αρχίζει να ξετυλίγεται η εξωτερική δύναμη καταργείται και το σώμα μάζας m συνεχίζει να ισορροπεί. Στην ίδια κατακόρυφο με τον κύλινδρο και το ελατήριο και πάνω στο έδαφος υπάρχει ακίνητη πηγή ηχητικών ήχων με συχνότητα $F_s=680\text{Hz}$. Την χρονική στιγμή $t_1=3\text{sec}$ το νήμα κόβεται. Να βρεθούν:

- A) Ο ρυθμός μεταβολής της συχνότητας που ανιχνεύει ο ανιχνευτής πριν και μετά το κόψιμο του νήματος.
- B) Η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής την στιγμή $t_2=1,5\text{sec}$ καθώς και την χρονική στιγμή $t_3=7\text{sec}$ καθώς και η ταχύτητα του σώματος m την χρονική στιγμή t_2 και τη χρονική στιγμή $t_4=(3+\pi/4)\text{sec}$
- C) Η εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας με τον χρόνο για το σώμα m αλλά και για το σώμα M .
- D) Η γραφική παράσταση της στροφορμής του σώματος M σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5M.R^2$ ενώ για τον ήχο $v_{\text{ηχ}}=340\text{m/sec}$ και $g=10\text{m/sec}^2$. Δίνεται η σχέση $\eta\mu 2\chi=2\sigma\upsilon\nu\chi.\eta\mu\chi$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για τον κύλινδρο και την κίνηση του πριν κοπεί το νήμα θα έχουμε από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και την στροφική κίνηση

$$M.g-T=M.a \quad (1) \quad T.R=0,5M.R^2.\alpha\gamma\omega\nu \quad \text{άρα} \quad T=0,5.M.a \quad (2)$$

θα βρούμε

$$a=20/3 \text{ m/sec}^2 \quad \text{και} \quad T=10\text{N}.$$

Η συχνότητα που ανιχνεύει ο ανιχνευτής που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα δίνεται από την σχέση $F_a = (u\eta\chi + v_{cm}).F_s/u\eta\chi$ (3)

Ο ρυθμός μεταβολής αυτής της συχνότητας θα είναι πριν κοπεί το νήμα

$$\Delta F_a/\Delta t = F_s \cdot a/u\eta\chi \quad \text{άρα } \Delta F_a/\Delta t = 40/3 \text{ Hz/sec}$$

Όταν όμως κοπεί το νήμα η μοναδική δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο είναι το βάρος του άρα και η επιτάχυνσή του θα είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας

$$\Delta F_a'/\Delta t = F_s \cdot g/u\eta\chi \quad \text{άρα } \Delta F_a/\Delta t = 20 \text{ Hz/sec}$$

Β) Την χρονική στιγμή $t_1 = 1,5 \text{ sec}$ το νήμα δεν έχει κοπεί ακόμη και έτσι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm} = a \cdot t_1 = 10 \text{ m/sec}$ έτσι από την σχέση (3) θα έχουμε $F_a = 700 \text{ Hz}$

Την στιγμή $t_2 = 7 \text{ sec}$ το νήμα έχει κοπεί και ο κύλινδρος κινείται πλέον με την επίδραση μόνο του βάρους του. Την στιγμή που κόβεται το νήμα το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ταχύτητα $v_{cm} = a \cdot t_1 = 20 \text{ m/sec}$ ενώ την στιγμή $t_3 = 7 \text{ sec}$ η $v_{cm}' = 20 + 10 \cdot 4 = 60 \text{ m/sec}$ και με την βοήθεια της σχέσης (3) θα βρούμε $F_a' = 800 \text{ Hz}$.

Το σώμα m αρχίζει την ταλάντωσή του την στιγμή που κόβεται το νήμα δηλαδή την χρονική στιγμή t_1 . Έτσι την στιγμή $t_2 = 1,5 \text{ sec}$ δεν έχει αρχίσει ακόμη η ταλάντωσή του άρα $v_m = 0 \text{ m/sec}$.

Για την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος m θα ισχύει $m \cdot g + T = K \cdot x_1$ άρα $x_1 = 0,2 \text{ m}$. Μετά το κόψιμο του νήματος για την νέα θέση ισορροπίας θα ισχύει $m \cdot g = K \cdot x_2$ άρα $x_2 = 0,1 \text{ m}$. Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα μάζας m δεν έχει ταχύτητα άρα αν ορίσουμε θετική φορά προς τα πάνω το σώμα θα βρίσκεται στην ΘΕΑ και άρα το πλάτος του θα είναι $A = x_1 - x_2 = 0,1 \text{ m}$

Έτσι η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος m θα είναι $v = 1 \cdot \sin(10t' + 3\pi/2)$ (S.I.) (4)

Όπου $t' = t - 3$ (S.I.) ο χρόνος μετά την χρονική στιγμή t_1 . Άρα για $t_4 = (3 + \pi/4) \text{ sec}$ ο $t' = \pi/4 \text{ sec}$

Και αντικαθιστώντας στην (4) θα έχουμε $v_m' = 1 \text{ m/sec}$.

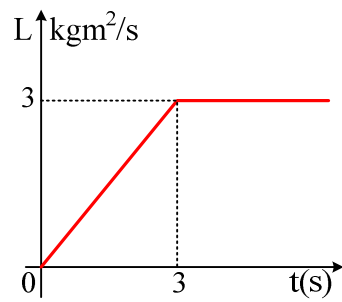
Γ) Για το σώμα m και μετά το κόψιμο του νήματος το $\Delta K/\Delta t = \Sigma F \cdot u = -D \cdot x \cdot v = -100 \cdot 0,1 \eta\mu(10t' + 3\pi/2) \cdot \sin(10t' + 3\pi/2) = -5 \eta\mu(20t' + 3\pi)$ (S.I.) όπου t' ο χρόνος μετά το κόψιμο του νήματος.

Για το σώμα M και πριν κοπεί το νήμα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα δινόταν από την σχέση $\Delta K/\Delta t = \Sigma F \cdot u + \Sigma \tau \cdot \omega = 200 \cdot t$ $t < 3 \text{ sec}$ ενώ μετά το κόψιμο του νήματος $\Delta K/\Delta t = \Sigma F \cdot u = M \cdot g \cdot u = 600 + 300(t - 3)$ για $t > 3 \text{ sec}$.

Δ) Πριν το νήμα κοπεί η στροφορμή θα δίνεται από την σχέση

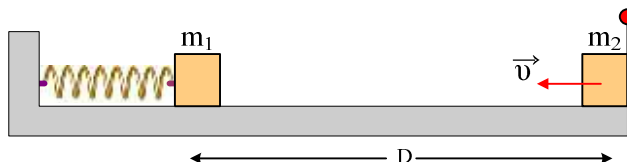
$L = I \cdot \omega = 0,5 M \cdot R^2 \cdot \alpha$ γων.. $t = t \quad t < 3 \text{ sec}$ (S.I) ενώ μετά το κόψιμο του νήματος η στροφορμή του κυλίνδρου παραμένει σταθερή αφού δεν υπάρχει καμία δύναμη που να προκαλεί ροπή έτσι $L = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec} \quad t > 3 \text{ sec}$

Έτσι η γραφική παράσταση της στροφορμής θα είναι



Doppler και κρούση

Στο παρακάτω σχήμα το ελατήριο έχει σταθερά $K=\pi^2\text{N/m}$ το σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ είναι ακίνητο και δεμένο στο ελατήριο και έχει προσαρμοσμένο πάνω του ανιχνευτή ήχων. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Σε απόσταση $D=340\text{m}$ από το σώμα m_1 υπάρχει δεύτερο σώμα μάζας $m_2=1\text{kg}$ που το εκτοξεύουμε με αρχική ταχύτητα $u=10\text{m/sec}$ την στιγμή $t=0$. Στην ίδια θέση με το σώμα m_2 υπάρχει ακίνητη πηγή που μπορεί να παράγει αρμονικούς ήχους συχνότητας $F_s=680\text{Hz}$ και τίθεται σε λειτουργία την στιγμή $t=0$. Το σώμα m_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το m_1 και κάποια στιγμή επιστρέφει στην πηγή. Τότε σταματάει η πηγή να εκπέμπει ήχους. Να βρεθούν:

- A) Ποια χρονική στιγμή θα επιστέψει το m_2 στην πηγή των ηχητικών κυμάτων;
- B) Να δοθεί η γραφική παράσταση της συχνότητας που καταγράφει ο ανιχνευτής σε συνάρτηση με τον χρόνο. Τι εκφράζει το περιεκλειόμενο εμβαδόν; Μπορεί να υπολογιστεί;

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $u_{\text{ηχ}}=340\text{m/sec}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

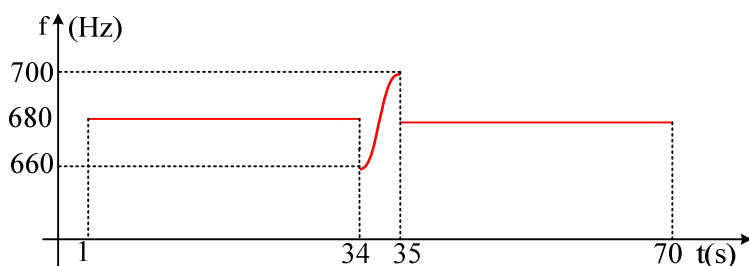
A) Για να φτάσει το σώμα m_2 στο σώμα m_1 θα χρειασθεί χρόνος $t_1=D/u=34\text{sec}$. Η κρούση είναι ελαστική άρα τα δύο σώματα θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Το σώμα m_1 θα εκτελέσει γ.α.τ μέχρι να ξαναβρεθεί στην ΘΙΤ και να ξαναχτυπήσει το σώμα m_2 για να γίνει και πάλι η ανταλλαγή ταχυτήτων. Η διάρκεια της ταλάντωσης του m_1 είναι $t_2=T/2=1\text{sec}$. Η επιστροφή του σώματος m_2 θα διαρκέσει και πάλι t_1 . Άρα

η επιστροφή του σώματος m_2 στην πηγή θα γίνει την χρονική στιγμή $t_{ολ}=2t_1+T/2=69\text{sec}$.

Β) Για να φτάσει ο ήχος από την πηγή στον ανιχνευτή θα χρειασθεί αρχικό χρονικό διάστημα $\Delta t=D/u_{\eta\chi}=1\text{sec}$. Μέχρι την στιγμή που έγινε η πρώτη κρούση ο ανιχνευτής ήταν ακίνητος. Έτσι η συχνότητα που κατέγραφε ήταν αυτή της πηγής $F=680\text{Hz}$. Μετά την πρώτη κρούση και μέχρι να γίνει η δεύτερη ο ανιχνευτής εκτελούσε γ.α.τ. με ταχύτητα που θα δινόταν από την εξίσωση $U=u\cdot\sin\omega\cdot t'$ όπου $t'=(t-34)\text{sec}$. Έχουμε θεωρήσει θετική φορά προς τα δεξιά και το $\omega=VK/m_1=\pi\text{ r/s}$. Έτσι η συχνότητα που καταγράφει θα δίνεται από την σχέση:

$$F=(340-10\sin\pi t')680/340=680-20\sin\pi t' \quad 0 < t' < 1\text{sec (S.I.)}.$$

Μετά την δεύτερη κρούση ο ανιχνευτής καταγράφει και πάλι την ίδια συχνότητα με αυτήν της πηγής αφού σταματάει. Ο ανιχνευτής καταγράφει συχνότητα μέχρι την στιγμή $t=70\text{sec}$ γιατί την στιγμή $t_{ολ}=69\text{sec}$ σταμάτησε να εκπέμπει η πηγή. Έτσι η γραφική παράσταση της συχνότητας θα είναι



Η βαθμολόγηση του κατακόρυφου άξονα
δεν ξεκινά από το μηδέν.

Το εμβαδό ανάμεσα στις καμπύλες και στον άξονα των χρόνων εκφράζει τον αριθμό των κυμάτων που ανίχνευσε ο ανιχνευτής ήχων. Τα κύματα όμως αυτά τα έχει εκπέμψει η πηγή. Επειδή δεν μπορούν να χαθούν κύματα $N_s=N_A$. Από τον ορισμό της συχνότητας θα έχουμε $F_s=N_s/\Delta t_s$ άρα $N_s=680\cdot 69=46920$ κύματα.

Ανάποδες στροφές

Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από δύο κατακόρυφα τεταρτοκύκλια με ακτίνες $R_1=2\text{m}$ και $R_2=0,25\text{m}$ που συνδέονται μεταξύ τους με οριζόντιο τμήμα. Από την κορυφή του πρώτου τεταρτοκύκλιου αφήνουμε σφαίρα μάζας m και ακτίνας $r=0,1\text{m}$.



Η σφαίρα σε όλη την διάρκεια της αρχικής της κίνησης και ενώ βρίσκεται σε επαφή με τα τεταρτοκύκλια ή το οριζόντιο επίπεδο κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.

- A) Να βρεθεί το μέγιστο ύψος του κέντρου μάζας της σφαίρας από το οριζόντιο επίπεδο μετά το χάσιμο της επαφής με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο.

Όταν η σφαίρα φτάσει στο ανώτερο σημείο της με την βοήθεια κατάλληλης στιγμιαίας ροπής ζεύγους η σφαίρα αλλάζει στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα.

- B) Να βρεθεί το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ώστε η σφαίρα μετά την επανοδό της να κυλίσει χωρίς να ολισθήσει πάνω στα τεταρτοκύκλια. Δίνεται η μάζα της σφαίρας $m=1\text{Kg}$ και για την σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4 \cdot m \cdot r^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση και μέχρι την θέση που η σφαίρα χάνει την επαφή της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο

$$m \cdot g \cdot R_1 = m \cdot g \cdot R_2 + \frac{1}{2} m \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

θα βρούμε μετά από τις πράξεις $U=5\text{m/s}$.

Το βάρος είναι η μοναδική δύναμη που δέχεται η σφαίρα μετά το χάσιμο της επαφής της σφαίρας με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο. Έτσι θα

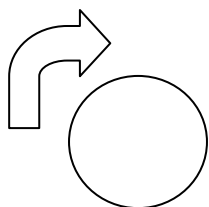
εκτελέσει επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση μέχρι το ανώτερο σημείο της τροχιάς ενώ ταυτόχρονα θα εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα που θα βρεθεί από την σχέση $U = \omega \cdot r$ $\omega = 50 \text{ rad/s}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την στιγμή που χάνεται η επαφή και μέχρι το ανώτερο σημείο θα έχουμε:

$$m \cdot g \cdot R_2 + \frac{1}{2} m \cdot U^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot H_{\max} + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

άρα μετά από πράξεις $H_{\max} = 1,5 \text{ m}$

Β) Η σφαίρα ανεβαίνοντας έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα με φορά όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα

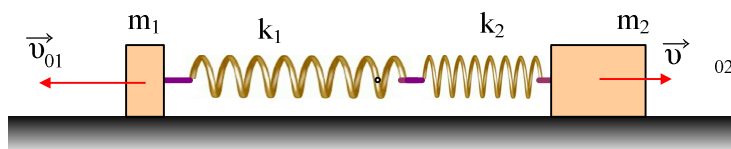


Η στιγμιαία ροπή ζεύγους πρέπει να προκαλέσει αλλαγή στην γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε κατά την κάθοδο της σφαίρας και μπαίνοντας στο μικρό τεταρτοκύκλιο η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με το τεταρτοκύκλιο να είναι 0. Αυτό θα συμβεί αν η γωνιακή ταχύτητα αλλάξει φορά αλλά όχι μέτρο.

$$\text{Αρα } \Delta L = L_{\text{τελ}} - L_{\text{αρχ}} = I \cdot \omega - (-I \cdot \omega) = 2 \cdot I \cdot \omega = 0,4 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec}$$

Ακίνητο σημείο δύο ελατηρίων.

Τα οριζόντια ελατήρια του παρακάτω σχήματος έχουν το φυσικό τους μήκος και έχουν κοινό και μη στερεωμένο το ένα τους άκρο. Τη χρονική $t=0$ εκτοξεύουμε ταυτόχρονα τα δύο σώματα που είναι δεμένα στο κάθε άκρο του ελατηρίου και μπορούν να κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι το κοινό άκρο των ελατηρίων παραμένει συνεχώς ακίνητο. Αν $K_1=100\text{N/m}$, $K_2=400\text{N/m}$, $m_1=1\text{Kg}$, $m_2=4\text{Kg}$ και $U_{01}=5\text{m/sec}$ να βρεθούν:



- A) Η αρχική ταχύτητα του δεύτερου σώματος
- B) Η απόσταση των δύο σωμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο αν το φυσικό μήκος του κάθε ελατηρίου είναι $L_{01}=2\text{m}$ και $L_{02}=0,5\text{m}$
- Γ) Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των δύο σωμάτων την χρονική στιγμή $t=\pi/20\text{sec}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για να είναι συνεχώς ακίνητο το σημείο σύνδεσης των δύο ελατηρίων θα πρέπει οι δυνάμεις των δύο ελατηρίων να είναι συνεχώς αντίθετες. Άρα $F_{1ελ} = -F_{2ελ}$ και άρα τα μέτρα

$K_1 \cdot A_1 \eta \mu \omega_1 t = K_2 A_2 \eta \mu \omega_2 t$ και επειδή $\omega_1 = \omega_2$ θα πρέπει $K_1 \cdot A_1 = K_2 \cdot A_2$ άρα $A_2 = 1/8\text{m}$. Η ταχύτητα $U_{02} = \omega_2 \cdot A_2 = 1,25\text{m/sec}$.

B) Η απόσταση των δύο σωμάτων θα βρεθεί από τη σχέση

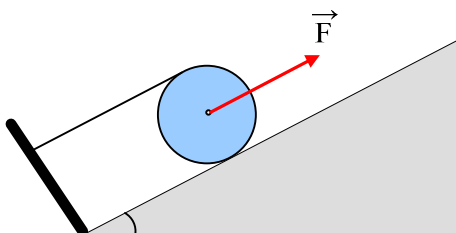
$$L = L_{01} + L_{02} + x_1 + x_2 = 2,5 + 0,5 \eta \mu 10t + 0,125 \eta \mu 10t = 2,5 + 0,625 \eta \mu 10t \text{ (S.I.)}$$

Γ) Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των δύο σωμάτων θα δίνεται από τη σχέση

$$\Delta L / \Delta t = 6,25 \sigma \nu 10t \text{ και για } t = \pi/20\text{sec θα βρούμε } \Delta L / \Delta t = 0 \text{ m/sec.}$$

100^η ανάρτηση: Μια ιδιόμορφη κύλιση.

Κύλινδρος μάζας $M=10\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ αρχίζει την στιγμή $t=0$ να ανέρχεται κυλιόμενος (αριστερόστροφα) χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος αρχικά λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\phi=30^\circ$ με τη βοήθεια σταθερής δύναμης $F=80\text{N}$, που ασκείται στο κέντρο του κυλίνδρου και είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και λεπτότατου σκοινιού που είναι τυλιγμένο στο κύλινδρο και είναι δεμένο στην αρχή του κεκλιμένου επιπέδου. Το νήμα ξετυλίγεται από τον κύλινδρο και είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο.



Τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{sec}$ το νήμα κόβεται και η δύναμη F καταργείται. Εκείνη την στιγμή το επίπεδο γίνεται μη λείο με συντελεστή τριβής $\mu=\sqrt{3}/3$.

Να βρεθούν:

- A) Η ταχύτητα του σημείου επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο τη χρονική στιγμή t_1 .
- B) Το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου σε σχέση με την αρχική του θέση.
- Γ) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός επιστρέψει στην θέση όπου βρισκόταν την χρονική στιγμή $t=0$.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}}=0,5M \cdot R^2$.

Απάντηση:

A) Από τους νόμους κίνησης για την μεταφορική και στροφική κίνηση θα έχουμε

$$F - Mg \sin \phi - T = M \cdot a \quad (1)$$

$$T \cdot R = 0,5M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}}$$

$$\text{άρα } T = 0,5 \cdot M \cdot a \quad (2)$$

Από την λύση των (1) και (2) θα βρούμε $a=2\text{m/sec}^2$

Το διάστημα που θα έχει διανύσει ο κύλινδρος θα είναι $S_1 = 1/2 a \cdot t_1^2 = 25\text{m}$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι $U_{\text{cm}} = a \cdot t_1 = 10\text{m/sec}$. Η ταχύτητα λόγω περιστροφής θα είναι επίσης $U_{\text{περ}} = 10\text{m/sec}$ γιατί ο κύλινδρος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει αριστερόστροφα

βέβαια. Δηλαδή το σημείο που είναι δεμένο στο νήμα έχει ταχύτητα 0 και το σημείο που βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο έχει ταχύτητα $2U_{cm}=20\text{m/s}$. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου θα είναι $\omega=U_{περ}/R=20r/\text{sec}$.

Β)Την στιγμή t_1 κόβεται το νήμα και παύει να ασκείται η δύναμη. Το σημείο επαφής όμως με το δάπεδο έχει συνολική ταχύτητα 20m/sec με φορά προς τα πάνω. Έτσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης με φορά προς τα κάτω μέχρι να αρχίσει (αν αρχίσει) η καθαρή κύλιση. Έτσι ο κύλινδρος εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους και της τριβής ολίσθησης και επιβραδυνόμενη στροφική εξαιτίας της ροπής της τριβής ολίσθησης. Από τους νόμους της κίνησης θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot \eta \mu \phi + \mu \cdot M \cdot g \cdot \sigma \nu \nu \phi = M \cdot a_2$$

$$\text{άρα } a_2 = 10\text{m/sec}^2 \quad \text{και}$$

$$\mu \cdot M \cdot g \cdot \sigma \nu \nu \phi \cdot R = 0,5 M \cdot R^2 \cdot \alpha \gamma \omega \nu$$

$$\text{άρα } \alpha \gamma \omega \nu = 20r/s^2.$$

Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του κυλίνδρου η ταχύτητα του κέντρου μάζας του θα είναι 0. Έτσι από τον νόμο της ταχύτητας θα έχουμε $0 = 10 - 10t_2$ άρα $t_2 = 1\text{sec}$. Την ίδια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα είναι $\omega' = \omega - \alpha \gamma \omega \nu \cdot t_2$ άρα $\omega' = 0r/\text{sec}$. Δηλαδή ταυτόχρονα με την μεταφορική σταματάει και η στροφική κίνηση του κυλίνδρου.

Το μήκος της διαδρομής που διανύει ο κύλινδρος μετά την κατάργηση της δύναμης θα βρεθεί από την σχέση του διαστήματος για την επιβραδυνόμενη κίνηση:

$$S_2 = U_{cm} \cdot t_2 - 1/2 a_2 \cdot t_2^2 = 5\text{m}.$$

Άρα το συνολικό μήκος της διαδρομής θα είναι:

$$S_{ολ} = 25 + 5 = 30\text{m} \quad \text{άρα το } H_{max} = S_{ολ}/2 = 15\text{m}.$$

Γ)Αν υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος κυλίνεται (αριστερόστροφα) προς τα κάτω θα ισχύουν οι νόμοι της κίνησης

$$M \cdot g \cdot \eta \mu \phi - T \sigma \tau = M \cdot a_3 \quad (3)$$

$$T \sigma \tau \cdot R = 0,5 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha \gamma \omega \nu 2$$

$$\text{άρα } T \sigma \tau = 0,5 \cdot M \cdot a_3 \quad (4)$$

από τις εξισώσεις (3) και (4) θα βρούμε $a_3 = 10/3 \text{ m/sec}^2$ και $T \sigma \tau = 100/6 \text{ N}$

Για να κυλιέται ο κύλινδρος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης $T \sigma \tau < \mu \cdot N$ δηλαδή $100/6 < 50$ που ισχύει άρα και ο κύλινδρος αρχίζει να κατέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει.

Μετά όμως από διαδρομή 5m θα μπει σε περιοχή όπου δεν υπάρχουν τριβές. Από εκεί και μετά θα πάψει να υπάρχει η στατική τριβή και θα εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους αλλά θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση αφού πλέον δεν θα υπάρχει καμία δύναμη που να προκαλεί ροπή.

Με την βοήθεια των εξισώσεων κίνησης για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

$$S_2 = 1/2 a_3 \cdot t_3^2 \text{ άρα } t_3 = \sqrt{3} \text{ sec και } U_{cm} = a_3 \cdot t_3 = 10\sqrt{3}/3 \text{ m/sec.}$$

Μετά την είσοδο στο λείο επίπεδο με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot S_1/2 + 1/2 \cdot M \cdot U_{cm}^2 + 1/2 \cdot I \cdot \omega^2 = 1/2 \cdot M \cdot U_{cm_2}^2 + 1/2 \cdot I \cdot \omega^2 \text{ και μετά από πράξεις θα έχουμε:}$$

$$U_{cm_2} \approx 16,8 \text{ m/sec.}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ 3ωρο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- 1) Ένα σώμα μάζας m εκτελεί γ.α.τ. με πλάτος A και δεμένο σε ελατήριο σταθεράς K έχοντας ολική ενέργεια E . Αν η ενέργεια της ταλάντωσης γίνει $8E$ θα πρέπει να :

- A) Να τετραπλασιασθεί την μάζα και να διπλασιασθεί το A .
B) Να διπλασιασθεί το A και το K
Γ) Να τριπλασιασθεί η m και το K
Δ) Να μην αλλάξει τίποτα.

Μονάδες 5

- 2) Το πηνίο στη διάρκεια δύο περιόδων ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης L-C διαρρέεται από ρεύμα μέγιστης έντασης:

- A) Τρεις φορές
B) Τέσσερις φορές
Γ) Πέντε φορές
Δ) Δύο φορές

Μονάδες 5

- 3) Το πλάτος μίας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με την σχέση $A=A_0e^{-\Lambda t}$. Η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης είναι E_0 . Ποια χρονική στιγμή η ενέργεια την μηχανικής ταλάντωσης που έχει **χαθεί** είναι $15E_0/16$.

- A) $\ln 2/\Lambda$
B) $2 \ln 2/\Lambda$
Γ) $3 \ln 2/\Lambda$
Δ) $4 \ln 2/\Lambda$

Μονάδες 5

- 4) Δύο διαπασών δημιουργούν διακρότημα με περίοδο **2sec**. Αν η συχνότητα του ενός διαπασών είναι 294Hz τότε η συχνότητα του άλλου θα είναι

- A) Σίγουρα 296Hz
B) Σίγουρα 292Hz
Γ 296Hz ή 292Hz
Δ) Καμία από τις παραπάνω

Μονάδες 5

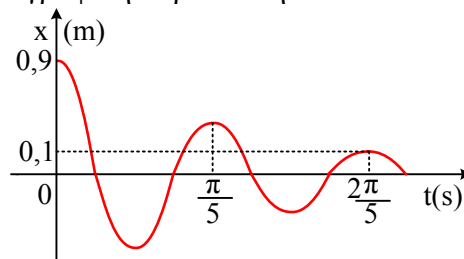
- 5) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος:

- A) Αν μεταβάλλουμε την μάζα ενός ταλαντωτή που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση τότε θα αλλάξει η περίοδος της ταλάντωσης του.
B) Όταν ένας ταλαντωτής που εκτελεί γ.α.τ. την στιγμή $t=0$ είναι στην θέση ισορροπίας τότε $\phi=0$.
Γ) Όταν σε μία φθίνουσα ταλάντωση αυξήσουμε την τιμή του b σε πολύ μεγάλες τιμές τότε η κίνηση λέγεται απεριοδική.
Δ) Στην περίπτωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων ο κύριος λόγος της απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση των κυκλωμάτων αυτών.
Ε) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση ο λόγος των διαδοχικών μέγιστων είναι σταθερός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

- 1) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση που το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την παρακάτω γραφική παράσταση.



Να θεωρηθεί ότι η σταθερά D της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με αυτή της αμείωτης ελεύθερης ταλάντωσης η δε μάζα του ταλαντωτή είναι 1 kg .

Η απώλεια της ενέργειας του ταλαντωτή στην διάρκεια της **δεύτερης περιόδου** της ταλάντωσής είναι :

A) $0,5\text{ J}$

B) 4 J

Γ) $4,5\text{ J}$

Μονάδες(2+6)

- 2) Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα **3** ταλαντώσεις που έχουν εξισώσεις
 $X_1 = 10\eta\mu 10t$ $X_2 = 10\eta\mu(10t + \pi)$ $X_3 = 10\eta\mu(10t + \pi/3)$ όλες στο S.I.

Η συνολική εξίσωση κίνησης θα είναι

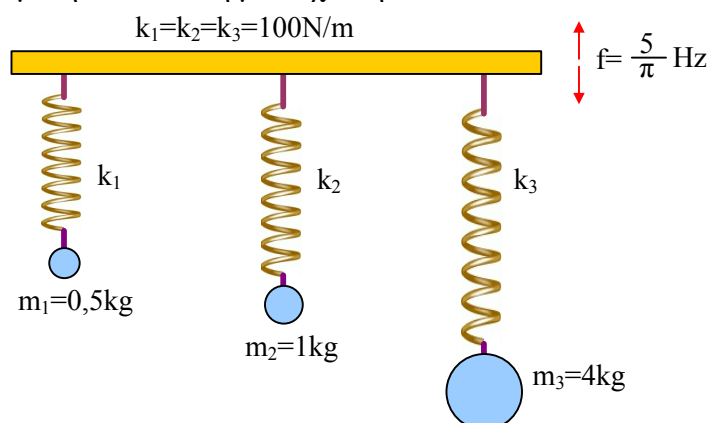
A) $X_{ολ} = 10 \sqrt{3} \eta\mu(10t + \pi/3)$

B) $X_{ολ} = 10\eta\mu(10t + \pi/6)$

Γ) $X_{ολ} = 10\eta\mu(10t + \pi/3)$

Μονάδες (3+6)

- 3) Η παρακάτω οριζόντια αβαρής σανίδα πρόκειται να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα $5/\pi \text{ Hz}$.



Ο Τοτός και ένας φίλος ο Μπόμπος συζητούν για το ποιο μπαλάκι θα εκτελέσει ταλάντωση με το μεγαλύτερο πλάτος. Ο Τοτός λέει :<<Το ελαφρύ σώμα>>. Ο Μπόμπος λέει :<<Το βαρύ σώμα>>

Ποιος έχει δίκαιο

A)Ο Τοτός

B)Ο Μπόμπος

Γ)Κανένας

Μονάδες(2+6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Ένα ιδανικό κύκλωμα L-C αποτελείται από ιδανικό πηνίο με συντελεστή $L=10\text{mH}$ και ιδανικό πυκνωτή με χωρητικότητα $C=100\text{mF}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο πυκνωτής έχει όλη την ενέργεια του κυκλώματος που είναι ίση με $5 \cdot 10^{-3}\text{J}$. Να βρεθούν :

α) Η περίοδος της ενέργειας του πυκνωτή

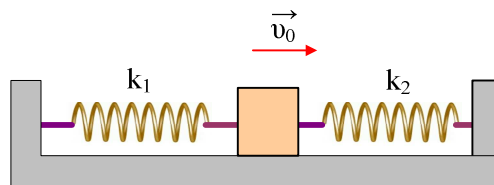
β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος όταν ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή είναι 0.

γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με το στιγμιαίο ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Μονάδες (8+8+9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Τα παρακάτω ελατήρια του σχήματος είναι και τα δύο συμπιεσμένα και το σώμα $m=1\text{kg}$ ισορροπεί ανάμεσά τους.



Η σταθερά του ενός είναι $K_1=100\text{N/m}$ και του άλλου είναι $K_2=300\text{N/m}$. Αρχικά το ελατήριο K_1 είναι συσπειρωμένο κατά $0,3\text{m}$. Δίνουμε αρχική ταχύτητα $U_0=8\text{m/sec}$.

A) Να αποδείξετε ότι το σώμα κάνει γ.α.τ. και να γραφούν οι εξισώσεις $x-t$, $u-t$. Θετική φορά να θεωρηθεί η φορά της αρχικής ταχύτητας.

B) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν το σώμα βρίσκεται i) Στην θέση φυσικού μήκους του πρώτου ελατηρίου και ii) Στην θέση του φυσικού μήκους του δεύτερου ελατηρίου.

Γ) Κάποια στιγμή το ελατήριο με σταθερά K_2 και ενώ έχει μηδενική ενέργεια παραμόρφωσης σπάει για κάποια άγνωστη αιτία και ο Τοτός (του προηγούμενου θέματος) το αφαιρεί από την θέση του αυτόματα. i) Θα συνεχίσει το σώμα να κάνει γ.α.τ; ii) Γιατί; iii) Αν ναι να βρεθούν το νέο πλάτος και η νέα συχνότητα.

Μονάδες (7+5+2+2+7+2)

Ήθελα να είχα και μια και δύο και τρεις και τέσσερις... Σύγχρονες πηγές...

Τέσσερις σύγχρονες πηγές κυμάτων δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $u=1\text{m/sec}$. Την στιγμή $t=0$ οι πηγές O_1, O_2, O_3 και O_4 αρχίζουν ταυτόχρονα να ταλαντώνονται κατακόρυφα με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4=0,1\eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Οι σημειακές πηγές σχηματίζουν τετράγωνο πλευράς $a=\sqrt{2}\text{m}$ πάνω στην επιφάνεια του υγρού. Την χρονική στιγμή $t_1=2\text{sec}$ σταματάει να ταλαντώνεται η πηγή O_4 . Τη χρονική στιγμή $t_2=3\text{sec}$ σταματάει να ταλαντώνεται και η πηγή O_3 . Το ίδιο συμβαίνει και την χρονική στιγμή $t_3=4\text{sec}$ και $t_4=5\text{sec}$ με τις άλλες δύο πηγές O_2 και O_1 . Να δοθεί η εξίσωση απομάκρυνσης ταλάντωσης για το σημείο που αντιστοιχεί στο κέντρο του τετραγώνου που σχηματίζουν οι τέσσερις πηγές καθώς και να γίνει η γραφική παράσταση αυτής σε συνάρτηση με τον χρόνο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με τη βοήθεια του ΠΘ το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου θα είναι $d=2\text{m}$ άρα η απόσταση του κέντρου από την κάθε πηγή θα είναι $R_1=R_2=R_3=R_4=1\text{m}$. Η περίοδος ταλάντωσης του σημείου αυτού θα είναι $T=2\pi/\omega=1\text{sec}$ και το μήκος κύματος θα βρεθεί από την σχέση $U=\lambda \cdot f$ άρα $\lambda=1\text{m}$.

Η εξίσωση του κάθε κύματος που παράγει η κάθε πηγή θα είναι

$\psi=0,1\eta\mu 2\pi(t-R)$ (S.I.) έτσι για το κέντρο του τετραγώνου

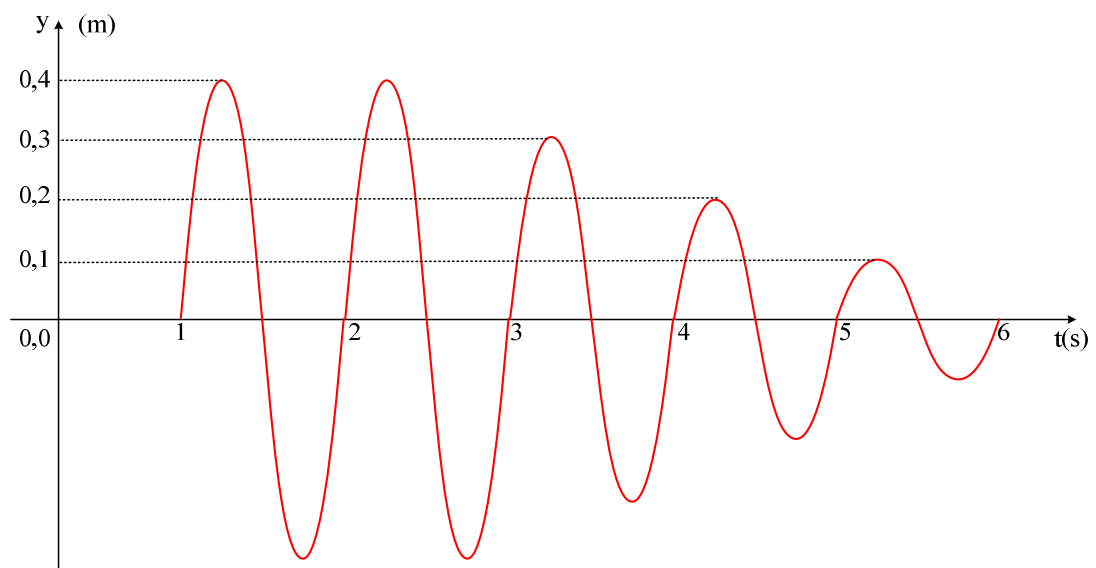
$$\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4=0,1\eta\mu 2\pi(t-1) \text{ (S.I.) για } t \geq 1\text{sec}$$

άρα το $\psi_{\text{ολ}}=4\psi_1=0,4\eta\mu 2\pi(t-1)$ (S.I) για $t \geq 1\text{sec}$ και για όσο χρόνο φυσικά ταλαντώνονται όλες οι πηγές.

Από την σχέση του διαστήματος για την ομαλή κίνηση $R=U \cdot t$ για να φτάσει μία διαταραχή από την κάθε πηγή στο κέντρο του τετραγώνου θα χρειαζόταν χρόνος $\Delta t=1\text{sec}$. Έτσι γενική μορφή απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο θα δινόταν σύμφωνα με τη σχέση

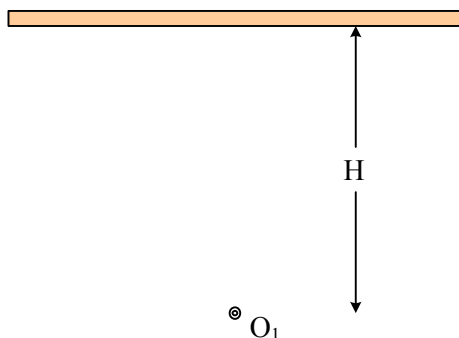
$$\psi_{\text{ολ}} = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0,4\eta\mu 2\pi(t-1) & 1 \leq t \leq 3 \\ 0,3\eta\mu 2\pi(t-1) & 3 \leq t \leq 4 \\ 0,2\eta\mu 2\pi(t-1) & 4 \leq t \leq 5 \\ 0,1\eta\mu 2\pi(t-1) & 5 \leq t \leq 6 \\ 0 & 6 \leq t \end{cases}$$

Άρα η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή



Μια αναδίπλωση ράβδου για το νέο μας σπίτι.

Για να διπλώσει μία λεπτή ράβδο από μαλακό σίδηρο μάζας $m=2\text{Kg}$ και μήκους $l=1\text{m}$ ακριβώς στη μέση ο Μπάρμπα-Γιάννης ο σιδεράς χρειάζεται να δαπανήσει ελάχιστη χημική ενέργεια $E_{\min}=5\text{J}$. Η ίδια ράβδος αφήνεται να πέσει ελεύθερα έτσι ώστε το κέντρο μάζας της να βρίσκεται σε ύψος $H=0,5\text{ m}$ πάνω από ακλόνητο οριζόντιο καρφί O_1 όπως στο παρακάτω σχήμα.



Μετά την κρούση της ράβδου με το οριζόντιο ακλόνητο καρφί η ράβδος διπλώνει (χωρίς να αναπηδήσει) και σταματάει ακριβώς την στιγμή που τα δύο της κομμάτια γίνονται κατακόρυφα. Να βρεθούν:

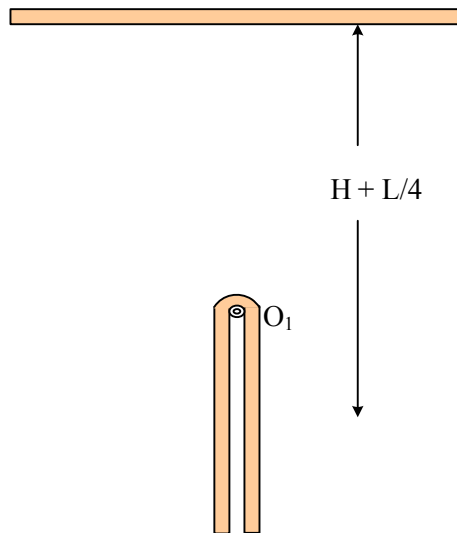
- Α) Η θερμότητα που θα αναπτυχθεί κατά την κρούση του καρφιού με την ράβδο μέχρι να ισορροπήσει τελικά το σύστημα.
- Β) Την κινητική ενέργεια της ράβδου την στιγμή που τα δύο κομμάτια της σχηματίζουν γωνία 90° .
- Γ) Αν η ράβδος αρχικά βρισκόταν σε μεγαλύτερο του αρχικού ύψους θα άλλαζε η τελική κατάσταση ισορροπίας αν η κρούση των δύο κομματιών ήταν τώρα πλαστική;

Δίνεται $\eta_{45^\circ}=0,7$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση της ράβδου θα έχουμε

$M.g.(H+l/4)=E_{\min} + Q_{\text{κρ}}$ άρα μετά από πράξεις $Q_{\text{κρ}}=10\text{J}$



Β) Για να σχηματίσουν τα δύο κομμάτια της ράβδου γωνία 90° θα πρέπει το κάθε κομμάτι να έχει διαγράψει γωνία 45° δηλαδή η ράβδος να έχει λυγίσει κατά την μισή της της τελικής της γωνίας. Έτσι με τη βοήθεια και πάλι της ΑΔΕ

$$M \cdot g \cdot (H + L \sin 45^\circ / 4) = E_{\text{kin}} / 2 + Q_{\text{kr}} + K \quad \text{άρα μετά τις πράξεις } K = 1 \text{ J}$$

Γ) Αν το αρχικό ύψος ήταν μεγαλύτερο του αρχικού τα δύο κομμάτια της ράβδου θα έφταναν ταυτόχρονα στην ίδια κατακόρυφη θέση έχοντας ίσες κατά μέτρο γωνιακές ταχύτητες αλλά αντίθετης φοράς. Έτσι μετά την πλαστική κρούση των δύο ράβδων με την βοήθεια της ΑΔΣ

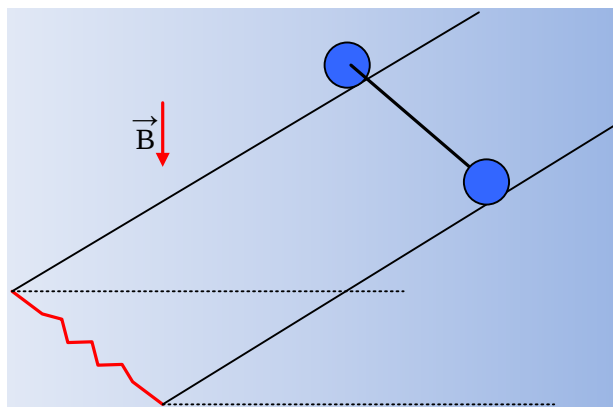
$$I_1 \cdot \omega_1 - I_2 \cdot \omega_2 = (I_1 + I_2) \cdot \omega_{\text{συσ}}$$

και επειδή

$$I_1 = I_2 \text{ και } I \omega_1 = I \omega_2 \text{ το } \omega_{\text{συσ}} = 0 \text{ r/sec.}$$

Το $\Sigma \tau = 0$ και $\Sigma F = 0$ άρα το σύστημα θα ισορροπούσε στην τελική κατακόρυφη θέση.

Κύλιση σε Μαγνητικό πεδίο.



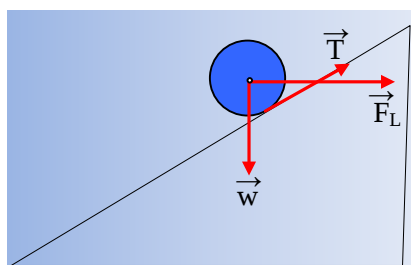
Το παραπάνω σχήμα αποτελείται από δύο αγωγίμους χωρίς αντίσταση ομογενείς λεπτότατους δίσκους μάζας $m=1\text{Kg}$ και ακτίνας R που συνδέονται μεταξύ τους με λεπτότατη αγωγίμη οριζόντια ράβδο χωρίς αντίσταση μήκους $L=1\text{m}$ που διέρχεται από το κέντρο των δύο δίσκων και είναι συγκολλημένο με αυτό. Το όλο σύστημα μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε δύο αμελητέας ωμικής αντίστασης ασφάλινα άκαμπτα σύρματα που σχηματίζουν γωνία κλίσης $\varphi=30^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο και στο κάτω άκρο τους είναι συνδεδεμένα με ωμική αντίσταση $R_1=3\Omega$. Το όλο σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B=1\text{T}$. Αν το μήκος των άκαμπτων συρμάτων είναι αρκετά μεγάλο και το σύστημα αφεθεί ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα να βρεθούν:

- A) Το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει το σύστημα
- B) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος
- Γ) Ο τελικός ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας του συστήματος

Για τον κάθε δίσκο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} mR^2$. Να υποθεθεί ότι οι δύο λεπτοί δίσκοι βρίσκονται εκτός μαγνητικού πεδίου.

Απάντηση:

A) Η παράλληλη συνιστώσα του βάρους προς το κεκλιμένο επίπεδο επιταχύνει το σύστημα μεταφορικά ενώ οι δύο στατικές τριβές στα δύο άκαμπτα σύρματα επιταχύνουν στροφικά το σύστημα. Έτσι το σύστημα αρχίζει να κατέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο. Η κίνηση αυτή δημιουργεί ΗΕΔ από επαγωγή στα άκρα της ράβδου με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί επαγωγικό ρεύμα και άρα δύναμη Laplace στην κινούμενη ράβδο.



Για την μεταφορική κίνηση του συστήματος

$$M_{ολ}g\eta\mu\phi - 2T - BIL\sigma\upsilon\nu\phi = M_{ολ}a \quad (1)$$

Για την στροφοική κίνηση του συστήματος

$$2TR = \frac{1}{2} M_{ολ}R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα θα δίνεται από τη σχέση

$$I = B\sigma\upsilon\nu\phi \cdot \upsilon L / R_{ολ} \quad (3)$$

Με την βοήθεια των σχέσεων (1),(2) και (3) θα καταλήξουμε

$$M_{ολ}g\eta\mu\phi - B^2\sigma\upsilon\nu^2\phi \cdot \upsilon L^2 / R_{ολ} = 1,5M_{ολ}a \quad (4)$$

Αρα κίνηση του συστήματος είναι επιταχυνόμενη μεταφορική και στροφοική με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Έτσι το σύστημα τελικά θα εκτελέσει ομαλή στροφοική και ομαλή μεταφορική κίνηση.

Β)Την μέγιστη κινητική ενέργεια το σύστημα θα την αποκτήσει όταν $a=0$. Με την βοήθεια της σχέσης (4) θα έχουμε $U_{op}=40m/s$.

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι $K_{ολ} = \frac{1}{2} M_{ολ}\upsilon^2 + \frac{1}{2} I_{ολ}\omega^2 = 2400J$

Γ) Μετά την απόκτηση της οριακής ταχύτητας του συστήματος όλη η δυναμική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα στην ωμική αντίσταση. Έτσι

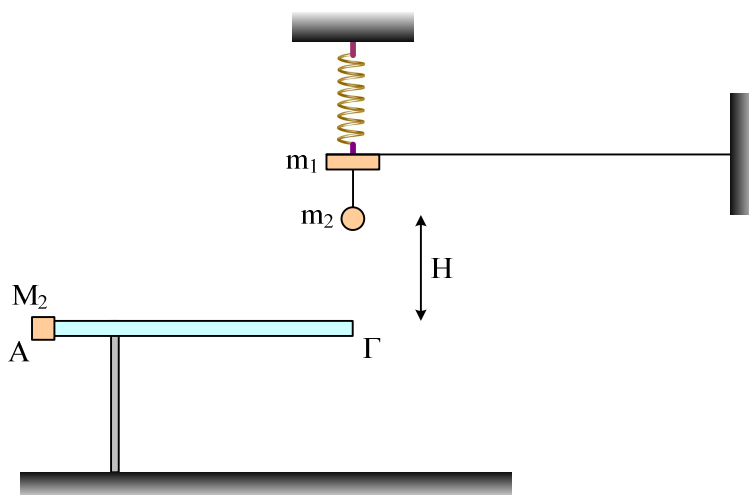
$$\Delta U_B / \Delta t = P_R = I^2 R = 400W$$

Η παραπάνω άσκηση ξεκίνησε από εδώ : http://ylikonet.blogspot.com/2010/02/blog-post_7503.html

Σκαλίζοντάς την δεν μου άρεσε ο χρόνος που έγινε η κρούση σε σχέση με την αντίστοιχη στιγμή που έστειλε η πηγή των κυμάτων το αντίστοιχο κύμα. Πρέπει λοιπόν, αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς στην περίπτωση που η **πηγή επιταχύνεται** στο φαινόμενο Doppler να γνωρίζουμε την ταχύτητα της πηγής την στιγμή που εκπέμπει το κύμα και όχι όταν αυτό έχει φτάσει στον ανιχνευτή. Βέβαια στην συγκεκριμένη άσκηση το τελικό αποτέλεσμα δεν διαφέρει και πολύ από το αρχικό αποτέλεσμα γιατί οι αποστάσεις είναι σχετικά μικρές.

Μια πραγματικά σύνθετη άσκηση για καθηγητές

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα $M=2\text{kg}$ και μήκος $L=6\text{m}$ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια καρφιού που βρίσκεται σε απόσταση $l=2\text{m}$ από το ένα της άκρο της Α. Στο άκρο Α υπάρχει κολλημένο πάνω στη ράβδο σώμα μάζας M_2 .



Πάνω στην ίδια κατακόρυφο με την άλλη άκρη Γ της ράβδου υπάρχει κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=200\pi^2\text{N/m}$ με την πάνω άκρη του στερεωμένη. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σώμα μάζας $m_1=0,5\text{kg}$ στο άκρο του οποίου είναι δεμένη οριζόντια ελαστική χορδή πάνω στην οποία μπορεί να διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα $U=2\text{ m/sec}$. Μέσω ενός δεύτερου κατακόρυφου νήματος με ελάχιστο μήκος το σώμα μάζας m_1 συνδέεται με δεύτερο σώμα μάζας $m_2=0,5\text{kg}$. Το

σώμα μάζας m_2 απέχει κατακόρυφη απόσταση από το άκρο Γ της ράβδου ύψος $H=1,25\text{m}$. Στο σώμα μάζας m_1 υπάρχει ηχητική πηγή αρμονικών ήχων συχνότητας $f_s=680\text{Hz}$ ενώ στο σώμα μάζας m_2 υπάρχει ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων. Κάποια στιγμή το κατακόρυφο νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_2 συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο. Να βρεθούν:

A) Η μάζα M_2

B) Να βρεθεί η εξίσωση που περιγράφει την συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο σώμα μάζας m_2 μέχρι την στιγμή που αυτή συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο και να βρεθεί η συχνότητα του ανιχνευτή ελάχιστα πριν την κρούση.

Γ) Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση

Δ) Η μορφή της οριζόντιας ελαστικής χορδής την στιγμή που γίνεται η πλαστική κρούση.

Δίνεται για την ράβδο $I_{cm}=1/12 M.L^2$ η ταχύτητα του ήχου $U_{\eta\chi}=340\text{m/sec}$ το $g=10\text{m/sec}^2$ και $\pi^2=10$. Όλα τα σώματα εκτός της ράβδου να θεωρηθούν σημειακά.

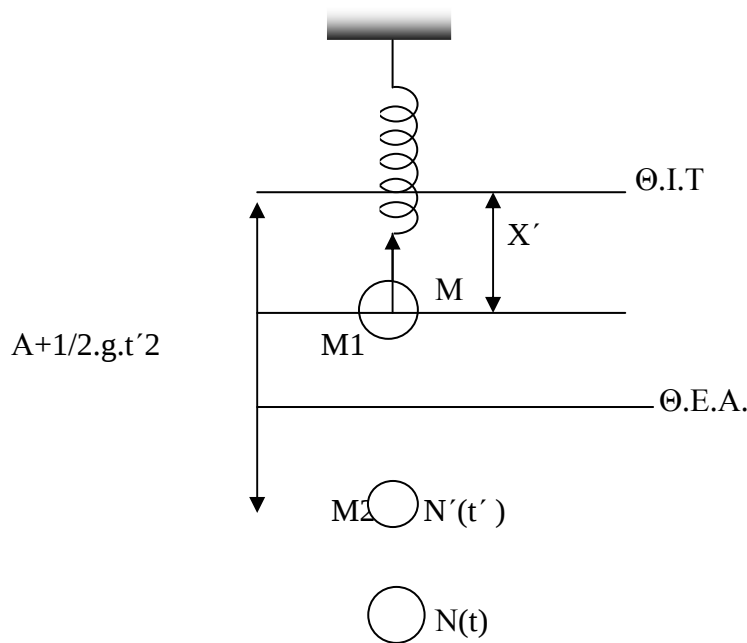
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για να ισορροπεί η ράβδος θα ισχύει η σχέση ισορροπίας $\Sigma\tau(O)=0$ άρα $-M.g.(L/2 - l) + M_2.g.l=0$ άρα $M_2=1\text{kg}$.

B) Για την ισορροπία των σωμάτων m_1 - m_2 με το ελατήριο θα ισχύει $(m_1+m_2).g=Kx_1$ άρα $x_1=1/200\text{ m}$ ενώ μετά το κόψιμο του νήματος θα ισχύει για την ισορροπία του σώματος m_1 $m_1.g=Kx_2$ άρα $x_2=1/400\text{ m}$. Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα m_1 δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης της και αν υποθέσουμε ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω θα βρίσκεται στην ΘΕΑ. Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A=x_1-x_2=1/400\text{ m}$ και η εξίσωση της ταχύτητας θα δίνεται από την σχέση $u=\pi/20 \sin(20\pi t+3\pi/2)$ (S.I)

Το σώμα m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση μέχρι να χτυπήσει την ράβδο. Ο χρόνος που θα χρειασθεί το σώμα m_2 για να χτυπήσει την ράβδο θα βρεθεί από την σχέση

$H=1/2 g.t^2$ άρα $t=0,5\text{sec}$. Έτσι η ταχύτητα του σώματος m_2 θα δίνεται από την σχέση $V=10.t$ $t<0,5\text{sec}$.



Θεωρούμε σαν αρχή μέτρησης των αποστάσεων τη Θ.Ι.Τ. της μάζας m_1 .

Θεωρώ t' τη χρονική στιγμή που η μάζα m_1 βρίσκεται στη θέση M εκπέμπει ηχητικό κύμα και έστω ότι εκείνη την στιγμή ο ανιχνευτής του κύματος βρίσκεται στη θέση N' . Το κύμα αυτό θα φτάσει στον ανιχνευτή την χρονική στιγμή t όταν αυτός βρίσκεται στην θέση N . Σε χρόνο $t-t'$ το ηχητικό κύμα έχει διανύσει απόσταση $MN = U_{\eta\chi}(t-t')$ (1)

$$MN = MN' + N'N \quad (2)$$

$$MN' = A + \frac{1}{2}gt'^2 - X' \quad (3)$$

$$N'N = A + \frac{1}{2}gt^2 - A - \frac{1}{2}gt'^2 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt'^2 \quad (4)$$

Από τις (1), (2), (3) και (4)

$$U_{\eta\chi}(t-t') = A + \frac{1}{2}gt'^2 - X' + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt'^2$$

$$U_{\eta\chi}(t-t') = A - A\eta\mu(\omega t' + 3\pi/2) + \frac{1}{2}gt^2$$

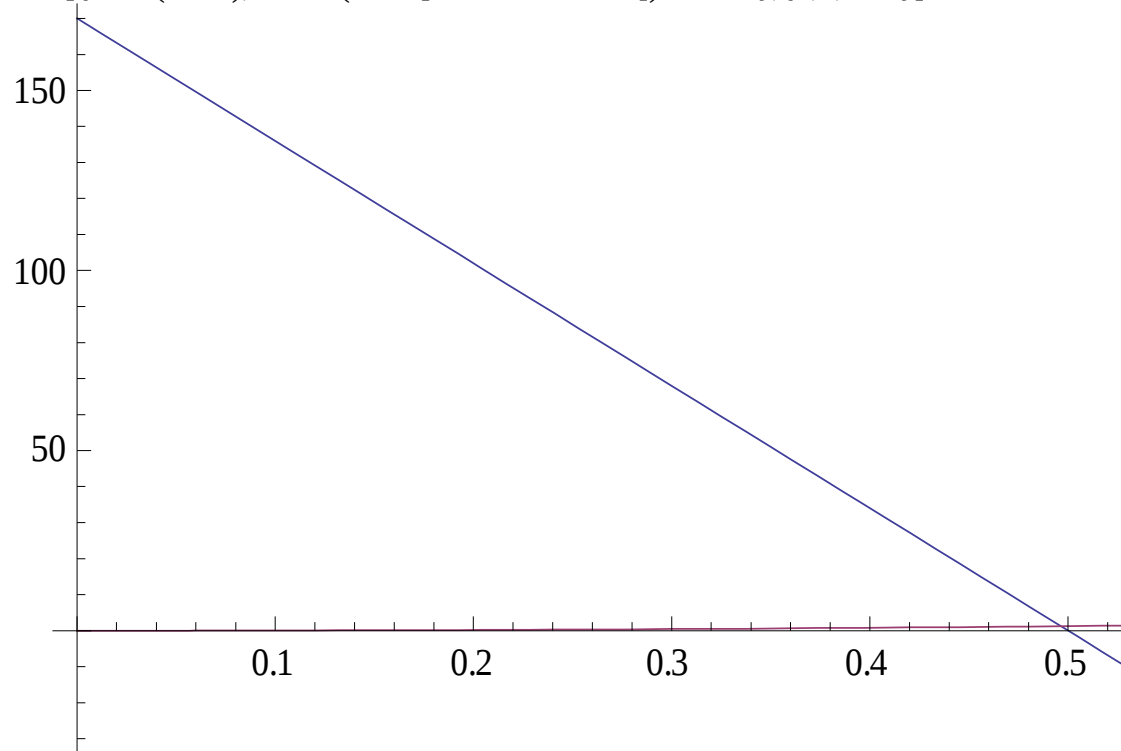
Και με αντικατάσταση θα προκύψει η εξίσωση

$$340(0,5-t') = \frac{1}{400} - \frac{1}{400} \cdot \eta\mu(20\pi t' + 3\pi/2) + 1,25 \quad (S.I)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να λυθεί μόνο γραφικά με την βοήθεια του προγράμματος mathematica

Η λύση μέσω του προγράμματος mathematica βγαίνει με την βοήθεια των δύο γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\psi_1=340(0,5-t')$ και $\psi_2=1/400 - 1/400 \cdot \eta\mu(20\pi t' + 3\pi/2) + 1,25$. Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι το σημείο τομής των καμπυλών βρίσκεται κοντά στην περιοχή του 0,5 sec. Αν εμείς δώσουμε την περιοχή της λύσης κοντά στο 0,5sec το πρόγραμμα μας δίνει τη λύση $t'=0,496362\text{sec}$.

`Plot[{340*(0.5-x),1/400*(1-Sin[20*Pi*x+3*Pi/2])+5*x^2},{x,0,0.59}]`



`FindRoot[340*(0.5-x)==1/400*(1-Sin[20*Pi*x+3*Pi/2])+5*x^2,{x,0.5}]`
`{x→0.496362}`

Από την σχέση για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε

$$F_{\text{αν}} = (U_{\text{ηχ}} - V) \cdot F_s / (U_{\text{ηχ}} + u) = (340 - 10t)680 / \{340 + \pi/20 \sin(20\pi t' + 3\pi/2)\} \quad (\text{S.I.}) \quad (5)$$

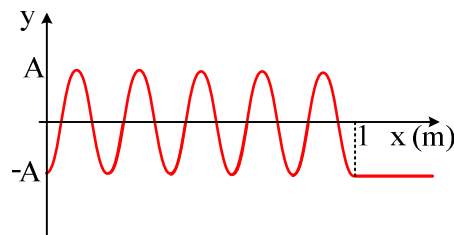
Η κρούση θα συμβεί την στιγμή $t=0,5\text{sec}$ άρα η συχνότητα θα είναι $F_{αν}\approx 670\text{Hz}$.

Γ) Για την κρούση του m_2 με την ράβδο θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ

$$m_2 \cdot V \cdot (L-l) = I_0 \lambda \cdot \omega \text{ συστ (2)}$$

Το $I_0 \lambda = 1/12 \cdot M \cdot L^2 + M \cdot (L/2 - l)^2 + M_2 \cdot l^2 + m_2 \cdot (L-l)^2 = 20\text{kg} \cdot \text{m}^2$ άρα με αντικατάσταση στη σχέση (2) $\omega \text{ συστ} = 0,5\text{r/sec}$

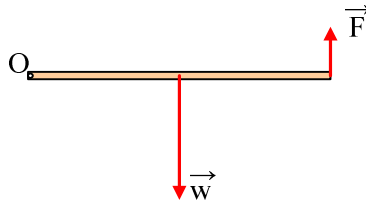
Δ) Το σώμα m_1 μετά το κόψιμο του νήματος θα γίνει η πηγή κύματος που θα διαδοθεί στην οριζόντια ελαστική χορδή. Ο χρόνος $t=0,5\text{sec}$ αντιστοιχεί σε $5T$ άρα το κύμα έχει διαδοθεί στην χορδή 5λ . Από την σχέση $U = \lambda \cdot f$ άρα $\lambda = 0,2\text{m}$. Άρα το σχήμα της χορδής θα είναι



Και αν αφαιρεθεί το καρφί;

Μια λύση με την βοήθεια του προγράμματος mathematica

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μάζας $M=3\text{Kg}$ και μήκους $L=1\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο καρφί O που βρίσκεται στο ένα του άκρο όπως στο παρακάτω σχήμα



Στο άλλο άκρο της ράβδου ασκείται μεταβλητή δύναμη F κάθετη πάντα στην ράβδο της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση $F=112\theta/\pi^2$ (S.I.) όπου θ η γωνία που θα διαγράψει η ράβδος σε σχέση με την αρχική οριζόντια θέση. Αν η ράβδος αφεθεί ελεύθερη από την οριζόντια θέση να βρεθούν:

A) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν η ράβδος έχει διαγράψει γωνία 90° σε σχέση με την αρχική της θέση.

B) Ποια η γωνία για την οποία η ράβδος έχει αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια για πρώτη φορά μετά την εκκίνησή της.

Την στιγμή $t=0$ που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη η δύναμη F καταργείται και αφαιρείται ακαριαία το οριζόντιο καρφί που βρίσκεται στο σημείο O .

Γ) Πόση είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου μετά την αφαίρεση του καρφιού.

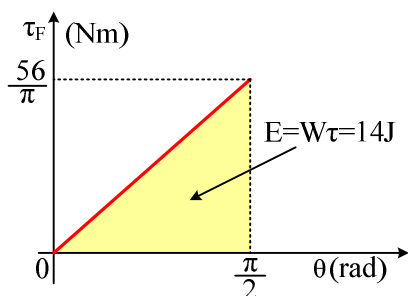
Δ) Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει η ράβδος και πόση η συνολική του κινητική ενέργεια την στιγμή $t=1\text{sec}$.

Για την ράβδο $I_{cm}=1/12 \cdot M \cdot L^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Με την βοήθεια της ADE για την αρχική θέση και την τελική θέση της ράβδου θα έχουμε

$W_w - W_F = K_{\text{τελ}}$ (1) το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί με την βοήθεια του εμβαδού μιας και η δύναμη είναι μεταβλητή



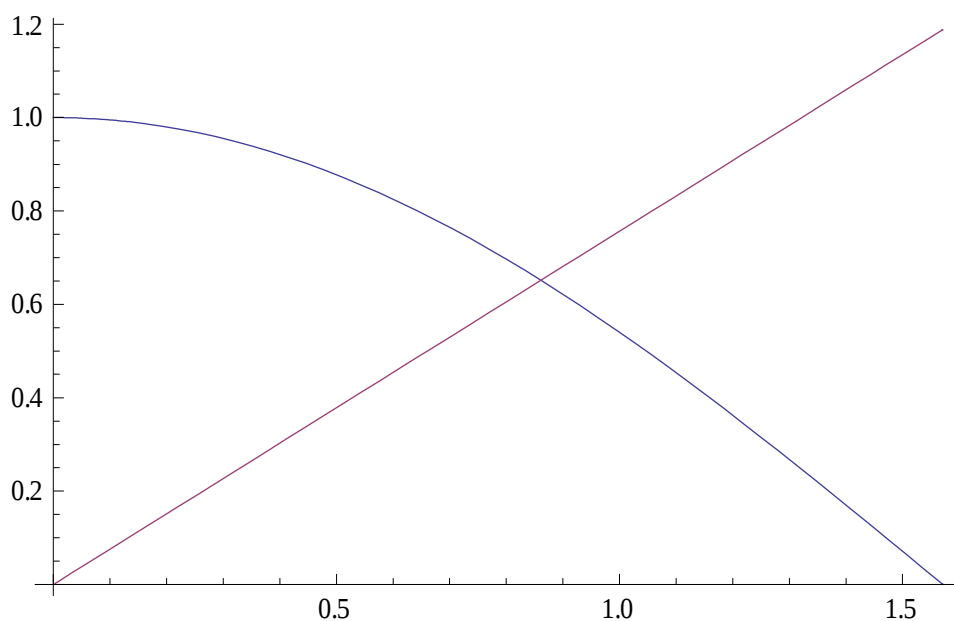
Από την (1) θα βρούμε $M \cdot g \cdot L/2 - W_F = K_{\text{τελ}}$ άρα $K_{\text{τελ}} = 1\text{J}$ άρα $\omega_1 = \sqrt{2}r/\text{sec}$.

Β) Για την κίνηση της ράβδου όσο η ροπή του βάρους της είναι μεγαλύτερη από τη ροπή της εξωτερικής δύναμης F τόσο θα αυξάνει η κινητική ενέργεια της ράβδου. Η ροπή του βάρους μειώνεται αφού μειώνεται το απόστημα της ενώ η ροπή της εξωτερικής δύναμης λόγω της μορφής της δύναμης αυξάνει συνεχώς. Έτσι κάποια στιγμή οι δύο ροπές θα γίνουν ίσες. Τότε η ράβδος θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια.

$$M \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta/2 - 112\theta \cdot L/\pi^2 = 0 \text{ άρα } \sin\theta/\theta = 112/15 \cdot \pi^2$$

Με την βοήθεια του προγράμματος mathematica

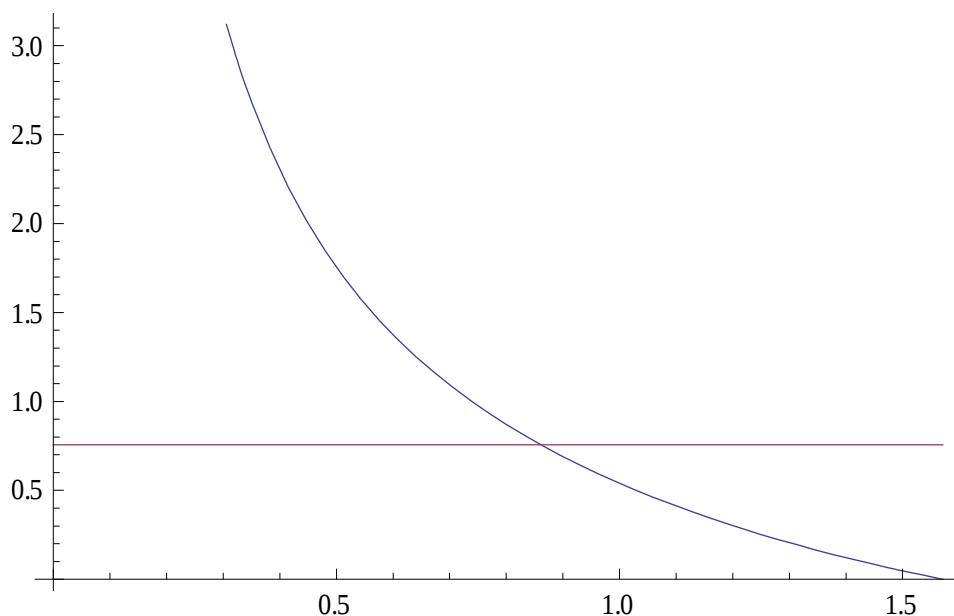
`Plot[{Cos[x],(112 x)/(15 π2)},{x,0,π/2}]`



`FindRoot[Cos[x]==(112 x)/(15 π2),{x,0.7}]`

{x→0.861202}

Plot[{Cos[x]/x,112/(15 π2)},{x,0,π/2}]



FindRoot[Cos[x]/x==112/(15 π2),{x,0.6}]

{x→0.861202}

Αρα όταν η ράβδος καλύψει γωνία $\theta=0,861202\text{rad}$ θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια

Γ) Κατά το πολύ μικρό χρόνο Δt που αφαιρείται το καρφί η στροφορμή της ράβδου ως προς το άκρο της Ο διατηρείται, γιατί η ροπή του βάρους της και της δύναμης από το καρφί ως προς το σημείο αυτό είναι μηδενική. Από αυτό θα προκύψει ότι η γωνιακή ταχύτητα ω_1 της ράβδου ως προς το Ο λίγο πριν την αφαίρεση του καρφιού είναι ίση με την αντίστοιχη γωνιακή της ταχύτητα ω_2 αμέσως μετά την αφαίρεση, δηλαδή $\omega_1=\omega_2$.

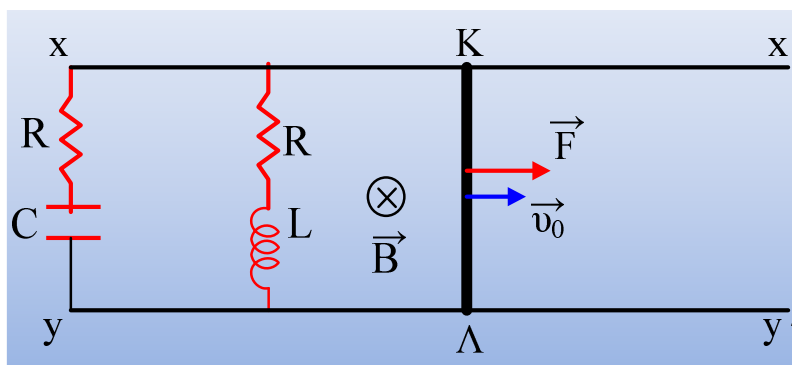
Δ) Η κίνηση της ράβδου μετά την αφαίρεση του καρφιού είναι σύνθετη και αποτελείται από μία ομαλή στροφική με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_2 και μία οριζόντια βολή για το κέντρο μάζας της ράβδου με αρχική ταχύτητα $U_{cm}=\omega_2.L/2=\sqrt{2}/2 \text{ m/sec}$ εξαιτίας της δύναμης του βάρους. Η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου μάζας θα δίνεται από την σχέση $H=1/2.g.t^2=5\text{m}$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση μετά την αφαίρεση του καρφιού μέχρι και την στιγμή $t=1\text{sec}$ θα έχουμε

$K_{\text{αρχ}} + W_w = K_{\text{τελ}}$ άρα $K_{\text{τελ}} = 151\text{J}$

Ένα χρονοκύκλωμα

Δύο άπειροι αγωγοί $x x'$ και $\psi \psi'$ χωρίς αντίσταση είναι παράλληλα τοποθετημένοι μεταξύ τους και κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=1\text{T}$ και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $L=1\text{m}$. Αγωγός ΚΛ αμελητέας εσωτερικής αντίστασης και μήκους $L=1\text{m}$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στους άπειρους αγωγούς με ταχύτητα παράλληλη σε αυτούς τους αγωγούς. Στα άκρα $\chi\psi$ συνδέουμε σε σειρά μία ωμική αντίσταση R και ιδανικό πυκνωτή χωρητικότητας C . Σε μία θέση λίγο πιο πέρα συνδέουμε μία όμοια ωμική αντίσταση R και ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Τη χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε τον αγωγό ΚΛ με αρχική ταχύτητα $U_0=10\text{ m/s}$ και ταυτόχρονα ασκούμε σταθερή δύναμη $F=1\text{ N}$. Παρατηρούμε ότι ο αγωγός ΚΛ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Να βρεθούν:

Α) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ .

Β) Την σχέση που πρέπει να συνδέουν την ωμική αντίσταση των αντιστατών του κυκλώματος με την χωρητικότητα του πυκνωτή και τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου για να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ο αγωγός ΚΛ.

Γ) Αν η μάζα του αγωγού ΚΛ είναι $m=1\text{Kg}$ και ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι $L=1\text{H}$ και μετά από αρκετό χρονικό διάστημα η δύναμη F καταργηθεί να βρεθεί η συνολική θερμότητα που θα παραχθεί στο κύκλωμα μετά την κατάργηση της δύναμης F .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Ο αγωγός κινείται με σταθερή ταχύτητα άρα η επαγωγική τάση στα άκρα του είναι σταθερή και ίση με $\mathcal{E}_{\text{επ}} = B U_0 L = 10\text{V}$

Η κίνηση του αγωγού είναι ομαλή άρα θα πρέπει το $\Sigma F = 0$ άρα $F = F_L$ άρα $1 = B I_{\text{ολ}} L$ άρα $I_{\text{ολ}} = 1\text{A}$.

Β) Με την βοήθεια του δεύτερου κανόνα του Κίρκωφ θα έχουμε

$$BU_0L - V_C - I_1R = 0 \quad \text{ή} \quad BU_0L - Q_1/C - dQ_1/dt = 0 \quad (1)$$

$$BU_0L - V_L - I_2R = 0 \quad \text{ή} \quad BU_0L - L di_2/dt - I_2R = 0 \quad (2)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) θα δώσει $i_1 = BU_0Le^{-t/RC}/R = 1/R e^{-t/RC}$ (SI)

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα δώσει $i_2 = (1 - BU_0L/R)e^{-tL/R} = 1 - 1/R e^{-Rt/L}$ (SI)

$$I_{o\lambda} = i_1 + i_2 \quad \text{άρα} \quad 1 = 1/R e^{-t/RC} + 1 - 1/R e^{-Rt/L} \quad (3)$$

Για να ισχύει η σχέση (3) θα πρέπει $t/RC = tR/L$ άρα $R^2 = L/C$ (4)

Γ) Τελικά τα κυκλώματα έχουν αποκατασταθεί με τελικό ρεύμα που διαρρέει το πηνίο $i_2 = i_{o\lambda} = 1A$. Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με τάση $V_{cmax} = BU_0L = 10V$.

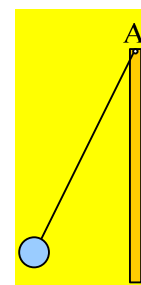
$i_{2τελ} = BU_0L/R$ άρα $R = 10\Omega$. Με την βοήθεια της σχέσης (4) $C = 1/100 F$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κατάσταση του κυκλώματος την στιγμή που καταργείται η δύναμη θα έχουμε

$$K + U_B + U_E = Q_{o\lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mU_0^2 + \frac{1}{2}Li_{2τελ}^2 + \frac{1}{2}CV_{cmax}^2 \quad \text{μετά από πράξεις θα βρούμε } Q_{o\lambda} = 51J$$

Μισό-μισό.

Ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M είναι αναρτημένη από οριζόντιο άξονα A , γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστραφεί από κατακόρυφο επίπεδο. Στον ίδιο άξονα A είναι δεμένο αβαρές νήμα με το ίδιο μήκος l , στο άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σφαιρίδιο μάζας m . Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και το σφαιρίδιο βρίσκεται σε πολύ μικρό ύψος h πάνω από το κατώτερο σημείο της ράβδου. Στη συνέχεια το σφαιρίδιο αφήνεται ελεύθερο και προσκρούει στο άκρο της ράβδου και συγκρούεται με αυτή ελαστικά. Μετά την κρούση το σφαιρίδιο ακινητοποιείται. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.



Α) Ποια η σχέση των μαζών του σφαιριδίου και της ράβδου για επαναλαμβάνεται το γεγονός αυτό περιοδικά;

Β) Ποια η περίοδος του παραπάνω φαινομένου.

Δίνεται για την ράβδο $I_A = \frac{1}{3} ML^2$

Απάντηση:

Α) Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την κρούση μπαλακίου-ράβδου θα έχουμε

$$mvL = I\omega \quad (1)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ πριν και μετά την κρούση

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2)$$

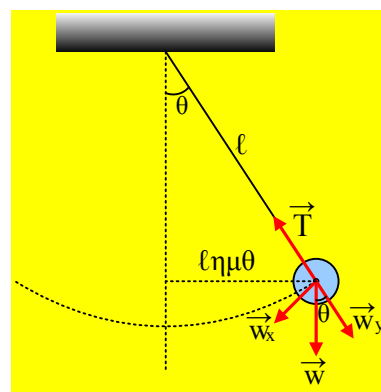
από τις (1) και (2) θα προκύψει $M = 3m$

Β) Για το εκκρεμές μπορούμε να πούμε

$$\Sigma F = w_x = -mg \sin \theta$$

Για μικρές γωνίες : $\Sigma F = -\frac{mg}{\ell} x$, όπου $x = L \cdot \eta \mu \theta = L \cdot \theta$

Η περίοδος είναι : $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

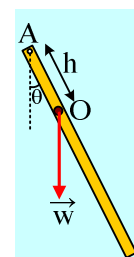


Η ροπή μιας στοιχειώδους μάζας m στο σημείο O είναι : $\tau = -mgh \eta \mu \theta$

Με αντικατάσταση στο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgh \eta \mu \theta$$

Για μικρές γωνίες έχουμε:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0,$$

που ταυτίζεται με την εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή όπου,

$$\theta = \theta_{\max}\sin(\omega t + \varphi),$$

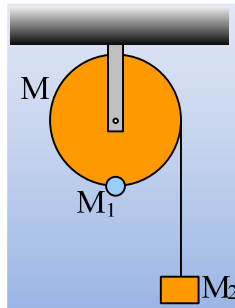
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Στην περίπτωση μας το σύστημα εκτελεί μισή ταλάντωση εκκρεμούς και μισή ταλάντωση φυσικού εκκρεμούς άρα η περίοδος του θα είναι

$$T = \frac{1}{2} T_1 + \frac{1}{2} T_2 = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Τροχαλία στόκος και ταλάντωση.

Μία τροχαλία μάζας $M=2\text{Kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα. Στο χαμηλότερο σημείο της τροχαλίας είναι κολλημένο σημειακό σώμα μάζας M_1 . Μέσω κατακόρυφου μη εκτατού νήματος που είναι περασμένο στην τροχαλία είναι δεμένο σώμα μάζας $M_2=1\text{kg}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα με το νήμα τεντωμένο και κατακόρυφο. Να βρεθούν:

- A) Η σχέση που πρέπει να έχουν οι μάζες M_2 και M_1 για να μπορέσει τελικά το σώμα μάζας M_1 να διαγράψει γωνία $\theta=90^\circ$ μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.
- B) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του συστήματος. Το σώμα μάζας M_2 εκτελεί γ.α.τ.;
- Γ) Να εκφράσετε την ταχύτητα του σώματος με μάζα M_2 σε συνάρτηση με την μετατόπισή της.
- Για την τροχαλία δίνεται $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Με τη βοήθεια του ΑΔΕ για την μετακίνηση του συστήματος από την αρχική στην τελική του θέση θα έχουμε:

$$U_2=U_1 \text{ δηλαδή } M_2 g \pi R/2 = M_1 g R \text{ άρα } M_1 = M_2 \pi/2 \text{ άρα } M_1 = \pi/2 \text{ Kg.}$$

B) Για το σώμα μάζας M_2 : $M_2 g - T_1 = M_2 a$ (1)

$$\text{Για την τροχαλία } T_1 R - M_1 g R \sin \theta = (0,5 M R^2 + M_1 R^2) a/R \text{ ή } T_1 - M_1 g \sin \theta = (0,5 M + M_1) a \quad (2)$$

$$\text{Όμως το } x = R\theta \quad (3)$$

$$\text{Από (1) και (2) \& (3) } M_2 g - M_2 a - M_1 g \sin x/R = (0,5 M + M_1) a \text{ άρα}$$

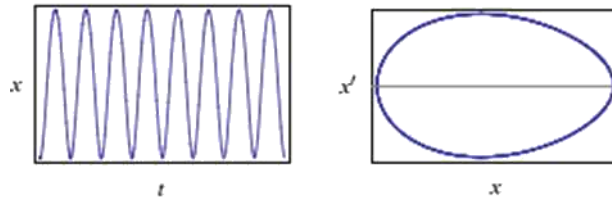
$$M_2 g - M_2 \pi/2 g \sin x/R = (0,5 M + M_2 + M_2 \pi/2) a$$

που με αντικατάσταση των δεδομένων θα καταλήξουμε στη διαφορική εξίσωση

$$10 - 5\pi \cdot \sin x = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Με τη βοήθεια του mathematica μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις.

$$\left\{ 10 - 5\pi \sin(x(t)) = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x''(t), x(0) = 0, x'(0) = 0 \right\}$$



Όπως προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση αλλά και από τις γραφικές παραστάσεις η κίνηση του σώματος δεν είναι γ.α.τ. αλλά είναι περιοδική κίνηση.

Γ) Η σχέση $10 - 5\pi \cdot \eta\mu x = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$ μπορεί να γραφεί

$$10 - 5\pi \cdot \eta\mu x = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$10 - 5\pi \cdot \eta\mu x = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{ή}$$

$$(10 - 5\pi \cdot \eta\mu x) dx = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot v dv$$

και με ολοκλήρωση θα πάρουμε

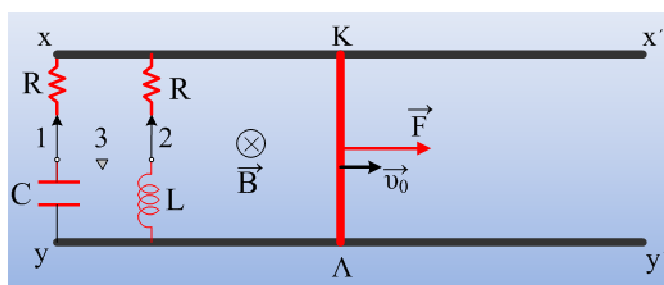
$$10x - 5\pi \cdot \sigma\upsilon\nu x = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{v^2}{2} + C_1.$$

Από τις αρχικές συνθήκες $x=0$ $v=0$ θα βρούμε $C_1=5\pi$ έτσι η γενική σχέση που δίνει τη ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με την μετατόπιση θα είναι

$$\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) v^2 = 10x - 5\pi(1 - \sigma\upsilon\nu x)$$

Χρονοκύκλωμα με κατάληξη LC

Δύο άπειροι αγωγοί $x\chi'$ και $\psi\psi'$ χωρίς αντίσταση είναι παράλληλα τοποθετημένοι μεταξύ τους και κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=1\text{T}$ και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $L=1\text{m}$. Αγωγός ΚΛ αμελητέας εσωτερικής αντίστασης και μήκους $L=1\text{m}$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στους άπειρους αγωγούς με ταχύτητα παράλληλη σε αυτούς τους αγωγούς. Στα άκρα $\chi\psi$ συνδέουμε σε σειρά μία ωμική αντίσταση $R=10\Omega$ και ιδανικό πυκνωτή χωρητικότητας $C=10^{-2}\text{F}$. Σε μία θέση λίγο πιο πέρα συνδέουμε μία όμοια ωμική αντίσταση $R=10\Omega$ και ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L=1\text{H}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Ο πυκνωτής και το πηνίο συνδέονται μέσω των μεταγωγών (1) και (2) που μπορούν να μεταφερθούν αυτόματα στην θέση (3).

Τη χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε τον αγωγό ΚΛ με αρχική ταχύτητα $U_0=10\text{ m/s}$ και ταυτόχρονα ασκούμε σταθερή δύναμη $F=1\text{ N}$.

Α) Να αποδείξετε ότι ο αγωγός θα εκτελεί ομαλή κίνηση .

Την χρονική στιγμή $t=1\text{sec}$ οι μεταγωγοί (1) και (2) μεταφέρονται στην θέση (3) αυτόματα και χωρίς απώλεια ενέργειας και εκείνη την στιγμή καταργείται η δύναμη F .

Β) Να βρεθεί τι ποσοστό του έργου της δύναμης έγινε θερμότητα πάνω στις αντιστάσεις.

Γ) Ποια η ολική ενέργεια του κυκλώματος LC που δημιουργηθεί μετά την μεταφορά των μεταγωγών στη θέση (3)

Δ) Να γίνει ποιοτικά η γραφική παράσταση του φορτίου του πυκνωτή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Με την βοήθεια του δεύτερου κανόνα του Κίρκωφ θα έχουμε και με την υπόθεση ότι η ταχύτητα του αγωγού θα είναι σταθερή θα έχουμε

$$BUL - V_C - I_1 R = 0 \quad \text{ή} \quad BUL - Q_1 / C - dQ_1 / dt = 0 \quad (1)$$

$$BUL - V_L - I_2 R = 0 \quad \text{ή} \quad BUL - L di_2 / dt - I_2 R = 0 \quad (2)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) θα δώσει $I_1 = \frac{BvL}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3)$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα δώσει $I_2 = \left(1 - \frac{BvL}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4)$

$I_{ολ} = I_1 + I_2$ και με την βοήθεια των (3) και (4) $I_{ολ} = 1A$.

Άρα η $FL = BI_{ολ}L = 1A$ άρα $\Sigma F = 0$ άρα η κίνηση του αγωγού είναι ομαλή.

Β) Για να αποκατασταθεί το κάθε χρονοκύκλωμα θέλει περίπου χρόνο $t_{αποκ} = 5RC = 0,5sec$.

Άρα μετά από 1sec τα χρονοκυκλώματα έχουν αποκατασταθεί.

Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με τάση $V_{cmax} = BU_oL = 10V$ και το πηνίο διαρρέεται $I_{2τελ} = \frac{Bv_oL}{R} = 1A$.

Το έργο της δύναμης είναι $WF = F \cdot x = FU_o \cdot t = 10J$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$WF = U_B + U_E + Q_{ολ}$$

και μετά από πράξεις θα βρούμε $Q_{ολ} = 8J$ άρα το 80% του έργου της δύναμης έγινε θερμότητα στις ωμικές αντιστάσεις.

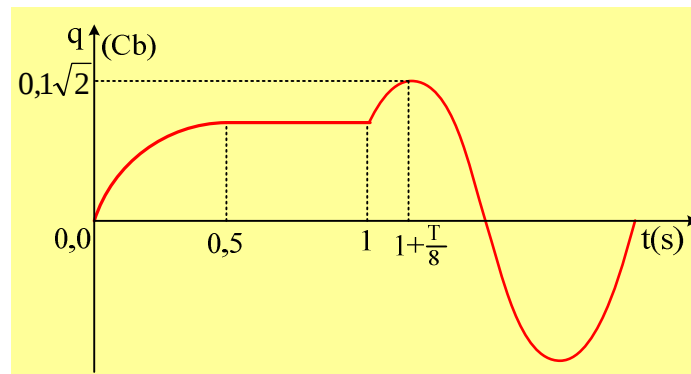
Γ) Η ολική ενέργεια του κυκλώματος είναι το άθροισμα των ενεργειών του πηνίου και του πυκνωτή εκείνη τη στιγμή

$$E_{ολ} = U_B + U_E = 1J$$

Δ) Μέχρι την χρονική στιγμή $t = 1sec$ το φορτίο του πυκνωτή ήταν $Q_1 = CV_{max} = 0,1Cb$ και το απέκτησε περίπου την χρονική στιγμή της αποκατάστασης του κυκλώματος δηλαδή περίπου στο 0,5s. Στην συνέχεια και μέχρι το 1sec το φορτίο του πυκνωτή είναι περίπου σταθερό στην τιμή Q_1 ενώ μετά την στιγμή του 1sec αρχίζει η ηλεκτρική ταλάντωση με μέγιστο φορτίο που θα βρεθεί από την σχέση της ολικής ενέργειας.

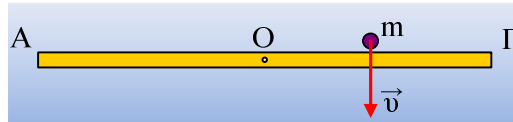
$$E_{ολ} = \frac{1}{2} Q_{max}^2 / C \quad \text{άρα} \quad Q_{max} = 0,1 \sqrt{2} C$$

Η ποιοτική γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα



Δυο κρούσεις ράβδου με σημειακή μάζα

Λεπτότατη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκος $L = \frac{3,2\sqrt{3}}{3}m$ έχει μάζα $M = \frac{9\sqrt{3}}{\pi}kg$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα Ο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου .Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια .



Σημειακό σώμα μάζας $m=1Kg$ χτυπάει κάθετα την οριζόντια ράβδο με ταχύτητα μέτρου v σε απόσταση $L/4$ από το σημείο Ο και ανακλάται στιγμιαία με νέα ταχύτητα μέτρου v' και πάλι κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω. Αν τα δύο σώματα ξανασυγκρουστούν στο άκρο Α της ράβδου ενώ το η ράβδος έχει διαγράψει γωνία θ και ενώ το σημειακό σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο να βρεθούν:

- Α) Το μέτρο της ταχύτητας v' του σημειακού σώματος μετά την πρώτη κρούση
- Β) Το μέτρο της ταχύτητας v του σημειακού σώματος την στιγμή της πρώτης κρούσης
- Γ) Το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος αμέσως μετά την δεύτερη κρούση αν μετά τη δεύτερη κρούση η ράβδος μείνει ακίνητη.

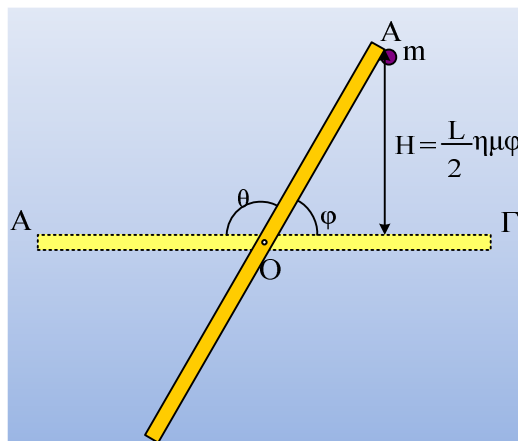
$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2.$$

Απάντηση:

- Α) Όταν η ράβδος διαγράψει γωνία θ με τη βοήθεια της παραπληρωματικής γωνίας φ θα βρούμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{L/4}{L/2} = 0,5 \quad \text{άρα η γωνία } \varphi = 60^\circ \text{ και η γωνία } \theta = 2\pi/3 \text{ rad. Το ύψος που διέγραψε το σημειακό}$$

σώμα είναι H και θα δίνεται με τη βοήθεια του σχήματος



Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σημειακού σώματος και μέχρι την κρούση του με τη ράβδο θα έχουμε

$$\frac{1}{2} m v'^2 = m g H \quad \text{θα βρούμε } v' = 4 \text{ m/s.}$$

Β) Με την βοήθεια του νόμου της ταχύτητας για το σημειακό σώμα μπορούμε να βρούμε το χρόνο ανόδου του σώματος

$$v = v' - g t_{av} \quad \text{άρα } t_{av} = 0,4 \text{ s}$$

Στον ίδιο χρόνο όμως η ράβδος διέγραψε γωνία $\theta = 2\pi/3 \text{ rad}$ εκτελώντας ομαλή στροφική κίνηση μέχρι να γίνει η σύγκρουση

$$\theta = \omega t \quad \text{άρα } \omega = 10\pi/6 \text{ r/s}$$

Επειδή η κρούση είναι στιγμιαία μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΣ για την πρώτη κρούση του σημειακού σώματος με τη ράβδο

$$L_{apx} = L_{τελ} \quad \text{ή} \quad m v L/4 = I_{cm} \omega - m v' L/4$$

και μετά από πράξεις να βρούμε $v = 12 \text{ m/s}$.

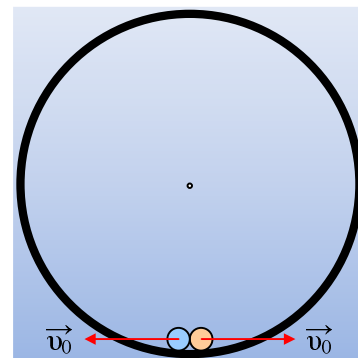
Γ) Με τη βοήθεια της ΑΔΣ για την δεύτερη κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{12} M L^2 \omega = m v'' \cdot \frac{L}{2}$$

μετά από τις πράξεις θα βρούμε $v'' = 2,5\sqrt{3} \text{ m/s}$

Δύο σφαίρες σε μια στεφάνη.

Στο εσωτερικό και στο χαμηλότερο σημείο μιας κατακόρυφης και ακλόνητης κυκλικής στεφάνης ακτίνας $R=10\text{m}$ βρίσκονται δύο μικρές ελαστικές σφαίρες ίδιας ακτίνας $r=0,1\text{m}$. Δίνουμε κατάλληλες αντίθετες οριζόντιες ταχύτητες στις δύο σφαίρες έτσι ώστε οι δύο σφαίρες να κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν στο εσωτερικό της στεφάνης και να φτάνουν ταυτόχρονα στο ανώτερο σημείο της στεφάνης εκτελώντας με ταχύτητες που θα μπορούσαν μόλις να εκτελέσουν ανακύκλωση.



Αν οι δύο σφαίρες έχουν μάζες $m_2=3m_1$ και η ακαριαία σύγκρουσή τους είναι κεντρική και ελαστική να υπολογιστούν:

- A) Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας εκτόξευσης των δύο σφαιρών
- B) Το μέτρο της ταχύτητας των σημείων επαφής των δύο σφαιρών με την κυκλική στεφάνη αμέσως μετά την σύγκρουσή τους.
- Γ) Πόσες περιστροφές θα κάνει η σφαίρα μάζας m_2 μέχρι να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης για πρώτη φορά αν υποθέσουμε ότι η σφαίρα με μάζα m_1 αφαιρεθεί από το σύστημα μετά την κρούση της με την δεύτερη σφαίρα.

Η ροπή αδράνειας της κάθε σφαίρας είναι $I_{cm}=0,4MR^2$, το $R \gg r$, $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

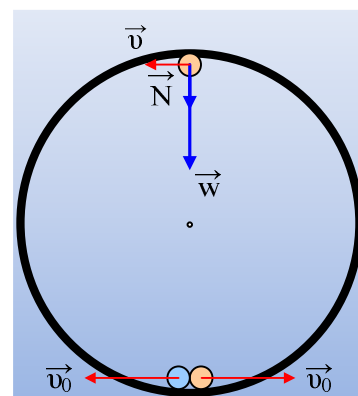
- A) Όταν η κάθε σφαίρα θα φτάσει στο ανώτερο σημείο της στεφάνης το βάρος της και αντίδραση της στεφάνης θα παίξουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης

$$Mg + N = m \frac{v^2}{R} \quad \text{όμως } N > 0 \quad \text{άρα } v_{\min} = \sqrt{gR} = 10\text{m/s}$$

Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από το χαμηλότερο σημείο στο ανώτερο θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_o^2 = \frac{1}{2} m v_{\min}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{\min}^2 + mg 2R$$

και μετά από πράξεις $v_0=19,6\text{m/s}$.



B) Η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική. Οι δυνάμεις επαφής δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή έτσι η γωνιακή ταχύτητα των δύο σφαιρών δεν μπορεί να αλλάξει εξαιτίας της κρούσης. Για τις ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών μπορούμε να πάρουμε του γνωστούς τύπους της ελαστικής κρούσης. Έτσι

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (-v) = -20 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} (-v) = 0 \text{ m/s}$$

Έτσι τα σημεία επαφής των δύο σφαιρών με τη στεφάνη θα έχουν μέτρα ταχυτήτων

$$v_{ολ1} = v_1' + v_{περ} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_{ολ2} = v_{περ} = 10 \text{ m/s}$$

Γ) Μέχρι να γίνει η κρούση η σφαίρα μάζας m_2 έχει διαγράψει κυλιόμενη μήκος πR άρα έχει κάνει $N_1 = \pi R / 2\pi r = 50$ περιστροφές.

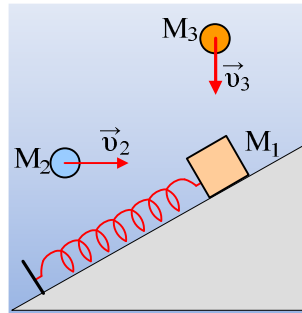
Μετά την κρούση το κέντρο μάζας της σφαίρας m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση. Έτσι από το νόμο της ελεύθερης πτώσης θα έχουμε $2R = 1/2 g t^2$ άρα $t = 2 \text{ s}$

Η σφαίρα όμως συνεχίζει να εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με $\omega = U/r = 100 \text{ rad/s}$. Έτσι κατά την πτώση της θα διαγράψει γωνία $\theta = \omega t = 200 \text{ rad}$ άρα $N_2 = \theta / 2\pi = 100/\pi$ περιστροφές.

Μέχρι να επιστρέψει στο σημείο βολής για πρώτη φορά θα έχει διαγράψει $N_{ολ} = \{100/\pi + 50\}$ περιστροφές.

Κρούση τριών σωμάτων.

Πάνω σε ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνία κλίσης $\varphi=30^\circ$ ισορροπεί σώμα μάζας $M_1=1\text{kg}$ με τη βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$. Δύο σώματα με μάζες $M_2=M_3=1\text{kg}$ συγκρούονται ακαριαία πλαστικά και ταυτόχρονα την χρονική στιγμή $t=0$, το ένα κινούμενο με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_2 = 3\sqrt{3}\text{m/s}$ την στιγμή της κρούσης και το άλλο κινούμενα κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα την στιγμή της κρούσης μέτρου $v_3=3\text{m/s}$.



Αν το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $L_0=1,15\text{ m}$ να βρεθούν:

- A) Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση καθώς και η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.
- B) Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος των τριών σωμάτων αν θετική φορά θεωρηθεί η φορά της ταχύτητας του συσσωματώματος.
- Γ) Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος εξαιτίας του βάρους του αν το επίπεδο μηδενικής ενέργειας θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται το κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται το $g=10\text{m/sec}^2$.

Απάντηση:

A) Με τη βοήθεια της ΑΔΟ στον παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο άξονα xx' θα έχουμε

$$M_2 v_2 \sin \varphi - M_3 v_3 \eta \mu \varphi = (M_1 + M_2 + M_3) v_{\text{συσ}}$$

θα βρούμε μετά από πράξεις $v_{\text{συσ}}=1\text{m/s}$.

Η ΑΔΕ για την κρούση θα μας δώσει:

$$K_2 + K_3 = K_{\text{συσ}} + Q_{\text{κρούσης}}$$

άρα μετά τις πράξεις θα βρούμε $Q_{\text{κρούσης}}=16,5\text{J}$

B) Από την αρχική ισορροπία του σώματος M_1 θα έχουμε $M_1 g \eta \mu \varphi = K x_1$ θα βρούμε $x_1=0,05\text{m}$. Μετά την πλαστική κρούση και πάλι από την ισορροπία του συστήματος των σωμάτων θα έχουμε $M_0 g \eta \mu \varphi = K x_2$ θα βρούμε $x_2=0,15\text{m}$. Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για το σύστημα θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} M_{ολ} v_{σστ}^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

θα βρούμε $A=0,2\text{m}$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα δίνεται από τη σχέση $x=A\eta\mu(\omega t+\phi_0)$. Την στιγμή $t=0$ έχουμε

$$x=x_2-x_1=0,1\text{m και } v>0 \text{ άρα η εξίσωση θα έχει μορφή } x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (S.I.)}$$

Έτσι η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης θα έχει μορφή:

$$U = 2 \cdot \eta\mu^2\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (SI)}$$

Γ) Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης απέχει απόσταση από το κάτω άκρο του ελατηρίου $D=L_0-x_2=1\text{m}$ ή η κατακόρυφη απόσταση από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας $H=D/2=0,5\text{m}$. Η εξίσωση του ύψους του συσσωματώματος θα δίνεται από τη σχέση

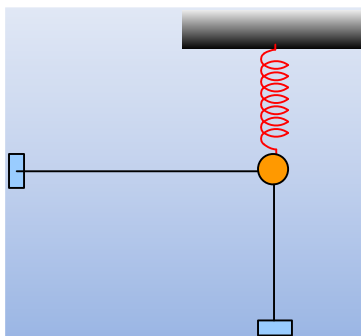
$$h = H + x\eta\mu\phi = 0,5 + 0,1 \cdot \eta\mu\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (SI).}$$

Έτσι η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$U = M_{ολ}gh = 15 + 3 \cdot \eta\mu\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (SI)}$$

Μια πηγή και δύο κύματα.

Δύο λεπτότατες χορδές η μία από σίδηρο και άλλη από αλουμίνιο συγκολλούνται σε ένα σημειακό σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ έτσι ώστε η πρώτη να είναι οριζόντια και η δεύτερη να είναι κατακόρυφη. Δένουμε το σημειακό σώμα σε ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου βρίσκεται δεμένο σε ακλόνητο ταβάνι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνουμε αρχική ταχύτητα στο σημειακό σώμα $v_0=1\text{m/s}$ με φορά προς τα πάνω. Αν η ταχύτητα των κυμάτων που θα δημιουργηθούν στην κάθε χορδή είναι $v_{\text{Al}}=20\text{m/s}$ και $v_{\text{Fe}}=10\text{m/s}$ να βρεθούν:

- A) Το είδος των κυμάτων που θα διαδοθεί στην κάθε χορδή.
- B) Η εξίσωση του κάθε κύματος στην κάθε χορδή.
- Γ) Να αποτυπωθούν ποιοτικά τα στιγμιότυπα των δύο χορδών όταν η πηγή έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις.

Να υποθέσουμε ότι τα δύο σύρματα είναι τόσο λεπτά που δεν επηρεάζουν την ταλάντωση του σημειακού σώματος καθώς επίσης και ότι οι χορδές είναι συνεχώς τεντωμένες.

Απάντηση:

A) Στην οριζόντια ράβδο από σίδηρο θα διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα μιας και η πηγή ταλαντώνεται κάθετα στην διάδοση του κύματος. Στην κατακόρυφη χορδή από αλουμίνιο θα διαδοθεί διαμήκες κύμα μιας και η πηγή δημιουργίας του κύματος ταλαντώνεται παράλληλα προς τη διάδοση του κύματος.

B) Το σημειακό σώμα μάζας m θα λειτουργεί ταυτόχρονα σαν πηγή των δύο παραπάνω κυμάτων με

$$\text{περίοδο } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{5}\text{ s} \text{ και πλάτους } A = \frac{v_0}{\omega} = 0,1\text{m}$$

Από το νόμο της κυματικής και για το κάθε μέσο διάδοσης των κυμάτων θα έχουμε για τα μήκη κύματος $v=\lambda f$ άρα για τη χορδή του σιδήρου $\lambda_{\text{Fe}}=2\pi\text{ m}$ και για τη χορδή από αλουμίνιο $\lambda_{\text{Al}}=3\pi\text{ m}$

Έτσι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται στην σιδερένια χορδή θα είναι

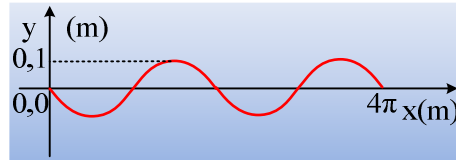
$$y_{\text{Fe}} = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{5t}{\pi} - \frac{x}{2\pi} \right) \text{ (S.I.)}$$

ενώ για το κύμα που διαδίδεται στην κατακόρυφη χορδή από αλουμίνιο η εξίσωση θα έχει μορφή

$$y_{Al} = 0,1 \cdot \eta \mu \left(2\pi \left(\frac{5t}{\pi} - \frac{y}{3\pi} \right) + \pi \right) \text{ (S.I.)}$$

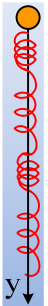
μιας και την χρονική στιγμή $t=0$ η πηγή βρίσκεται στην ΘΙΤ αλλά έχει ταχύτητα προς τα πάνω.

Γ) Η ποιοτική μορφή της οριζόντιας χορδής θα είναι η παρακάτω



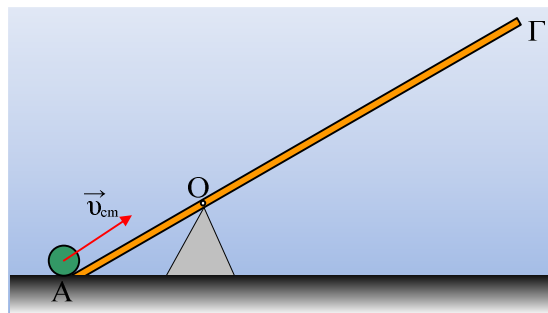
Αν αναφερόμαστε στην κατακόρυφη χορδή, διαδίδεται διαμήκες κύμα οπότε προφανώς δεν θα αλλάξει η μορφή της και βλέποντάς την κάποιος δεν θα παρατηρήσει αλλαγή στην μορφή της.

Αν μπορούσαμε να φανταστούμε τις αλλαγές στην πυκνότητα του υλικού, τότε θα είχαμε μια εικόνα, όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου αντιστοιχούμε τη χορδή με ελατήριο, πάνω στο οποίο θα μπορούσαμε να δούμε τα πυκνώματα και τα αραιώματα.



Μια σφαίρα και μια σανίδα.

Μία λεπτότατη και άκαμπτη ράβδος ΑΓ μάζας $M=2\text{Kg}$ και μήκους $L=1,12\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα Ο που απέχει από το έδαφος ύψος $H=L/8$ ενώ η απόσταση του άξονα Ο από το σημείο Α είναι $AO=L/4$. Μία σφαίρα μάζας $m=4\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,28\text{m}$ τοποθετείται στο άκρο Α έτσι ώστε το άκρο Α να βρίσκεται στο έδαφος και η ράβδος να παίζει το ρόλο κεκλιμένου επιπέδου. Δίδουμε στη σφαίρα κατάλληλη αρχική ταχύτητα μέτρου $v_{cmA}=3\text{m/s}$ έτσι ώστε η σφαίρα να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ανερχόμενη στην ράβδο.



Να βρεθούν:

- Α) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή που χάνεται η επαφή του σημείου Α με το έδαφος.
- Β) Οι περιστροφές που έχει εκτελέσει η σφαίρα μέχρι να χάσει την επαφή της με τη ράβδο αν αυτό συμβεί τη χρονική στιγμή που η ράβδος βρίσκεται σε οριζόντια θέση. Υποθέστε ότι σε όλη την διάρκεια της κίνησης της σφαίρας πάνω στην ράβδο ότι η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
- Γ) Πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος σφαίρας-ράβδου τη στιγμή που χάνουν την επαφή τους.

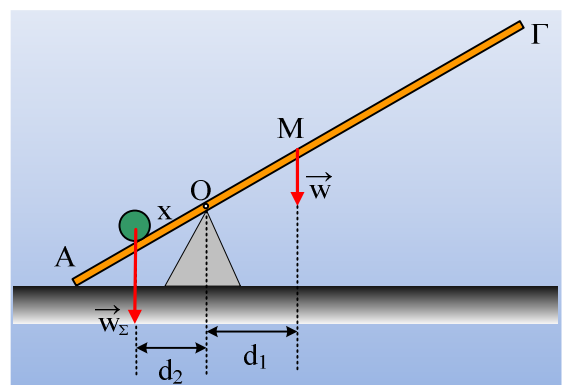
Δίνεται για τη σφαίρα $I_{cm}=0,4MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- Α) Η επαφή του σημείου Α με το έδαφος θα χαθεί όταν η δύναμη αντίδρασης του εδάφους θα μηδενιστεί. Σε εκείνο το σημείο που είναι και το τελευταίο σημείο ισορροπίας της σανίδας θα ισχύει

$$\Sigma \tau(o)=0 \text{ άρα } -Mgd_1+mgd_2=0 \text{ άρα}$$

$$-20d_1+40d_2=0 \text{ με } d_1=L\sin 30^\circ/4 \text{ άρα } d_2=L\sin 30^\circ/8 \text{ έτσι η απόσταση } x=L/8$$

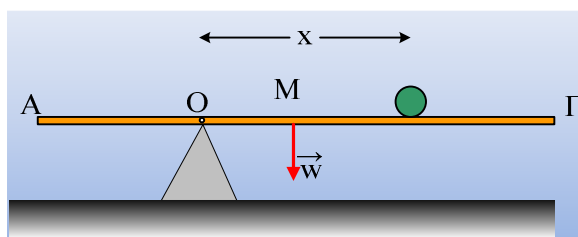


Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το ανέβασμα της σφαίρας και μέχρι τη στιγμή που θα διανύσει διάστημα $L/4 - L/8 = L/8$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{cm}'^2 + \frac{1}{2} I \omega'^2 + mg \frac{L}{16}$$

και μετά από πράξεις θα βρούμε $v_{cm}' = 2\sqrt{2}m/s$.

Β) Η επαφή των δύο σωμάτων θα χαθεί όταν η επιτάχυνση της σανίδας στο σημείο επαφής με σφαίρα γίνει μεγαλύτερο ή οριακά ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g .



Για την σανίδα θα ισχύει $\Sigma \tau(O) = I_O a_{γων}$ άρα $Mg \frac{L}{4} = \left(\frac{1}{12} ML^2 + M \frac{L^2}{16} \right) a_{γων} \quad (1)$

Για το σημείο επαφής της σφαίρας με τη σανίδα θα ισχύει όμως $a = a_{γων} \cdot x$ ή $g = a_{γων} \cdot x \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα βρούμε $x = \frac{7}{12} L = \frac{1,96}{3} m$

Έτσι το συνολικό μήκος που προχώρησε η σφαίρα κυλιόμενη θα είναι $S_{ολ} = \frac{L}{4} + \frac{7L}{12} = \frac{2,83}{3} m$ έτσι θα

κάνει $N = \frac{S_{ολ}}{2\pi R} = \frac{5}{3\pi}$ περιστροφές.

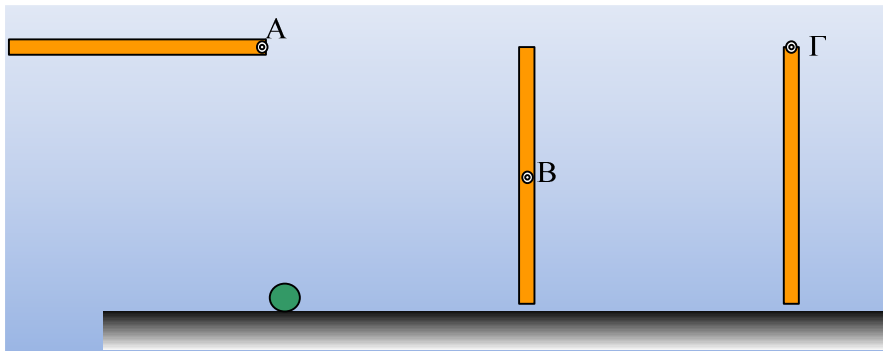
Γ) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική μέχρι και τη στιγμή που τα δύο σώματα χάνουν την επαφή τους θα έχουμε

$$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + Mg \frac{L}{8} = K_{ολ} + mg \frac{L}{8}$$

Και μετά τις πράξεις $K_{ολ} = 9,8 J$

Τρεις περιστρεφόμενες ράβδοι.

Τρεις ράβδοι ίδιας μάζας $M=3\text{kg}$ και ίδιου μήκους $L=1,2\text{m}$ μπορούν να στέφονται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιους άξονες έτσι ώστε το χαμηλότερό τους σημείο μόλις και να έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο λείο έδαφος. Η μεσαία ράβδος περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της σημείο Β ενώ οι δύο ακριανές γύρω από το ανώτερο τους σημείο Α και Γ αντίστοιχα. Η πρώτη ράβδος ανασηκώνεται έτσι ώστε να γίνει οριζόντια και αφήνεται ελεύθερη. Μόλις φτάσει στο κατώτερό της σημείο συγκρούεται με ακίνητο σημειακό σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν μετά από κάθε κρούση το σώμα που κινούνταν παραμένει ακίνητο και οι ράβδοι δεν μπορούν να συγκρουστούν μεταξύ τους να βρεθούν:

- Α) Η απώλεια ενέργειας σε κάθε κρούση
- Β) Πόσες κρούσεις θα πραγματοποιηθούν μέχρι να επαναληφθεί η εικόνα του αρχικού σχήματος και πόσες συνολικά κρούσεις θα πραγματοποιηθούν.
- Γ) Να γίνει ποιοτικά το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας της κάθε ράβδου σε συνάρτηση με το χρόνο, στους ίδιους άξονες.

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2.$$

Απάντηση:

Α) Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της πρώτης ράβδου θα έχουμε

$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{άρα } \omega = 5\text{r/s}$$

Για την πρώτη κρούση της ράβδου με το σημειακό σώμα θα έχουμε

$$I_A \omega = mvL \quad \text{θα βρούμε } v = 6\text{m/s}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κρούση $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\nu^2 + Q_{\kappa\rho 1}$ μετά από πράξεις $Q_{\kappa\rho 1}=0\text{J}$ άρα η πρώτη κρούση είναι ελαστική.

Για τη δεύτερη κρούση του σημειακού σώματος με τη μεσαία ράβδο θα έχουμε με τη βοήθεια της ΑΔΣ

$$m\nu\frac{L}{2} = I_{cm}\omega_2 \text{ μετά από πράξεις } \omega_2=10\text{r/s}$$

και με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την δεύτερη κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{2}m\nu^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2 + Q_{\kappa\rho 2} \text{ άρα θα βρούμε } Q_{\kappa\rho 2}=0\text{J}$$

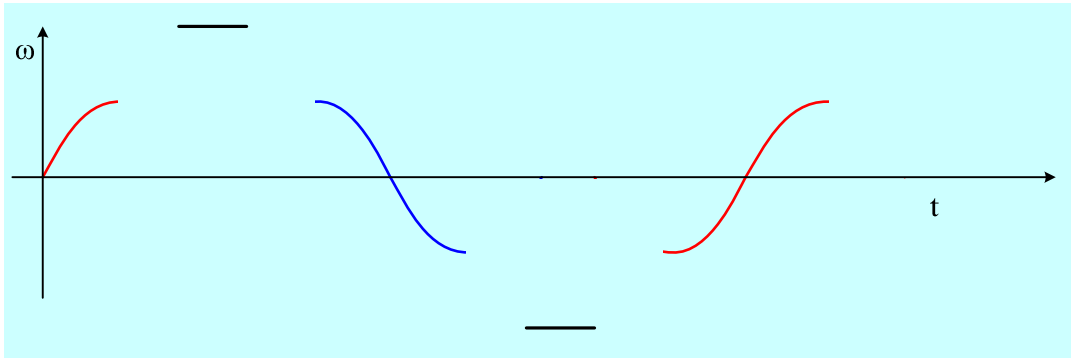
Άρα και η δεύτερη κρούση είναι ελαστική.

Η δεύτερη ράβδος θα κάνει τώρα μισή περιστροφή γύρω από τον οριζόντιο άξονα Β και θα ξαναχτυπήσει το σημειακό σώμα που είχε μείνει ακίνητο στην αρχική του θέση μετά την κρούση του με την μεσαία ράβδο. Έτσι θα έχουμε επανάληψη της δεύτερης κρούσης από την αντίθετη μεριά. Έτσι το σημειακό σώμα θα φύγει με ταχύτητα $\nu=6\text{m/s}$ με πορεία προς την τρίτη ράβδο με τη δεύτερη ράβδο να μένει ακίνητη και φυσικά χωρίς πάλι καμία απώλεια ενέργειας.

Το σημειακό σώμα τώρα θα συγκρουστεί με την τρίτη ράβδο που είναι και πάλι η αντίστροφη πορεία της πρώτης κρούσης. Έτσι και πάλι το φαινόμενο θα επαναληφθεί από την ανάποδη μεριά της πρώτης κρούσης. Έτσι η τρίτη ράβδος θα ξεκινήσει με γωνιακή ταχύτητα $\omega=5\text{r/s}$ για να φτάσει στην οριζόντιά της θέση και να ξαναγυρίσει για να ξαναχτυπήσει το σημειακό σώμα μάζας m . Επειδή όλες οι κρούσεις είναι τελικά ελαστικές δεν θα υπάρξει απώλεια ενέργειας άρα $Q_{\alpha\pi}=0\text{J}$

Β) Για να εμφανιστεί ξανά η αρχική εικόνα με την πρώτη ράβδο σε οριζόντια θέση θα πρέπει η σημειακή μάζα να επιστρέψει στην αρχική της θέση. Έτσι θα έχουν πραγματοποιηθεί 2 κρούσεις με την πρώτη ράβδο 4 κρούσεις με την μεσαία ράβδο αλλά και άλλες δύο κρούσεις με την δεξιά ράβδο. Άρα συνολικά 8 κρούσεις. Επειδή δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας το φαινόμενο δεν θα σταματήσει ποτέ. Έτσι θα εκτελεστούν άπειρες κρούσεις.

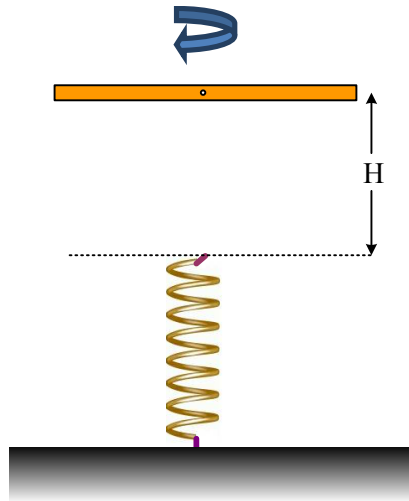
Γ) Στο παρακάτω διάγραμμα με κόκκινο χρώμα είναι η γωνιακή ταχύτητα της α' ράβδου, με μπλε της β' και με μπλε της γ' ράβδου.



Ελικόπτερο - Φυλακές

επειδή είναι και τα δύο της μόδας

Μία οριζόντια ράβδος μάζας $M=4\text{Kg}$ και μήκους $L=1\text{m}$ είναι αρχικά ακίνητη πάνω από ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=40\pi^2\text{N/m}$ με το κέντρο μάζας της ράβδου να απέχει κατακόρυφη απόσταση $H=0,15\text{m}$ από το πάνω άκρο του ελατηρίου που το άλλο του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα



Με κατάλληλη στιγμιαία ροπή ζεύγους δίνουμε αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=\sqrt{6}\text{ r/s}$ στη ράβδο και ταυτόχρονα την αφήνουμε ελεύθερη. Αν η ράβδος με την κρούσης με το ελατήριο δεν έχει απώλεια ενέργειας και δεν κολλάει σε αυτό να βρεθούν:

- A) Το είδος της κίνησης της ράβδου
- B) Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου
- Γ) Η περίοδος της περιοδικής κίνησης του κέντρου μάζας της ράβδου.

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2, \pi^2=10 \text{ και } \sqrt{3}=1,73$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Η δύναμη που δέχεται η ράβδος είναι το βάρος της και όταν είναι σε επαφή με το ελατήριο η δύναμη του ελατηρίου. Και οι δύο δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας της ράβδου με αποτέλεσμα να μην μπορούν να μεταβάλλουν την στροφική κατάσταση της ράβδου. Έτσι η αρχική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι συνεχώς σταθερή.

Η ράβδος εκτελεί συνεχώς ομαλή στροφική κίνηση και κατά την πτώση της μέχρι να ακουμπήσει το ελατήριο εκτελεί και ελεύθερη πτώση. Μετά την επαφή με το ελατήριο εκτελεί μέρος κατακόρυφης Α.Α.Τ. μέχρι να επιστρέψει στο φυσικό μήκος του ελατηρίου οπότε από εκεί και μετά εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση το g .

B) Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα είναι στην θέση ισορροπίας της ΑΑΤ και θα είναι:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} K A^2 \quad (1)$$

Για τη θέση ισορροπίας θα έχουμε $Kx_1 = Mg$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την ελεύθερη πτώση της ράβδου

$$MgH = \frac{1}{2} Mv^2 \quad \text{θα βρούμε } v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την κατακόρυφη ταλάντωση του κέντρου μάζας της ράβδου θα έχουμε:

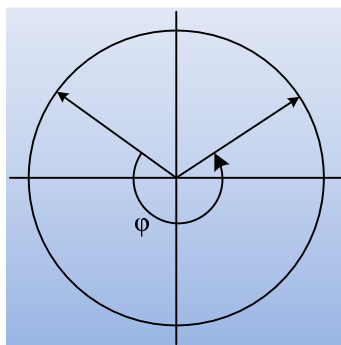
$$\frac{1}{2} Kx_1^2 + \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} KA^2 \quad \text{θα βρούμε } A = 0,2\text{m}$$

Μετά την αντικατάσταση των παραπάνω αποτελεσμάτων στην σχέση (1) θα έχουμε $K_{\max} = 9\text{J}$

Γ) Για να επιστρέψει το σώμα στην αρχική θέση θα πρέπει να κάνει τους εξής χρόνους

$$H = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad t_1 = 0,1\sqrt{3} \text{ s} \quad \text{για την κάθοδο}$$

Για την ταλάντωση και με την βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος



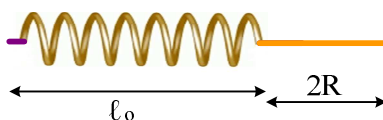
$$\varphi = \omega \Delta t \rightarrow \frac{4\pi}{3} = 10\Delta t_2 \quad \text{άρα } \Delta t_2 = \frac{2\pi}{15} \text{ s}$$

Ο χρόνος ανόδου της ράβδου θα είναι και πάλι $t_1 = 0,1\sqrt{3} \text{ s}$

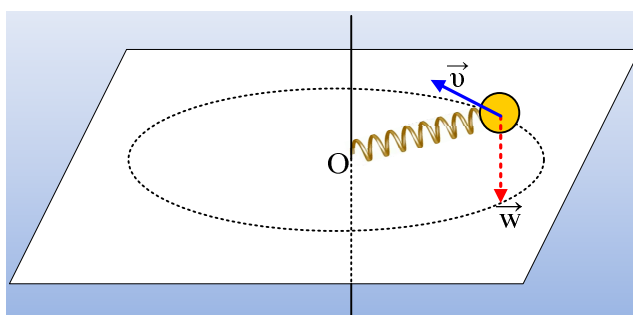
Άρα ο συνολικός χρόνος $t_{\text{ολ}} = 0,764\text{s}$

Μια παλιά βασανιστική (τανυστική) άσκηση αφιερωμένη στον Διονύση Μητρόπουλο

Ένα παράξενο ελατήριο σταθεράς $K=10\text{N/μ}$ έχει φυσικό μήκος σπειρών $\ell_0=0,8\text{m}$ έχει το τελευταίο μέρος του σε μορφή ευθύγραμμου σύρματος μήκους $0,2\text{m}$ όπως το παρακάτω σχήμα



Μία ομογενής σφαίρα μάζας $M=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ έχει μία μικρή οπή κατά μήκος μιας διαμέτρου της και στο πάχος του σύρματος του ελατηρίου έτσι ώστε το σύρμα να συμπεριφέρεται σαν άξονας περιστροφής χωρίς τριβές με το εσωτερικό της σφαίρας. Ο Μπαρμπα Γιάννης ο σιδεράς περνά το ευθύγραμμο τμήμα του ελατηρίου στην οπή της σφαίρας και με ένα σφυρί δημιουργεί «χειλή» στο άκρο του ελατηρίου, έτσι ώστε η σφαίρα να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, χωρίς όμως η σφαίρα να μπορεί να βγει από το ευθύγραμμο σύρμα του ελατηρίου. Στερεώνουμε το ένα άκρο του ελατηρίου σε κατακόρυφο άξονα $x\chi'$ πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο, δίνουμε στη σφαίρα κατάλληλη ταχύτητα στο κέντρο μάζας της, κατάλληλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε η σφαίρα να κυλίστα χωρίς να ολισθαίνει και συγχρόνως το κέντρο μάζας της σφαίρας να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση όπως το παρακάτω σχήμα



Να βρεθεί η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να εκτελεί η σφαίρα την παραπάνω κίνηση έχοντας το ελατήριο παραμορφωμένο κατά $0,1\text{m}$.

$$I_{cm}=0,4MR^2$$

Απάντηση:

Η κίνηση της σφαίρας μπορεί να θεωρηθεί διπλά περιστροφική. Μία γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι η συνέχεια του ελατηρίου και μία γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που περνάει από το άλλο άκρο του ελατηρίου και είναι καρφωμένος στο οριζόντιο επίπεδο. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας θα είναι

$$K_{ολ} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{κατ} \omega_2^2 \quad (1)$$

Το $I_{κατ}$ θα υπολογιστεί με τη βοήθεια του κανόνα του Στάινερ

$$I_{κατ} = 0,4MR^2 + M(\ell_0 + x + R)^2 \quad (2) \quad \omega_1 = \frac{v_{cm}}{R} \quad (3) \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{v_{cm}}{\ell_0 + x + R} \quad (4)$$

Η δύναμη του ελατηρίου θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης

$$kx = M \frac{v_{cm}^2}{\ell_o + x + R} \text{ και μετά από πράξεις θα βρούμε } v_{cm}=1\text{m/sec.}$$

Με την βοήθεια της σχέσης (2) θα βρούμε $I_{κατ}=1,004\text{kg.m}^2$

Με την βοήθεια της σχέσης (3) θα βρούμε $\omega_1=10\text{r/s}$

Με τη βοήθεια της σχέσης (4) θα βρούμε $\omega_2=1\text{r/s}$

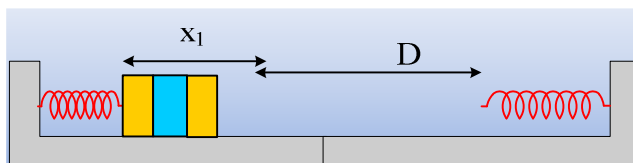
Με αντικατάσταση όλων των παραπάνω στην σχέση (1) θα βρούμε $K_{ολ}=0,702\text{J}$

Η ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από την σχέση $U_{ελ}= \frac{1}{2} Kx^2=0,05\text{J}$

Η ολική ενέργεια που θα πρέπει να δαπανήσουμε για να θέσουμε το σύστημα στην συγκεκριμένη κίνηση θα είναι $E_{ολ}=K_{ολ}+U_{ελ}=0,752\text{J}$

Διπλό χάσιμο επαφής.

Τρία σημειακά σώματα με μάζες $m_1=1\text{Kg}$, $m_2=2\text{Kg}$ και $m_3=1\text{kg}$ βρίσκονται σε επαφή έχοντας συσπειρώσει κατά $x_1=0,2\text{m}$ το οριζόντιο ελατήριο σταθερά $K_1=100\text{N/m}$ του σχήματος. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.



Το σώμα μάζας m_1 είναι δεμένο στο ελατήριο και την χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και όταν χαθεί η πρώτη επαφή των σωμάτων το σώμα μάζας m_3 καρφώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας σε ένα δεύτερο ελατήριο σταθεράς $K_2=300\text{N/m}$. Η απόσταση των δύο φυσικών μήκων των δύο ελατηρίων είναι $D=\pi/5\text{ m}$ να βρεθούν:

- A) Ποια στιγμή τα σώματα θα συμβεί ο τελικός αποχωρισμός;
- B) Ποια τα τελικά πλάτη ταλάντωσης των σωμάτων που ταλαντώνονται αν το σώμα μάζας m_2 μετά τον αποχωρισμό του από το σώμα μάζας m_3 απομακρυνθεί από το σύστημα;
- Γ) Ποια θα μπορούσε να ήταν η μέγιστη και ποια η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων που ταλαντώνονται;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Η πρώτη απώλεια επαφής θα συμβεί στη θέση φυσικού μήκους του πρώτου ελατηρίου αφού μετά απ' αυτήν το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 θα αρχίσει να μειώνεται λόγω της δράσης της δύναμης από το ελατήριο ενώ τα δύο σώματα Σ_2 και Σ_3 δεν δέχονται οριζόντιες δυνάμεις που μπορούν να μειώσουν το μέτρο της ταχύτητάς τους και θα συνεχίσουν κάνοντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

Έτσι με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την πρώτο μέρος της κίνησης θα έχουμε

$$\frac{1}{2} K x_1^2 = \frac{1}{2} m_{\text{ολ}} v^2 \text{ θα βρούμε } v=1\text{m/s}$$

Ο χρόνος όπου θα κινούνται και τα τρία σώματα σαν είναι θα είναι $\Delta t_1 = T/4 = \pi/10\text{ sec}$

Τα δύο σώματα μετά τον πρώτο αποχωρισμό κινούνται σαν ένα σώμα μέχρι να συγκρουστούν με το ελατήριο. Ο χρόνος αυτός είναι $\Delta t_2 = D/v = \pi/5\text{ sec}$.

Η επαφή των δύο σωμάτων θα χαθεί και πάλι στην θέση φυσικού μήκους του δεύτερου ελατηρίου και αυτό θα συμβεί όταν περάσει χρόνος $\Delta t_3 = T_2/2 = \pi/10\text{ sec}$

Άρα ο τελικός αποχωρισμός των σωμάτων θα συμβεί την χρονική στιγμή

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 4\pi/10 \text{ sec}$$

Β) Το πρώτο σώμα χάνει την επαφή του με τα υπόλοιπα σώματα έχοντας ταχύτητα $v=1\text{m/s}$ στην θέση του φυσικού μήκους του πρώτου ελατηρίου. Άρα η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης έτσι $v=\omega_1 A_1$ άρα $A_1=0,1\text{m}$.

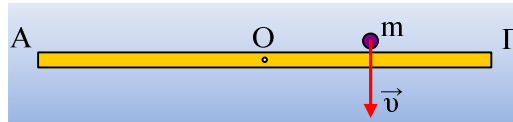
Το τρίτο σώμα και πάλι χάνει την επαφή του με το δεύτερο σώμα στην θέση φυσικού μήκους του δεύτερου ελατηρίου έχοντας και πάλι ταχύτητα μέτρου $v=1\text{m/s}$. Έτσι και πάλι είναι η μέγιστη άρα θα έχουμε $v=\omega_3 A_3$ άρα $A_3 = \frac{\sqrt{3}}{30} \text{m}$.

Γ) Η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα μπορούσε να συμβεί όταν και τα δύο σώματα βρισκόταν ταυτόχρονα στην μέγιστη απομάκρυνση το ένα και στην ελάχιστη απομάκρυνση το δεύτερο και θα ήταν $x_{\max} = D + A_1 + A_2 = \pi/5 + 0,1 + (3)1/2/30 = 0,788\text{m}$

Ενώ η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα μπορούσε να συμβεί αν και τα δύο σώματα βρισκόταν ταυτόχρονα το ένα στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης και το άλλο στην θέση της ελάχιστης απομάκρυνσης έτσι $x_{\min} = D - A_1 - A_2 = 0,468\text{m}$.

Δυο κρούσεις ράβδου με σημειακή μάζα

Λεπτότατη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκους $L = \frac{3,2\sqrt{3}}{3}m$ έχει μάζα $M = \frac{9\sqrt{3}}{\pi}kg$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα Ο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου .Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια .



Σημειακό σώμα μάζας $m=1Kg$ χτυπάει κάθετα την οριζόντια ράβδο με ταχύτητα μέτρου v σε απόσταση $L/4$ από το σημείο Ο και ανακλάται στιγμιαία με νέα ταχύτητα μέτρου v' και πάλι κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω. Αν τα δύο σώματα ξανασυγκρουστούν στο άκρο Α της ράβδου ενώ το η ράβδος έχει διαγράψει γωνία θ και ενώ το σημειακό σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο να βρεθούν:

- Α) Το μέτρο της ταχύτητας v' του σημειακού σώματος μετά την πρώτη κρούση
- Β) Το μέτρο της ταχύτητας v του σημειακού σώματος την στιγμή της πρώτης κρούσης
- Γ) Το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος αμέσως μετά την δεύτερη κρούση αν μετά τη δεύτερη κρούση η ράβδος μείνει ακίνητη.

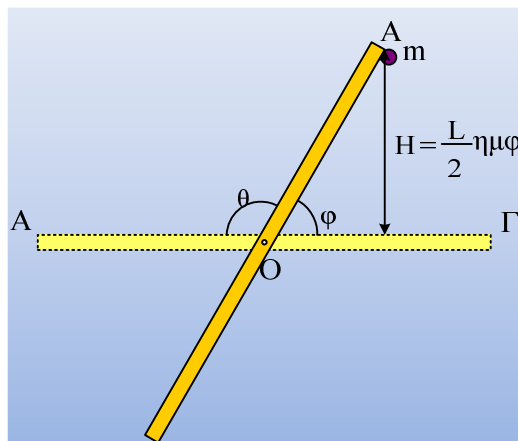
$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2.$$

Απάντηση:

- Α) Όταν η ράβδος διαγράψει γωνία θ με τη βοήθεια της παραπληρωματικής γωνίας φ θα βρούμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{L/4}{L/2} = 0,5 \quad \text{άρα η γωνία } \varphi = 60^\circ \text{ και η γωνία } \theta = 2\pi/3 \text{ rad. Το ύψος που διέγραψε το σημειακό}$$

σώμα είναι H και θα δίνεται με τη βοήθεια του σχήματος



Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σημειακού σώματος και μέχρι την κρούση του με τη ράβδο θα έχουμε

$$\frac{1}{2} m v'^2 = m g H \quad \text{θα βρούμε } v' = 4 \text{ m/s.}$$

Β) Με την βοήθεια του νόμου της ταχύτητας για το σημειακό σώμα μπορούμε να βρούμε το χρόνο ανόδου του σώματος

$$v = v' - g t_{av} \quad \text{άρα } t_{av} = 0,4 \text{ s}$$

Στον ίδιο χρόνο όμως η ράβδος διέγραψε γωνία $\theta = 2\pi/3 \text{ rad}$ εκτελώντας ομαλή στροφική κίνηση μέχρι να γίνει η σύγκρουση

$$\theta = \omega t \quad \text{άρα } \omega = 10\pi/6 \text{ r/s}$$

Επειδή η κρούση είναι στιγμιαία μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΣ για την πρώτη κρούση του σημειακού σώματος με τη ράβδο

$$L_{apx} = L_{τελ} \quad \text{ή} \quad m v L/4 = I_{cm} \omega - m v' L/4$$

και μετά από πράξεις να βρούμε $v = 12 \text{ m/s}$.

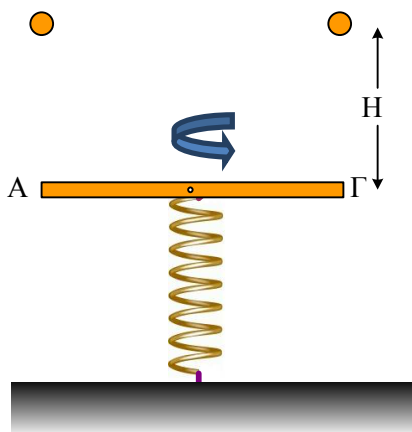
Γ) Με τη βοήθεια της ΑΔΣ για την δεύτερη κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{12} M L^2 \omega = m v'' \cdot \frac{L}{2}$$

μετά από τις πράξεις θα βρούμε $v'' = 2,5\sqrt{3} \text{ m/s}$

Ελικόπτερο και στόκοι

Μία λεπτότατη και άκαμπτη οριζόντια ράβδος ΑΓ μάζας $M=4\text{Kg}$ και μήκους $L=1\text{m}$ είναι αρχικά ακίνητη πάνω από ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=4\pi^2\text{N/m}$ με το κέντρο μάζας της ράβδου να βρίσκεται σε επαφή με το πάνω άκρο του ελατηρίου που έχει το φυσικό του μήκος και που το άλλο του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα



Με κατάλληλη στιγμιαία ροπή ζεύγους την χρονική στιγμή $t=0$ δίνουμε αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=2\pi\text{ r/s}$ στη ράβδο και ταυτόχρονα την αφήνουμε ελεύθερη να εκτελέσει ταλάντωση. Την χρονική στιγμή $t=0$ στην ίδια κατακόρυφη με το Α και το Γ αφήνουμε δύο σημειακές μάζες $m=2\pi/15\text{ Kg}$ από ύψος H . Αν οι δύο στόκοι βρεθούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τα άκρα Α και Γ της ράβδου την χρονική στιγμή που η ράβδος περνάει από την θέση ισορροπίας της για δεύτερη φορά μετά την χρονική στιγμή $t=0$ να βρεθούν:

- Α) Αν θα πραγματοποιηθεί πλαστική κρούση της ράβδου με τους δύο στόκους.
- Β) Το ύψος H από όπου αφέθηκαν ελεύθεροι οι στόκοι
- Γ) Το τελικό πλάτος ταλάντωσης του συστήματος ράβδου-στόκων. Θα χαθεί η επαφή του συστήματος ράβδου-στόκων με το ελατήριο;
- Δ) Η τελική γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου-στόκων.

Δίνεται για τη ράβδο $I_{cm}=1/12 ML^2$, $g=10\text{m/s}^2$, $\pi^2=10$

Απάντηση:

- Α) Η ράβδος την χρονική στιγμή $t=0$ δεν έχει κατακόρυφη ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής της. Το πλάτος της ταλάντωσής που θα εκτελέσει το κέντρο μάζας της ράβδου θα δίνεται από την σχέση της ισορροπίας $Kx_1=Mg$ άρα $x_1=1\text{m}$ και άρα το $A=1\text{m}$. Για να φτάσει η ράβδος για δεύτερη φορά στην θέση ισορροπίας της θα χρειασθεί χρόνος $t=3T/4=1,5\text{s}$.

Στον ίδιο χρόνο οι στόκοι θα πέσουν κατά ύψος $H_1=\frac{1}{2}gt^2=11,25\text{m}$. Για να συμβεί όμως κρούση θα πρέπει τα σημεία Α και Γ της ράβδου να βρεθούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το αρχικό τους επίπεδο. Αυτό θα συμβεί μόνο η ράβδος έχει εκτελέσει ακέραιο αριθμό μισών περιστροφών δηλαδή όταν $\theta=k\pi$ (1) όπου ο k να ανήκει στους ακέραιους αριθμούς. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι

σταθερή μιας και η δύναμη του βάρους και του ελατηρίου ασκούνται στο κέντρο μάζας της ράβδου και δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Ετσι η γωνία $\theta = \omega_0 t$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) θα έχουμε $2\pi \cdot 1,5 = \kappa \pi$ άρα $\kappa = 3$. Άρα οι στόκοι θα κολλήσουν στα άκρα της ράβδου.

- Β) Οι στόκοι για να φτάσουν να συγκρουστούν με τη ράβδο θα έχουν διανύσει κατακόρυφο διάστημα $H_1 = 11,25\text{m}$ από τη Θ.Ι. της ράβδου άρα θα πρέπει να αφεθούν από ύψος

$$H = H_1 - A = 10,25\text{m}.$$

- Γ) Η ράβδος την στιγμή της κρούσης έχει μεταφορική ταχύτητα $u_{cm} = \omega A = \pi \text{ m/s}$. Οι στόκοι έχουν κατακόρυφη ταχύτητα $u = gt = 15\text{m/s}$. Με την βοήθεια της ΑΔΟ για την πλαστική κρούση θα έχουμε:

$$Mu_{cm} - mu - mu = (M + 2m)u_{\text{συστ}} \text{ άρα } u_{\text{συστ}} = 0 \text{ m/s}.$$

Η αύξηση της μάζας του συστήματος θα αλλάξει και τη θέση ισορροπίας της κατακόρυφης ταλάντωσης του συστήματος. Με τη βοήθεια της τελικής ισορροπίας θα έχουμε $M\omega g = Kx_2$ άρα $x_2 = (1 + \pi/15) \text{ m}$. Ετσι το νέο πλάτος θα είναι $A_2 = x_2 - x_1 = \pi/15 \text{ m}$.

Για να χαθεί η επαφή του συστήματος με το ελατήριο θα πρέπει το σύστημα να φτάσει στην θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί μιας και το πλάτος ταλάντωσης είναι μικρότερο από την συσπείρωση x_2 του ελατηρίου από την νέα θέση ισορροπίας.

- Δ) Για την πλαστική κρούση των στόκων έχουμε με την βοήθεια της ΑΔΣ:

$$I_{cm}\omega_0 = I_{ολ}\omega_{\text{συστ}}$$

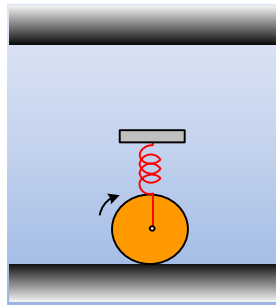
$$\text{άρα } \frac{1}{12}ML^2\omega_0 = \left(\frac{1}{12}ML^2 + 2m\frac{L^2}{4} \right)\omega_{\text{συστ}}$$

άρα μετά από πράξεις:

$$\omega_{\text{συστ}} = \frac{10\pi}{5 + \pi} \text{ r/s}$$

Ένα αμορτισέρ.

Δίσκος μάζας $M=1\text{Kg}$ ακτίνας $R=0,1\text{m}$ ισορροπεί κατακόρυφος πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο κέντρο του δίσκου στερεώνουμε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $l_0=0,8\text{m}$. Στο πάνω μέρος του ελατηρίου ισορροπεί σημειακό σώμα μάζας $m_1=1\text{Kg}$. Εκτοξεύουμε το σημειακό σώμα με κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $u=4\text{m/s}$ και φορά προς τα πάνω και την ίδια στιγμή με μία στιγμιαία δεξιόστροφη ροπή δίνουμε γωνιακή ταχύτητα $\omega=15\text{r/s}$ η οποία είναι παράλληλη προς το έδαφος στον δίσκο.



Την στιγμή που ο δίσκος είναι έτοιμος να απογειωθεί από το έδαφος το σημειακό σώμα συγκρούεται ακαριαία κεντρικά και ελαστικά με ελαστικό νταβάνι. Να βρεθούν:

- A) Τι είδους κίνηση εκτελεί ο δίσκος;
- B) Η απόσταση του δαπέδου από το νταβάνι
- Γ) Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για το σημειακό σώμα.
- Δ) Πόσες περιστροφές εκτελεί ο δίσκος ανάμεσα σε δύο κρούσεις του σημειακού σώματος με το νταβάνι.
- Ε) Αν κάποια στιγμή βάλουμε στο πάνω μέρος του σημειακού σώματος μία σταγόνα LOGO κόλλα και η κρούση του σημειακού σώματος γίνει πλαστική με το νταβάνι ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια του δίσκου.

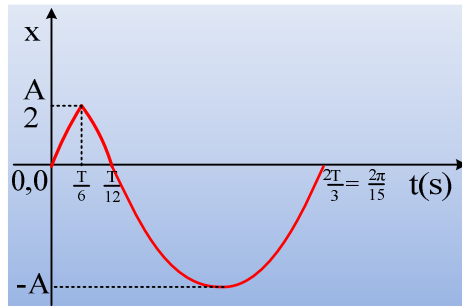
Δίνεται: $I_{\Delta}=0,5MR^2$.

Απάντηση:

- A) Επειδή το επίπεδο είναι λείο ο δίσκος δεν δέχεται δύναμη τριβής από το δάπεδο. Οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο είναι το βάρος του, η κάθετη δύναμη του δαπέδου αλλά και η δύναμη του ελατηρίου. Όλες αυτές οι δυνάμεις δεν προκαλέσουν ροπή έτσι ο δίσκος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.
- B) Για να είναι έτοιμος ο δίσκος να απογειωθεί θα πρέπει η δύναμη του δαπέδου να γίνει $N=0$. Το ελατήριο πρέπει να είναι τεντωμένο και να ισχύει $F_{ελ}=Mg$ άρα $x_2=0,1\text{m}$. Η απόσταση του νταβανιού από το πάτωμα θα είναι $H=l_0+R+x_2=1\text{m}$.
- Γ) Το σημειακό σώμα εκτελεί ταλάντωση και μέχρι να γίνει η κρούση είναι απλή αρμονική.

Για την ισορροπία του σημειακού σώματος $Kx_1 = m_1 g$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$. Η ταχύτητα εκτόξευσης είναι και η μέγιστη ταλάντωσης και αν το σύστημα έκανε ΓΑΤ θα είχε πλάτος $A = u/\omega = 0,4\text{m}$.

Παρατηρούμε ότι η θέση της ελαστικής κρούσης με το νταβάνι είναι η $x = +A/2$ άρα ο χρόνος από την ΘΙΤ και μέχρι την στιγμή της ελαστικής κρούσης θα βρεθεί από την εξίσωση της απομάκρυνσης $A/2 = A\eta\mu\omega t$ ή $t = T/12 = \pi/60\text{ s}$. Το μέτρο της ταχύτητας δεν θα αλλάξει εξαιτίας της ελαστικής κρούσης έτσι η ταλάντωση θα συνεχιστεί και κατά την κάθοδο του σημειακού σώματος. Ο χρόνος μέχρι να φτάσει και πάλι στην ΘΙΤ θα είναι και πάλι $T/12$ ενώ μέχρι να φτάσει στην θέση ελάχιστης απομάκρυνσης θα χρειαστούμε χρόνο $T/4$. Έτσι η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης με το χρόνο θα έχει την παρακάτω μορφή

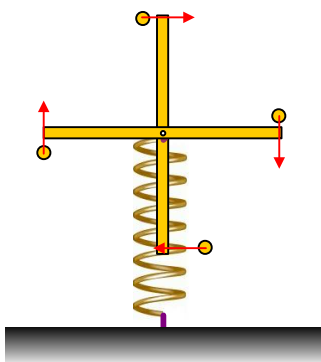


Δ) Ο χρόνος επανάληψης των κρούσεων είναι η περίοδος της παραπάνω περιοδικής κίνησης και είναι $T_{\text{ταλ}} = 2T/3 = 2\pi/15\text{s}$. Ο δίσκος στον παραπάνω χρόνο εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση άρα η γωνία διαγραφής του δίσκου θα είναι $\theta = \omega t = 15 \cdot 2\pi/15 = 2\pi\text{ rad}$. Άρα οι περιστροφές θα είναι $N = \theta/2\pi = 1$ περιστροφή.

Ε) Όταν θα κολλήσει η σημειακή μάζα το ελατήριο είναι τεντωμένο κατά $x_2 = 0,1\text{m}$. Η θέση αυτή όμως είναι και η κατακόρυφη θέση ισορροπίας για τον δίσκο. Έτσι ο δίσκος θα εκτελεί μόνο στροφική κίνηση με $K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = 0,5625\text{J}$

Επειδή υπάρχει περίσσευμα στόκων και φουρφουριών....

Δύο ράβδοι μάζας $M=1,8\text{Kg}$ και μήκους $L=1\text{m}$ είναι κολλημένοι στο κέντρο μάζας τους έτσι ώστε να σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία. Κάνουμε μία μικρή τρύπα στο κέντρο μάζας των δύο ράβδων και στο κέντρο τους περνάμε οριζόντιο άξονα που είναι η κατάληξη ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=400\text{N/m}$ και αρκετά μεγάλου φυσικού μήκους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το σύστημα ισορροπεί με την μία ράβδο κατακόρυφη και την άλλη οριζόντια και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα.



Τέσσερα όμοια σημειακά σώματα $m=0,1\text{Kg}$ που κινούνται τα δύο οριζόντια και τα δύο κατακόρυφα με το ίδιο μέτρο ταχύτητας $v=10\text{m/s}$ συγκρούονται ταυτόχρονα και ακαριαία στα τέσσερα άκρα των δύο ράβδων όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

- A) Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το κέντρο μάζας του συστήματος των σωμάτων;
- B) Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος ;
- Γ) Ποιο το ελάχιστο και ποιο το μέγιστο μέτρο της γραμμικής ταχύτητας που θα μπορούσαν να αποκτήσουν κάποια στιγμή οι σημειακές μάζες;

Για την κάθε ράβδο $I_{cm}=1/12ML^2$.

Απάντηση:

- A) Με την βοήθεια της ΑΔΟ για τους άξονες xx' και yy' θα έχουμε

$$mv - mv = (2m + 2M)u_{\text{συσ}xx'} \text{ θα έχουμε } u_{\text{συσ}xx'} = 0\text{m/s}$$

$$mv - mv = (2m + 2M)u_{\text{συσ}yy'} \text{ θα έχουμε } u_{\text{συσ}yy'} = 0\text{m/s}$$

άρα το κέντρο μάζας του συστήματος δεν θα κινηθεί.

Με τη βοήθεια της ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε:

$$4mv \frac{L}{2} = \left(4m \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{2}{12} ML^2 \right) \omega_{\text{συσ}}$$

Θα βρούμε μετά τις πράξεις $\omega_{\text{συσ}} = 5\text{r/s}$.

Για την αρχική θέση ισορροπίας θα έχουμε $2Mg = Kx_1$ άρα $x_1 = 36/400 \text{ m}$

Για την τελική ισορροπίας θα έχουμε $(2M+4m)g = Kx_2$ άρα $x_2 = 40/400 \text{ m}$

Μετά την κρούση το $\Sigma \tau = 0$ άρα το σύστημα θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας του και το κέντρο μάζας του συστήματος θα εκτελεί κατακόρυφη ΓΑΤ εξαιτίας της δύναμης του ελατηρίου και του βάρους του.

Επειδή το κέντρο μάζας του συστήματος δεν έχει αρχική ταχύτητα το σύστημα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος θα είναι $A_{cm} = 0,01 \text{ m}$

Ετσι το κέντρο μάζας του συστήματος θα εκτελεί κατακόρυφη Γ.Α.Τ με περίοδο $T = \pi/5 \text{ sec}$.

Β) Η μέγιστη κινητική ενέργεια θα είναι όταν το σύστημα περνά από την θέση ισορροπίας του.

$$\text{Άρα } K_{\max} = \frac{1}{2} I_{\text{ολ}} \omega_{\text{συσ}}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{ολ}} \cdot U_{\text{cmmax}}^2 = 5,02 \text{ J}$$

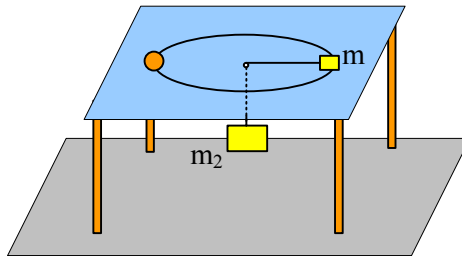
Γ) Οι σημειακές σφαίρες έχουν συνεχώς συνολική ταχύτητα ίση με το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής και την ταχύτητα λόγω της μεταφοράς του κέντρου μάζας του συστήματος.

$$\text{Έτσι η } u_{\text{ολmax}} = \omega_{\text{συσ}} L/2 + \omega A = 2,6 \text{ m/s}$$

$$\text{ενώ η } u_{\text{ολmin}} = \omega_{\text{συσ}} L/2 - \omega A = 2,4 \text{ m/s.}$$

Θα μείνει τεντωμένο το νήμα;

Το κιβώτιο του παρακάτω σχήματος είναι κύβος πλευράς $2R$ μάζας $m=1\text{kg}$ και μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι ύψους $H=1,25\text{m}$ εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R_1=2\text{m}$ με την βοήθεια οριζόντιου τεντωμένου σκοινιού η άλλη άκρη του οποίου βρίσκεται δεμένη με δεύτερο σώμα μάζας $m_2=5\text{kg}$ που ισορροπεί κατακόρυφα.



Σφαίρας μάζας $M=3\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ τοποθετείται σε ένα σημείο της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί το σώμα μάζας m_1 με κατάλληλη αρχική γωνιακή ταχύτητα παράλληλη προς το επίπεδο του τραπεζιού και με φορά προς το κέντρο του κύκλου. Κάποια στιγμή τα δύο σώματα συγκρούονται ακαριαία κεντρικά και ελαστικά. Αν μετά την κρούση των δύο σωμάτων η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο να βρεθούν:

A) Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του κύβου.

B) Το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας

Γ) Το μέγιστο ύψος που θα κατέβει το σώμα μάζας m_2

Δ) Ποια η τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος.

Για την σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για την ισορροπία του σώματος μάζας m_2 θα έχουμε $T=m_2g$ άρα $T=50\text{N}$

Ο κύβος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η τάση του νήματος έχει το ρόλος της κεντρομόλου δύναμης. Έτσι $T=F_k$ άρα $T=mv^2/R$ και μετά από τις πράξεις $v=10\text{m/s}$

B) Η κρούση του κύβου και της σφαίρας είναι κεντρική και ελαστική. Οι δυνάμεις κατά την κρούση είναι κεντρικές και έτσι δεν θα προκαλέσουν μεταβολή στην στροφική κίνηση της σφαίρας. Ισχύουν οι τύποι της κεντρικής ελαστικής κρούσης με την σφαίρα αρχικά ακίνητη μεταφορικά

Έτσι

$$v_1' = \frac{m-M}{m+M}v = -5m/s \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m}{m+M}v = 5m/s$$

Επειδή η σφαίρα αμέσως μετά την κρούση κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης άρα $v_{cm2}' = \omega_0 R$ άρα $\omega_0 = 50 \text{ r/s}$.

Γ) Επειδή συνολικά οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο δεν δημιουργούν ροπή η στροφορμή του κύβου διατηρείται σταθερή. Με την βοήθεια της ΑΔΣ θα έχουμε:

$$mv_1' R_1 = mv_{\text{τελ}}(R_1 - y) \quad \text{ή} \quad v_{\text{τελ}} = 10/(2-y) \quad (1)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για όλο το σύστημα και μέχρι να σταματήσει να κατεβαίνει στιγμιαία το σώμα μάζας m_2 θα έχουμε

$$\frac{1}{2} mv_1'^2 + m_2 g y = \frac{1}{2} mv_{\text{τελ}}^2 \quad \text{ή} \quad 12,5 + 50y = 0,5 v_{\text{τελ}}^2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) θα καταλήξουμε στην εξίσωση $4y^3 - 15y^2 + 12y = 0$ με λύσεις το

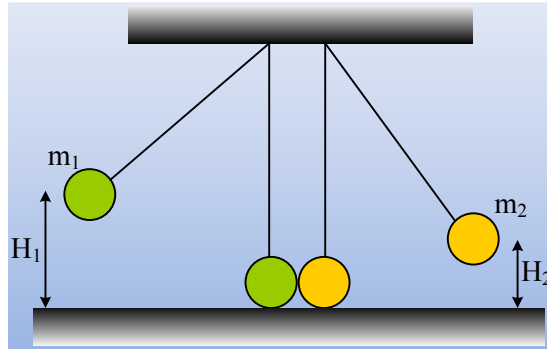
$y=0\text{m}$ $y=2,59\text{m}$ & $y=1,15\text{m}$ με δεκτή φυσικά την τελευταία μιας και το y δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του R .

Δ) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την σφαίρα μετά την κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega_0^2 + M g H = K_{\text{ολεδαφους}} \quad \text{θα έχουμε μετά από τις πράξεις} \quad K_{\text{εδαφους}} = 90 \text{ J}$$

Κρούση – ολίσθηση- κύλιση

Δύο σφαίρες με μάζες $m_1=3\text{Kg}$ και $m_2=1\text{Kg}$ έχουν ίδιες ακτίνες $R_1=R_2=0,2\text{ m}$ κρέμονται από δύο κατακόρυφα νήματα ίδιου μήκους L που είναι στερεωμένα στο ταβάνι εργαστηρίου ενώ οι σφαίρες είναι σε επαφή. Εκτρέπουμε τις δύο σφαίρες έτσι ώστε το κέντρο μάζας της κάθε σφαίρας να ανέβει κατακόρυφα κατά ύψη $H_1=0,45\text{m}$ και $H_2=0,2\text{m}$ όπως στο παρακάτω σχήμα:



Κάποια στιγμή αφήνουμε τη μία και μετά από λίγο την άλλη με αποτέλεσμα κάποια δεύτερη χρονική στιγμή οι δύο σφαίρες να συγκρουστούν κεντρικά και ελαστικά ενώ τα νήματα είναι κατακόρυφα. Ελάχιστα πριν την κρούση τα νήματα κόβονται ταυτόχρονα ενώ το κατώτερο σημείο της κάθε σφαίρας βρίσκεται σε επαφή με οριζόντιο έδαφος που παρουσιάζει συντελεστή τριβή ολίσθησης $\mu=2/5$.

Να βρεθούν:

- A) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας των δύο σφαιρών πριν και αμέσως μετά την κρούση
- B) Η μέγιστη ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης των δύο σφαιρών στην διάρκεια της κρούσης
- Γ) Η χρονική στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση για κάθε σφαίρα μετά το τέλος της κρούσης
- Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των δύο κέντρων μάζας των δύο σφαιρών όταν οι σφαίρες κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν.

Δίνεται $I_{\text{cm}}=0,4MR^2$ & $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- A) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ $MgH = \frac{1}{2} Mv^2$ για τις δύο σφαίρες θα βρούμε τα μέτρα των δύο ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών πριν την κρούση $v_1=3\text{m/s}$ & $v_2=2\text{m/s}$.

Με την βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης δύο σφαιρών που συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά θα έχουμε

$$v_1' = (m_1 - m_2)v_1 / (m_1 + m_2) + 2m_2v_2 / (m_1 + m_2) = 0,5\text{m/s}$$

$$v_2' = (m_2 - m_1)v_2 / (m_1 + m_2) + 2m_1v_1 / (m_1 + m_2) = 5,5\text{m/s}$$

- B) Κατά την διάρκεια της κρούσης οι δύο σφαίρες αρχίζουν να παραμορφώνονται. Η μέγιστη παραμόρφωση θα συμβεί την στιγμή που οι δύο σφαίρες αποκτήσουν την ίδια ταχύτητα.

Με τη βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_k \text{ και μετά τις πράξεις } u_k = 1,75 \text{ m/s}$$

Με εφαρμογή της ΑΔΕ θα έχουμε $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u_k^2 + U_{\max}$ θα βρούμε μετά τις πράξεις

$$U_{\max} = 9,375 \text{ J}$$

Γ) Μετά το τέλος της κρούσης και οι δύο σφαίρες κινούνται μόνο μεταφορικά προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να εμφανιστεί τριβή ολίσθησης προς τα αριστερά στη κάθε σφαίρα. Έτσι η κάθε σφαίρα θα αρχίσει να επιταχύνεται στροφικά μέχρι την χρονική στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση. Έτσι με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική και την μεταφορική κίνηση θα έχουμε για την κάθε σφαίρα

$$T_{\text{ολ}} R = 0,4 M R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

$$T_{\text{ολ}} = M a \quad (2)$$

με την επίλυση των (1) και (2) θα βρούμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 50 \text{ r/s}^2$ $a = 4 \text{ m/s}^2$

Η καθαρή κύλιση θα συμβεί όταν η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της κάθε σφαίρας θα μηδενιστεί δηλαδή $v_{\text{cm}} = v_{\text{περ}}$ άρα $v_0 - at = \alpha_{\gamma\omega\nu} t R$ και μετά την αντικατάσταση για κάθε σφαίρα θα έχουμε $t_1 = 1/28 \text{ s}$ και $t_2 = 11/28 \text{ s}$.

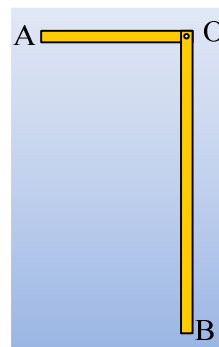
Δ) Η απόσταση των δύο κέντρων μάζας καθορίζεται από τη σχέση $S_{\text{cm}} = x_{\text{cm2}} - x_{\text{cm1}}$ άρα ο ρυθμός μεταβολής αυτής της απόστασης θα είναι $\Delta S_{\text{cm}} / \Delta t = v_{\text{cm2}} - v_{\text{cm1}} \quad (3)$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της κάθε σφαίρας θα δίνεται από τη σχέση της ταχύτητας στην επιβραδυνόμενη κίνησης $v = v_0 - at$ άρα για κάθε σφαίρα θα έχουμε $v_{\text{cm2}} = 55/14 \text{ m/s}$

και $v_{\text{cm2}} = 5/14 \text{ m/s}$ και με τη βοήθεια της σχέσης (3) $\Delta x_{\text{cm}} / \Delta t = 25/7 \text{ m/s}$

Κρούση δύο ράβδων.

Δύο ομογενείς ελαστικές πρισματικές ράβδοι με αμελητέο πλάτος, η ΟΑ και η ΟΒ, με μάζες $M_1=1\text{Kg}$ και $M_2=0,25\text{kg}$ αντίστοιχα. Το μήκος της ράβδου ΟΑ είναι $L_1= 1,2\text{ m}$ ενώ το μήκος της ράβδου ΟΒ είναι $L_2=2,4\text{m}$ και οι δύο ράβδοι μπορούν (λόγω του αμελητέου πλάτους τους) να στρέφονται χωρίς τριβές στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κοινό τους άκρο Ο και είναι κάθετος στη διεύθυνσή τους. Κρατάμε αρχικά την ράβδο ΟΑ στην οριζόντια διεύθυνση και την αφήνουμε ελεύθερη. Η δεύτερη ράβδος ΟΒ ισορροπεί κατακόρυφη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα .



Να βρεθούν:

- Α) Η γωνιακή ταχύτητα της κάθε ράβδου αμέσως μετά την ελαστική κρούση των δύο ράβδων
- Β) Να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής του μέτρου της στροφορμής της κάθε ράβδου μετά την κρούση
- Γ) Αν θα ξαναγίνει κρούση των δύο ράβδων.

$$I_0=1/3ML^2.$$

Απάντηση:

- Α) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της πρώτης ράβδου και μέχρι την ελαστική της κρούση με τη δεύτερη ράβδο θα έχουμε

$$M_1gL_1/2= \frac{1}{2} I\omega_1^2 \quad \text{θα βρούμε} \quad \omega_1=5\text{r/s}$$

Επειδή η κρούση των δύο ράβδων είναι ελαστική κατά αντιστοιχία με την ελαστική κρούση των δύο σφαιρών θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τους τύπους της ελαστικής κρούσης για ακίνητη και κινούμενη σφαίρα. Έτσι

$$\omega_1' = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \omega_1 \quad \text{θα βρούμε} \quad \omega_1' = 0\text{r/s}$$

$$\omega_2' = \frac{2I_1}{I_1 + I_2} \omega_1 \quad \text{θα βρούμε} \quad \omega_2' = 5\text{r/s}$$

δηλαδή μιας και οι δύο ράβδοι έχουν την ίδια ροπή αδράνειας $I_1=I_2=0,48\text{Kg}\cdot\text{m}^2$ θα ανταλλάξουν γωνιακές ταχύτητες.

B) Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κάθε ράβδου θα συμβεί όταν η ροπή του βάρους της κάθε ράβδου θα γίνει μέγιστη. Για την πρώτη ράβδο ο ρυθμός θα είναι 0 μιας και η ράβδος θα μείνει ακίνητη. Για τη δεύτερη ράβδο ο μέγιστος ρυθμός θα συμβεί στην οριζόντια θέση μιας και εκεί το απόστημα του βάρους της αποκτά μέγιστη τιμή. Θα πρέπει όμως να ελέγξουμε αν η ράβδος θα φτάσει στην οριζόντια θέση. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο της δεύτερης ράβδου θα έχουμε

$$\frac{1}{2} I_2 \omega_2'^2 = M_2 g \frac{L_2}{2} + K \quad \text{θα βρούμε } K=3J$$

Επειδή η ράβδος φτάνει στην οριζόντια θέση εκεί η ράβδος θα έχει και τον μέγιστο ρυθμό του μέτρου της στροφορμής

$$\Delta L / \Delta t = M_2 g L_2 / 2 = 3 N \cdot m$$

Γ) Για να μη ξανασυμβεί κρούση των δύο ράβδων θα πρέπει η δεύτερη ράβδος να μην επιστρέψει ποτέ στην αρχική της θέση αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν η ράβδος κάποια στιγμή ισορροπήσει. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην κατακόρυφη θέση για την ράβδο. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο της ράβδου και μέχρι το ανώτερό της σημείο θα έχουμε

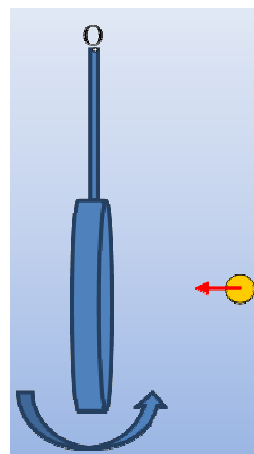
$$\frac{1}{2} I_2 \omega_2'^2 = M_2 g L_2 + K_{\text{τελ}}$$

θα βρούμε μετά από τις πράξεις ότι $K_{\text{τελ}}=0J$.

Αρα η δεύτερη ράβδος μόλις που φτάνει στην κατακόρυφη θέση έχοντας μηδενική γωνιακή ταχύτητα. Έτσι δεν πρόκειται να ξανασυμβεί δεύτερη κρούση.

Μια ρακέτα του τένις.

Μια ρακέτα του τένις μπορούμε να τη θεωρήσουμε ότι αποτελείται από μία λεπτή ομογενής ξύλινη ράβδο μάζας $M=300\text{gr}$ και μήκους $L=10\text{cm}$ και από ένα λεπτό ελαστικό δίσκο μάζας $m=400\text{gr}$ και ακτίνας $R=10\text{cm}$ που είναι κολλημένα μεταξύ τους στο άκρο της ξύλινης ράβδου με την ευθεία της ράβδου να διέρχεται από το κέντρο του ελαστικού δίσκου. Στο άκρο της ράβδου που δεν είναι ενωμένο με το δίσκο ανοίγουμε μία μικρή οπή έτσι ώστε το σύστημα να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα O που είναι συνεχώς παράλληλος με το επίπεδο του ελαστικού δίσκου όπως το παρακάτω σχήμα.



Η ρακέτα αφήνεται ελεύθερη από το ανώτερό της σημείο και όταν αποκτά την μέγιστη ταχύτητά της για πρώτη φορά συγκρούεται τελείως ελαστικά με μία σημειακή μπάλα του τένις μάζας $m_1=100\text{gr}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v=10\text{m/s}$. Η σύγκρουση είναι ακαριαία και πραγματοποιείται στο κέντρο του ελαστικού δίσκου.

Να βρεθούν:

- Α) Η ροπή αδράνειας της ρακέτας γύρω από τον άξονα περιστροφής της O .
- Β) Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ρακέτας πριν την κρούση
- Γ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ρακέτας αλλά και το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας μετά την κρούση.
- Δ) Τη μέγιστη γωνία εκτροπής της ρακέτας μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου $I_{cm}=1/12 ML^2$ ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι $I_D= mR^2/4$ για άξονα που ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ του δίσκου και περνάει από το κέντρο μάζας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Α) Για τη ράβδο και για τον ελαστικό δίσκο με τη βοήθεια του κανόνα του Στάινερ θα βρούμε

$$I_{ολ}=I_{ραβ} + I_D = \frac{1}{12} ML^2 + M \frac{L^2}{4} + m \frac{R^2}{4} + m(R+L)^2 = 0,018 \text{Kg} \cdot \text{m}^2.$$

- Β) Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ρακέτας θα συμβεί όταν η ρακέτα θα βρίσκεται στην χαμηλότερή της θέση και με τη βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$MgL + mg2(L+R) = K_{\max} \quad \text{άρα } K_{\max} = 1,9\text{J}$$

- Γ) Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική μπορούμε κατ' αναλογία με την ελαστική κρούση δύο σφαιρών να εφαρμόσουμε τους τύπους της ελαστικής κρούσης

$$\omega'_1 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \omega_1 + \frac{2I_2}{I_1 + I_2} \omega_2 \quad \text{και} \quad \omega'_2 = \frac{2I_1}{I_1 + I_2} \omega_1 + \frac{I_2 - I_1}{I_1 + I_2} \omega_2$$

$$\text{με } I_1 = 0,018 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad \& \quad I_2 = m_1(L+R)^2 = 0,004 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad \text{οπότε}$$

$$\omega_1 = \frac{10}{3} \sqrt{19} \text{ rad/s} \text{ και } \omega_2 = -\frac{v}{R+L} = -50 \text{ rad/s}$$

μετά από πράξεις θα βρούμε $\omega_1' = -8,95 \text{ r/s}$ & $\omega_2' = 55,55 \text{ r/s}$ άρα $v_2' = \omega_2' (R+L) = 11,11 \text{ m/s}$

Δ) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο και μέχρι την ανώτερη θέση της ρακέτας θα έχουμε

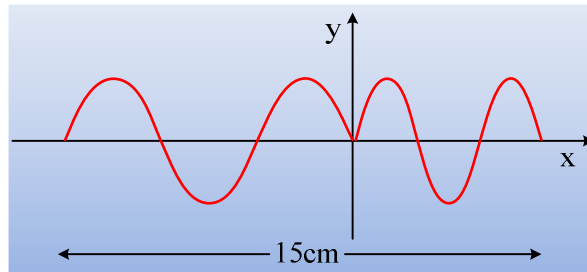
$$\frac{1}{2} I_{o\lambda} \omega_1'^2 = Mgh_1 + mgh_2$$

$$\text{Με } h_1 = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \text{ και } h_2 = (L+R) - (L+R)\sigma\upsilon\nu\varphi$$

θα βρούμε μετά από πράξεις $\sigma\upsilon\nu\varphi_{\max} = 0,24$

Στιγμιότυπο - Doppler

Πάνω σε μία ήρεμη επιφάνεια υγρού μία ακίδα πάλλεται αρμονικά δημιουργώντας επιφανειακό εγκάρσιο κύμα. Κάποια χρονική στιγμή $t=0$ η ακίδα αρχίζει να κινείται σε σταθερή κατεύθυνση προς την θετική κατεύθυνση x με σταθερή ταχύτητα. Αν το στιγμιότυπο του κύματος είναι η παρακάτω γραφική παράσταση



τότε το μήκος κύματος του κύματος που θα διαδιδόταν στο νερό αν η ακίδα αν ήταν ακίνητη θα είναι:

A. 5cm

B. 10cm

Γ. 7,5cm

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $1,5\lambda_1 + 1,5\lambda_2 = 15$ άρα $\lambda_1 + \lambda_2 = 10\text{cm}$ (1)

Οι παρατηρητές που βρίσκονται μπροστά από την πηγή μετράνε μήκος κύματος

$$\lambda_1 = \lambda - u_s T_s \quad (2)$$

ενώ οι παρατηρητές που βρίσκονται πίσω από την πηγή μετράνε μήκος κύματος

$$\lambda_2 = \lambda + u_s T_s \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων (2) και (3) θα βρούμε $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda$ άρα με την βοήθεια της σχέσης (1) θα βρούμε $\lambda = 5\text{cm}$.

Αρα σωστή απάντηση το Α.

Υδροπλάνο στη λίμνη Πολυφύτου

Ο Δήμαρχος Σερβίων-Βελβεντού θέλοντας να εκμηδενίσει την απόσταση Πειραιάς-Λίμνη Πολυφύτου αποφάσισε να αγοράσει ένα υδροπλάνο για να μπορεί ο ίδιος να πάει ταχύτατα από τα Σέρβια στην Αθήνα αλλά και για να έρχεται γρήγορα στα Σέρβια ο συνταξιούχος πλέον Διονύσης Μάργαρης . Ο Δήμαρχος μιας και υπάρχουν λεφτά αποσπά από την Aegean τον έμπειρο πλέον πιλότο και μαθητή του συγγραφέα της άσκησης τον Δημήτρη Τζιούτζια. Το υδροπλάνο που δεν διαθέτει και πολλά “κονφόρ” (ο Δήμος δεν έχει λεφτά για πέταμα) έχει τέσσερα καθίσματα που αποτελούνται από ιδανικά ελατήρια σταθεράς $K=400\pi^2\text{N/m}$ και το κάθε κάθισμα έχει μάζα $M_k=10\text{Kg}$. Στην πρώτη δοκιμαστική πτήση και για κακή τους τύχη υπάρχει κύμα στην λίμνη Πολυφύτου που κινείται με ταχύτητα $u=1,5\text{m/s}$ οπότε ο πιλότος που έχει μάζα 70Kg αποφασίζει να κάνει μία μικρή δοκιμαστική βόλτα μέσα στην λίμνη χωρίς να απογειωθεί το υδροπλάνο έχοντας επιβαίνοντες τον Δήμαρχο που έχει μάζα 80Kg το Διονύση που έχει μάζα 75Kg και τον δάσκαλο του πιλότου που έχει μάζα 90Kg . Αν το υδροπλάνο κινείται με ταχύτητα $u_2=4,5\text{m/s}$ σε σχέση με τη γέφυρα και κόντρα στο κύμα ποιος από τους επιβάτες θα απολαύσει περισσότερο την βόλτα. Δίνεται ότι η συχνότητα ταλάντωσης των μορίων του νερού $f=0,25\text{Hz}$.

A.Ο Δήμαρχος B.Ο Διονύσης Γ.Ο Πιλότος Δ.Ο Δάσκαλος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το υδροπλάνο κινείται αντίθετα με τη φορά διάδοσης του κύματος. Έτσι ο κάθε επιβάτης του υδροπλάνου θα αντιλαμβάνεται συχνότητα του κύματος που θα δίνεται από τη σχέση του φαινομένου Doppler

$$f_{\text{παρ}} = \frac{v + v_2}{v} f = 1\text{Hz}$$

Για να απολαύσει μέγιστα την βόλτα του ο επιβάτης θα πρέπει να βρεθεί σε κατάσταση συντονισμού.

Έτσι η ιδιοσυχνότητα του επιβάτη πρέπει να γίνει ίση με την $F_{\text{παρ}}$

Δηλαδή $F_o = F_{\text{παρ}}$ άρα $1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{M_k + M_\varepsilon}{k}}}$ και μετά από πράξεις $M_\varepsilon = 90\text{kg}$

Αρα το Δ είναι η σωστή απάντηση

Υ.Σ. Συνήθως σε αυτές τις περιπτώσεις πιο χαρούμενος είναι ο Δήμαρχος αλλά του την είχα στημένη.....

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012-2013

ΘΕΜΑ Α

Στις ερωτήσεις 1-4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί η σωστή απάντηση

1. Δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης πάνω σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο. Η στατική τριβή
- α. Έχει φορά προς τα εμπρός
 - β. Έχει φορά προς τα πίσω
 - γ. Μπορεί και να μην υπάρχει τριβή
 - δ. Είναι μεγαλύτερη της τριβής ολίσθησης

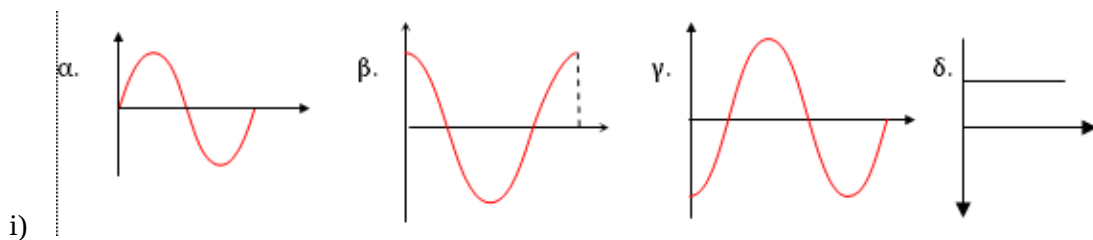
(Μονάδες 5)

2. Στο στάσιμο κύμα που έχει σχηματιστεί σε μία χορδή

- α. Όλα τα σημεία ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα
- β. Όλα τα σημεία έχουν φάση 0 ή π
- γ. Για να μετατραπεί όλη η μέγιστη δυναμική ενέργεια της χορδής σε μέγιστη κινητική ενέργεια χρειάζεται χρόνο $T/4$ όπου T η περίοδος ταλάντωσης μία κοιλίας του στάσιμου κύματος.
- δ. Η απόσταση μίας κοιλίας από τον πιο κοντινό δεσμό είναι συνεχώς $\lambda/4$ όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

(Μονάδες 5)

3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, του οποίου η επιτάχυνση μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $a=10\eta\mu 10t$ (S.I). Η γραφικά παράσταση της ταχύτητας σε σχέση με τον χρόνο μπορεί να είναι



(Μονάδες 5)

4. Η μετατόπιση ενός φάσματος ενός στοιχείου που βρίσκεται σε ένα αστέρι προς το ερυθρό σημαίνει ότι το αστέρι

- α. Είναι ακίνητο προς τη Γη
- β. Πλησιάζει προς τη Γη
- γ. Απομακρύνεται από τη Γη
- δ. Είναι αόρατο από τη Γη

(Μονάδες 5)

5. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες

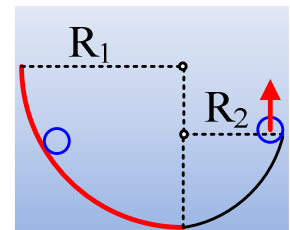
- α. Το διακρότημα επειδή έχει εξίσωση $\psi = A \sin \omega t$ είναι απλή αρμονική ταλάντωση
- β. Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα αέρια
- γ. Στις οπτικές ίνες δεν ισχύει ο νόμος του Snell
- δ. Όταν η συνισταμένη των ροπών και η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι ίσες με το 0 το στερεό ισορροπεί.
- ε. Στην διάρκεια μιας ελαστικής κρούσης οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων που συγκρούονται παραμένουν σταθερές.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

1) Ο γνωστός για τις πειραματικές δυνατότητες Βαγγέλης εκτελεί το παρακάτω πείραμα:

Ενώνει δύο μη λεία κατακόρυφα διαδοχικά τεταρτοκύκλια με ακτίνες R_1 και R_2 με $R_1 > R_2$ και αφήνει ένα λεπτό δαχτυλίδι (όχι χρυσό σε καιρό κρίσης βρισκόμαστε) από την κορυφή του πρώτου τεταρτοκύκλιου και καθώς το δαχτυλίδι κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει όταν βρίσκεται σε επαφή με τα δύο τεταρτοκύκλια ξαφνικά βγαίνει από το δεύτερο τεταρτοκύκλιο έχοντας κατακόρυφη ταχύτητα. Το μέγιστο ύψος που θα ανεβεί το κέντρο μάζας του δαχτυλιδιού σε σχέση με το σημείο επαφής των δύο τεταρτοκυκλίων που θα μετρήσει ο Βαγγέλης θα είναι:



A. $H_{\max} = R_1$ B. $H_{\max} = (R_1 - R_2)/2$ Γ. $H_{\max} = (R_1 + R_2)/2$

(Μονάδες 3)

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

2. Ο Διονύσης γνωστός συνταξιούχος λόγω του απεριορίστου ελεύθερου χρόνου παίζει με την κιθάρα του και παρατηρεί ότι:

Η μέγιστη απόσταση μίας κοιλίας από τον γειτονικό της δεσμό ότι είναι 10cm ενώ η ελάχιστη απόσταση τους είναι 6cm ενώ παρατηρεί επίσης ότι από την μέγιστη στην ελάχιστη απόσταση της κοιλίας από δεσμό απαιτείται χρόνος 0,2s. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί στην κιθάρα του Διονύση μπορεί να είναι

A. $\psi = 16 \sin \pi x / 12 \eta \mu 2,5 \pi t$ B. $\psi = 8 \sin \pi x / 12 \cdot \eta \mu 2,5 \pi t$ Γ. $\psi = 16 \sin \pi x / 4 \eta \mu 2,5 \pi t$ (x, ψ σε cm, t σε s)

(Μονάδες 2)

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

(Μονάδες 6)

3. Ο γνωστός κατασκευαστής i.p. σε dt Γιάννης παίζει με τα διαπασών του εργαστηρίου του. Με τη βοήθεια λίγου λιωμένου κεριού σε ένα από τα δύο όμοια διαπασών του εργαστηρίου του καταφέρνει να φτιάξει δύο διαπασών που να έχουν λόγο συχνοτήτων $f_1/f_2 = 11/12$. Πόσες ταλαντώσεις θα εκτελέσει το αυτί του Γιάννη αν χτυπήσει ταυτόχρονα τα δύο διαπασών σε χρόνο δύο διαδοχικών μηδενισμών της έντασης του ήχου που βγάζουν τα δύο διαπασών

A.10

B.14

Γ.11,5

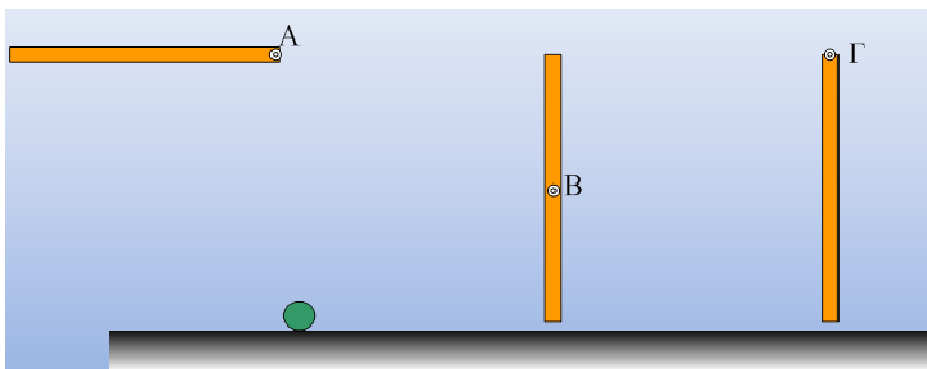
(Μονάδες 3)

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Τρεις ράβδοι ίδιας μάζας $M=3\text{kg}$ και ίδιου μήκους $L=1,2\text{m}$ μπορούν να στέφονται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιους άξονες έτσι ώστε το χαμηλότερό τους σημείο μόλις και να έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο λείο έδαφος. Η μεσαία ράβδος περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της σημείο B ενώ οι δύο ακριανές γύρω από το ανώτερο τους σημείο A και Γ αντίστοιχα. Η πρώτη ράβδος ανασηκώνεται έτσι ώστε να γίνει οριζόντια και αφήνεται ελεύθερη. Μόλις φτάσει στο κατώτερό της σημείο συγκρούεται με ακίνητο σημειακό σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν μετά από κάθε κρούση το σώμα που κινούνταν παραμένει ακίνητο και οι ράβδοι δεν μπορούν να συγκρουστούν μεταξύ τους να βρεθούν:

A) Η απώλεια ενέργειας σε κάθε κρούση

(Μονάδες 7)

B) Πόσες κρούσεις θα πραγματοποιηθούν μέχρι να επαναληφθεί η εικόνα του αρχικού σχήματος και πόσες συνολικά κρούσεις θα πραγματοποιηθούν.

(Μονάδες 9)

Γ) Να γίνει ποιοτικά το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας της κάθε ράβδου σε συνάρτηση με το χρόνο, στους ίδιους άξονες.

(Μονάδες 9)

$$I_{cm} = 1/12 ML^2.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίσκος μάζας $M_1 = 7\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,5\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα. Ο δίσκος ισορροπεί οριζόντιος με την βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου που ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Το ελατήριο είναι αρχικά συσπειρωμένο κατά $0,7\text{m}$.

Δεύτερος οριζόντιος δίσκος ίδιας ακτίνας με τον πρώτο αλλά με μάζα $M_2 = 1\text{kg}$ μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα. Δίνουμε ακαριαία αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 8\text{ r/sec}$ και αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο να κινηθεί μόνο με την επίδραση του βάρους του. Την στιγμή που ο δεύτερος δίσκος έχει εκτελέσει γωνιακή μετατόπιση $\theta = 6,4\text{rad}$ συγκρούεται με τον ακίνητο δίσκο που είναι δεμένος στο ελατήριο αλλά μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής. Μετά από λίγο το σύστημα λειτουργεί σαν ένας ενιαίος δίσκος. Να βρεθούν:

Α) Το ύψος από όπου αφέθηκε ο δεύτερος δίσκος

(Μονάδες 5)

Β) Η κοινή γωνιακή ταχύτητα του συστήματος των δύο δίσκων και το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης των δύο δίσκων

(Μονάδες 6)

Γ) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο δίσκων.

(Μονάδες 8)

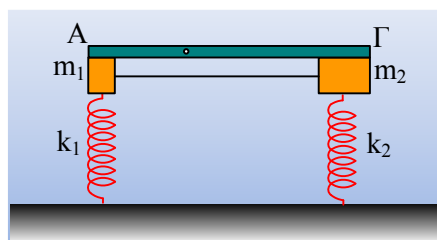
Δ) Η απώλεια ενέργειας εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

(Μονάδες 6)

$$\text{Δίνονται για τον δίσκο } I_{cm} = 0,5M.R^2.$$

Φούρκα που δημιουργεί ταλαντώσεις.

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα $M=3\text{Kg}$ και μήκος $L=0,8\text{m}$ ισορροπεί οριζόντια. Η ράβδος δεν είναι ομογενής αλλά το κέντρο μάζας βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $L/3$ από το άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί ενώ ακουμπά στα δύο σημειακά σώματα $m_1=1\text{Kg}$ στο άκρο Α και $m_2=3\text{Kg}$ στο άκρο Γ με την βοήθεια δύο ιδανικών κατακόρυφων ελατηρίων με σταθερές $K_1=100\text{N/m}$ και $K_2=300\text{N/m}$ όπως στο παρακάτω σχήμα



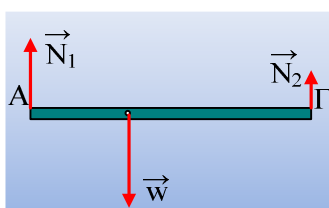
Ενώνουμε τα δύο σώματα με αβαρή ελαστική χορδή όπου μπορεί να διαδοθεί αρμονικό κύμα με ταχύτητα $u=1/\pi \text{ m/s}$. Την χρονική στιγμή $t=0$ αφαιρούμε αυτόματα την ράβδο ΑΓ με αποτέλεσμα τα σώματα m_1 και m_2 που είναι δεμένα στα ελατήρια να εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις.

Να βρεθούν:

- Α) Η αρχική παραμόρφωση του κάθε ελατηρίου
- Β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για καθένα από τα δύο σώματα αν υποθέσουμε ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω
- Γ) Η μορφή της χορδής την στιγμή που θα συναντηθούν τα δύο κύματα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Από τις συνθήκες ισορροπίας για την ράβδο θα έχουμε



$$N_1 + N_2 = W \quad (1) \quad -W \cdot \frac{L}{3} + N_2 L = 0 \quad (2) \quad \text{μετά από τις πράξεις θα βρούμε } N_1 = 20\text{N} \text{ και } N_2 = 10\text{N}$$

Για το κάθε ελατήριο θα έχουμε αντίστοιχα για την ισορροπία του $N_1' + m_1 g = K_1 x_1$ άρα $x_1 = 0,3\text{m}$ ενώ

για το δεύτερο σώμα $N_2' + m_2 g = K_2 x_2$ άρα $x_2 = \frac{4}{30}\text{m}$

Β) Μετά την αφαίρεση της ράβδου καταργούνται οι δυνάμεις αντίδρασης άρα αλλάζει η θέση ισορροπίας του κάθε σώματος. Έτσι οι νέες θέσεις ισορροπίας θα βρεθούν από τις σχέσεις $m_1 g = K_1 x_3$ άρα

$x_3=0,1\text{m}$ $m_2g=K_2x_4$ άρα $x_4=0,1\text{m}$. Επειδή το κάθε σώμα την στιγμή της απομάκρυνσης της σανίδας δεν έχει ταχύτητα θα βρίσκεται σε ακραία θέση άρα το $A_1=x_1-x_3=0,2\text{m}$ και $A_2=x_2-x_4=\frac{1}{30}\text{m}$.

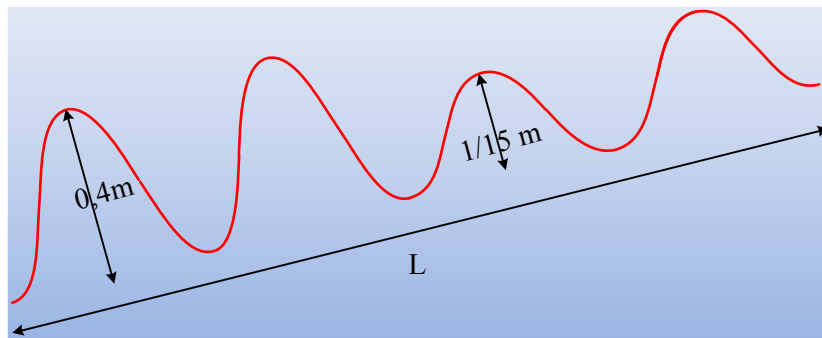
Επειδή έχουμε ορίσει θετική φορά είναι η προς τα πάνω θα έχουμε για το κάθε σώμα

$$y_1 = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \& \quad y_2 = \frac{1}{30}\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Γ) Το μήκος κύματος για το κάθε κύμα θα δίνεται από το νόμο της κυματικής $u=\lambda f$ και επειδή οι δύο πηγές έχουν την ίδια περίοδο τα μήκη κύματος θα είναι ίδια με $\lambda=0,2\text{m}$. Το κάθε κύμα θα κάνει χρόνο

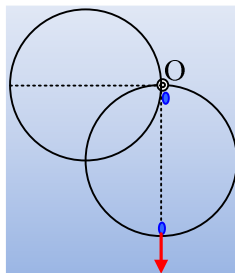
$t = \frac{L}{2v} = 0,4\pi \text{ sec}$ που αντιστοιχεί σε δύο πλήρεις ταλαντώσεις της κάθε πηγής. Πρέπει να

παρατηρήσουμε ότι οι θέσεις ισορροπίας δεν είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι το σχήμα τη χορδής θα είναι το παρακάτω



Μια κρούση δακτυλιδιού.

Δακτυλίδι μάζας $M=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από άκρο O της περιφέρειας του λεπτού δακτυλιδιού. Εκτρέπουμε το δακτυλίδι κατά γωνία $\theta=90^\circ$ από την θέση ισορροπίας του και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Την στιγμή που το δακτυλίδι έχει αποκτήσει την μέγιστη κινητική ενέργεια του συγκρούεται στιγμιαία και πλαστικά με αυτό ένα δεύτερο σημειακό σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ που έχει αφεθεί ελεύθερο από το άξονα O όπως στο παρακάτω σχήμα



Να βρεθούν:

- A) Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του δακτυλιδιού πριν την πλαστική κρούση
- B) Την απώλεια της ενέργειας του συστήματος δακτυλίδι-σημειακό σώμα εξαιτίας της κρούσης
- Γ) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σημειακού σώματος εξαιτίας της κρούσης
- Δ) Την μέγιστη γωνία που θα διαγράψει το σημειακό σώμα μετά την κρούση

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Η ροπή αδράνειας του δακτυλιδιού είναι με βάση τον ορισμό της ροπής αδράνειας $I_{\text{cm}}=MR^2$ και με την βοήθεια του κανόνα του Στάινερ $I_o=MR^2+MR^2=4\text{kg}\cdot\text{m}^2$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση του δακτυλιδιού θα έχουμε

$$MgR = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad \text{μετά τις πράξεις θα έχουμε} \quad \omega = \sqrt{10} \text{ r/s}$$

B) Με την βοήθεια την ΑΔΣ για την κρούση του σημειακού σώματος με το δακτυλίδι θα έχουμε

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \quad \text{άρα} \quad I_o \omega = I_{\text{τελ}} \omega_{\text{τελ}} \quad \text{άρα θα βρούμε} \quad \omega_{\text{τελ}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ r/s}$$

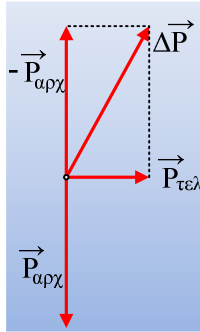
Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε $\frac{1}{2} I_o \omega^2 + mg2R = \frac{1}{2} I_{\text{τελ}} \omega_{\text{τελ}}^2 + Q_{\text{κρ}}$ άρα μετά τις πράξεις $Q_{\text{κρ}} = 30\text{J}$

Γ) Το μέτρο της ορμής του σημειακού σώματος πριν την κρούση είναι

$$P_{\alpha\rho\chi}=m u_{\alpha\rho\chi}=m\sqrt{g4R}=\sqrt{40}\text{ kgm/s}$$

Ενώ το μέτρο της τελικής ορμής του σημειακού σώματος αμέσως μετά την κρούση είναι

$$P_{\tau\epsilon\lambda}=m\omega_{\tau\epsilon\lambda}2R=\sqrt{10}\text{ kgm/s}$$



Και με την βοήθεια του πυθαγόρειου θεωρήματος θα έχουμε $\Delta P=5\sqrt{2}\text{ kgm/s}$

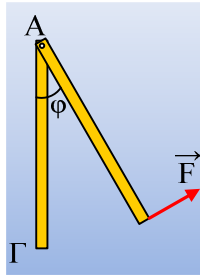
Δ)Με την βοήθεια της ΑΔΕ και μέχρι τη στιγμή που το στερεό θα σταματήσει θα έχουμε

$$\frac{1}{2} I_{\tau\epsilon\lambda}\omega_{\tau\epsilon\lambda}^2=Mgh_1+mgh_2$$

με $h_1=R-R\sin\varphi$ και $h_2=2R-2R\sin\varphi$ και μετά από τις πράξεις θα βρούμε $\sin\varphi=0,75$

Μια μεταβλητή δύναμη σε ράβδο.

Ράβδος ΑΓ μάζας $M=1\text{Kg}$ και μήκους $L=0,6\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το ένα της άκρο Α γύρω από οριζόντιο άξονα χωρίς τριβές. Την στιγμή $t=0$ και ενώ η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση αποκτά αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{r/s}$ και ταυτόχρονα εφαρμόζεται πάνω της μεταβλητή δύναμη F συνεχώς κάθετη στη ράβδο στο άκρο της Γ και με εξίσωση $F=5\eta\mu\phi$ (S.I.) όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την αρχική κατακόρυφη θέση της ράβδου όπως στο παρακάτω σχήμα



Η δύναμη F καταργείται μόλις μηδενιστεί το μέτρο της για πρώτη φορά μετά την εφαρμογής της.

Να βρεθούν:

- Α) Ο χρόνος που ασκήθηκε η δύναμη F
- Β) Η γραφική παράσταση του μέτρου της ροπής της δύναμης F σε συνάρτηση της γωνίας και μέχρι το μηδενισμό αυτής. Τι εκφράζει το περικλειόμενο εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των γωνιών; Μπορεί να υπολογιστεί το εμβαδόν; Αν ναι πόσο είναι αυτό το εμβαδόν;
- Γ) Η μέγιστη ισχύς της δύναμης
- Δ) Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου

Για την ράβδο $I_{cm}=1/12ML^2$.

Απάντηση:

- Α) Μια μεταβλητή δύναμη σε ράβδο.

Με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση θα έχουμε

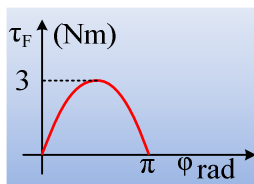
$$\Sigma\tau=I\alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad FL-MgL\eta\mu\phi/2=I\alpha_{γων} \quad \text{και} \quad \text{μετά από πράξεις} \quad \alpha_{γων}=\omega_0/s^2.$$

Παρατηρώ δηλαδή ότι η ράβδος θα εκτελέσει ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{r/s}$. Η δύναμη θα μηδενιστεί για πρώτη φορά όταν $\eta\mu\phi=0$ δηλαδή για γωνία $\phi=\pi$. Αρα ο χρόνος

που θα κάνει η ράβδος για να φτάσει στην ανώτερή της θέση εκεί όπου η δύναμη θα μηδενιστεί θα βρεθεί από τη σχέση $\theta = \omega_0 t$ ή $t = \pi/10$ s.

Β) Η ροπή της δύναμης F θα δίνεται από την σχέση $\tau_F = FL = 3\eta\mu\phi$ (S.I.)

Έτσι η γραφική της παράσταση θα είναι



Το περικλειόμενο εμβαδό εκφράζει το έργο της ροπής της δύναμης. Με την βοήθεια του ΘΜΚΕ από την αρχική θέση της ράβδου και μέχρι την ανώτερή της θέση θα έχουμε

$$W_F + W_W = \Delta K$$

και επειδή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της ράβδου είναι 0 το $W_F = Mgl = 6J$. Άρα και το περικλειόμενο εμβαδό θα είναι 6J.

Γ) Η ισχύς της δύναμης δίνεται από τον τύπο $P = \tau\omega$ (1)

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι σταθερή η ισχύς της δύναμης θα γίνει μέγιστη όταν η ροπή της θα γίνει μέγιστη. Αυτό συμβαίνει όταν η γωνία διαγραφής είναι $\pi/2$ άρα $\tau_{Fmax} = 3N.m$

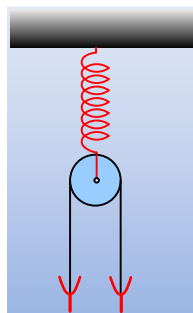
Με βάση την σχέση (1) $P_{max} = 30J/s$

Δ) Η ράβδος θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια στην χαμηλότερη θέση της τροχιάς εκεί δηλαδή όπου η δυναμική της ενέργεια είναι η ελάχιστη. Αυτό θα συμβεί όταν η ράβδος φτάσει στην αρχική της θέση. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την ανώτερη στην κατώτερη θέση της ράβδου θα έχουμε

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 + Mgl = \frac{1}{2} I \omega_{max}^2 \text{ και μετά από πράξεις θα βρούμε } \omega_{max} = 10\sqrt{2} \text{ r/s.}$$

Δύο διαπασών σε μια τροχαλία

Ομογενής τροχαλία έχει μάζα $M=8\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,5\text{m}$ μπορεί να ισορροπεί με την βοήθεια κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=560\text{N/m}$ που είναι δεμένο στο κέντρο της τροχαλίας με το ένα άκρο του και το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε οροφή όπως στο παρακάτω σχήμα.



Δύο σημειακά διαπασών με μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ είναι δεμένα από αβαρές και μη εκτατό νήμα που είναι περασμένο από το αυλάκι της τροχαλίας και εκπέμπουν ήχους ίδιας συχνότητας $f_s=1360\text{Hz}$. Την στιγμή $t=0$ που το m_1 και το m_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχει από το έδαφος ύψος $H=3,8\text{m}$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και τα δυο σώματα κινούνται ενώ το κέντρο μάζας της τροχαλίας παραμένει στη θέση του. Την στιγμή $t=1\text{sec}$ κόβουμε ταυτόχρονα τα δύο νήματα με αποτέλεσμα τα δύο διαπασών να φτάσουν μετά από λίγο στο έδαφος και να καρφωθούν σε αυτό χωρίς να καταστραφούν.

Να βρεθούν:

- A) Η μέγιστη κινητική ενέργεια της τροχαλίας μετά το κόψιμο των νημάτων
- B) Τη μέγιστη και την ελάχιστη συχνότητα που θα μπορούσαν να ακούσουν δύο ακίνητοι παρατηρητές που θα βρισκόταν στο έδαφος και στην ίδια ευθεία με τα διαπασών σε όλη την διάρκεια της κίνησης των διαπασών.
- Γ) Ο αριθμός των μεγίστων και των ελαχίστων έντασης ήχου που θα σχηματιστούν στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο διαπασών όταν αυτά βρεθούν στο έδαφος.

Δίνεται για την τροχαλία $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$ και για τον ήχο $v_{\text{ήχ}}=340\text{m/s}$.

Απάντηση:

A) Για την κίνηση των σωμάτων και με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα έχουμε

$$m_1g - T_1 = m_1a \quad (1) \quad T_2 - m_2g = m_2a \quad (1)$$

Για την τροχαλία θα έχουμε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση θα έχουμε

$$T_1R - T_2R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_{\text{γων}} \quad (3)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις (1), (2) & (3) θα βρούμε μετά από τις πράξεις $a=2\text{m/s}^2$ $T_1=32\text{N}$ & $T_2=24\text{N}$

Για την ισορροπία της τροχαλίας θα έχουμε $Kx_1 = Mg + T_1 + T_2$ άρα $x_1 = 136/560 \text{ m}$

Μετά το κόψιμο των νημάτων η θέση ισορροπίας της τροχαλίας σε σχέση με το φυσικό μήκος του ελατηρίου θα δίνεται από την σχέση $Kx_2 = Mg$ άρα $x_2 = 80/560 \text{ m}$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του κέντρου μάζας της τροχαλίας θα είναι $A = x_2 - x_1 = 0,1 \text{ m}$

Η τροχαλία μετά το κόψιμο των δύο σκοινιών δέχεται μόνο την κατακόρυφη δύναμη του ελατηρίου αλλά και το βάρος της. Και οι δύο δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο της τροχαλίας άρα δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Έτσι η τροχαλία εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας της αλλά και το κέντρο μάζας της τροχαλίας εκτελεί Γ.Α.Τ. με πλάτος A . Η σταθερή γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι $\omega_{\max} = \alpha_{\gamma\omega\nu} t = 4 \text{ rad/s}$.

$$K_{\text{ολ}\max} = \frac{1}{2} K A^2 + \frac{1}{2} I \omega_{\max}^2 = 10,8 \text{ J}$$

Β) Την στιγμή που κόβεται το κάθε νήμα το κάθε διαπασών έχει ταχύτητα μέτρου $u = at = 2 \text{ m/s}$ και έχουν διανύσει διάστημα $h_1 = \frac{1}{2} at^2 = 1 \text{ m}$. Το μικρό σώμα ανεβαίνει ενώ το μεγάλο κατεβαίνει. Έχουμε δύο ακίνητους παρατηρητές και δύο πηγές ηχητικών κυμάτων άρα η συχνότητα που ακούει ο κάθε παρατηρητής θα δίνεται από τη σχέση

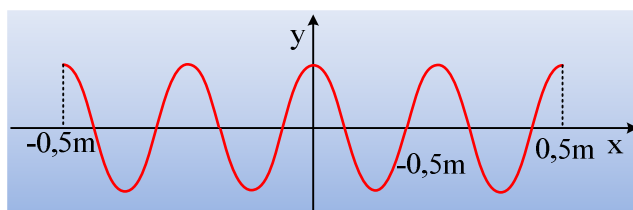
$$f_s = \frac{v_{\eta\chi}}{v_{\eta\chi} \pm v} f_s \quad (4)$$

η μέγιστη συχνότητα που θα ακούσει ο παρατηρητής θα είναι όταν η πηγή πλησιάζει με την μεγαλύτερη ταχύτητα και η ελάχιστη συχνότητα που θα αντληφθεί ο παρατηρητής θα συμβεί όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή. Η μέγιστη ταχύτητα απομάκρυνσης από τους παρατηρητές είναι η $u = 2 \text{ m/s}$ γιατί το σώμα μάζας m_2 αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος θα εκτελέσει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και έτσι η $F_{\min} = 340.1340/342 = 1352 \text{ Hz}$. Η μέγιστη συχνότητα που θα αντληφθεί ο παρατηρητής θα είναι όταν το σώμα μάζας m_2 θα φτάσει στο έδαφος. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για το σώμα m_2 και αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος θα έχουμε

$$m_2 g(H + h_1) + \frac{1}{2} m_2 u^2 = \frac{1}{2} m_2 u_{2\max}^2 \text{ θα βρούμε μετά τις πράξεις } u_{2\max} = 10 \text{ m/s}$$

Με αντικατάσταση της μέγιστης ταχύτητας στην σχέση (4) θα έχουμε $f_{\max} = 340.1360/330 = 1401,2 \text{ Hz}$.

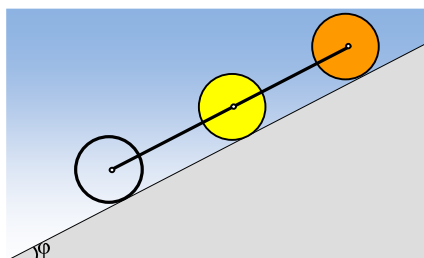
Γ) Μετά το κάρφωμα και των δύο διαπασών στο έδαφος τα δύο διαπασών λειτουργούν σαν πηγές κύματος με σταθερό μήκος κύματος $\lambda = u_{\eta\chi}/f_s = 0,25 \text{ m}$. Πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο διαπασών, που θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2R = 1 \text{ m}$, θα σχηματιστεί στάσιμο κύμα η μορφή του οποίου θα είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



Έτσι στο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στα δύο διαπασών θα υπάρχουν 8 σημεία απόσβεσης και 7 σημεία ενίσχυσης.

Το τραινάκι...

Ένα λεπτό δαχτυλίδι μάζας M και ακτίνας R μία σφαίρα μάζας M και ακτίνας R και ένας κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R συνδέονται μέσω αβαρών ράβδων μεταξύ τους σχηματίζοντας «τραινάκι» με το δαχτυλίδι να παίζει το ρόλο του «μηχανοδηγού» και την σφαίρα με τον κύλινδρο να ακολουθούν διαδοχικά το δαχτυλίδι. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο από κάποιο ύψος ενός αρκετά μεγάλου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ και το σύστημα αρχίζει να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.



Να βρεθεί η επιτάχυνση του συστήματος.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας του κάθε στερεού $I = \lambda MR^2$ με $\lambda = 1$ για το δαχτυλίδι $\lambda = 0,4$ για την σφαίρα και $\lambda = 0,5$ για τον κύλινδρο ενώ για το κεκλιμένο επίπεδο $\eta\mu\varphi = 0,49$.

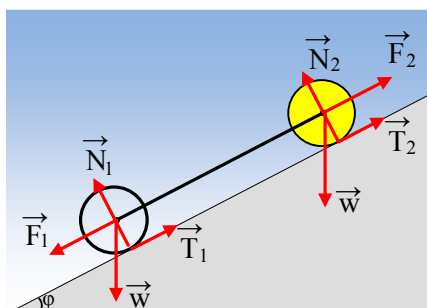
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν το κάθε στερεό κυλιόταν χωρίς να ολισθαίνει από μόνο του θα μπορούσαμε να βρούμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας τους κάθε στερεού με βάσει τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση

$$Mg\eta\mu\varphi - T = Ma \quad (1) \quad TR = \lambda MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

και από τις σχέσεις αυτές θα βρούμε $a = g\eta\mu\varphi / (\lambda + 1)$ οπότε με βάση την τιμή του λ του κάθε στερεού $a_{\sigma\varphi} > a_{\kappa\upsilon\lambda} > a_{\delta\alpha\chi}$.

Όταν θα συνδεθούν το δαχτυλίδι με την σφαίρα για να αποκτήσουν κοινή επιτάχυνση θα πρέπει η δύναμη της πρώτης ράβδου να αυξήσει την επιτάχυνση του δαχτυλιδιού και να μειώσει την επιτάχυνση της σφαίρας έτσι ώστε να αποκτήσουν την ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση οπότε και πάλι με την βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα για την στροφική και την μεταφορική κίνηση του πρώτου συστήματος θα έχουμε



$$Mg\eta\mu\phi - T_1 + F_1 = Ma \quad (3) \quad T_1 R = 0,5MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (4) \quad Mg\eta\mu\phi - T_2 - F_2 = Ma \quad (5) \quad T_2 R = 0,4MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (6)$$

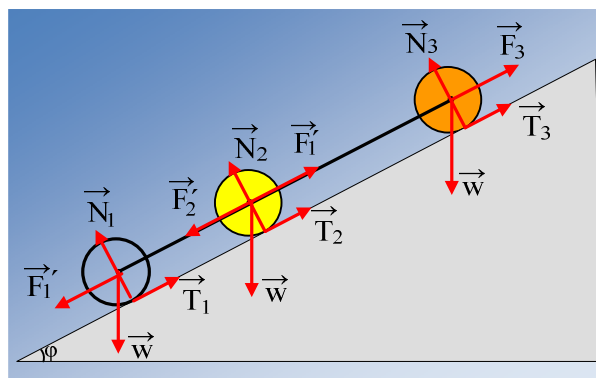
Η αβαρής ράβδος εκτελεί μεταφορική κίνηση με κοινή επιτάχυνση την επιτάχυνση του συστήματος των δύο στερεών σωμάτων. Άρα με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στα άκρα της ράβδου θα ασκούνται αντίθετες δυνάμεις άρα δυνάμεις ίσου μέτρου άρα $F_1 = F_2$

Με αντικατάσταση της σχέσης (4) στην (3) και της σχέσης (6) στην σχέση (5) και πρόσθεση των σχέσεων που θα προκύψουν θα βρούμε $\alpha_{\text{συσ}} = g\eta\mu\phi/1,7 \quad (8)$

Από την σχέση (8) παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση του συστήματος δαχτυλιδιού-σφαίρας είναι μικρότερη από την επιτάχυνση του κυλίνδρου αν κυλιόταν μόνος του. Έτσι όταν και ο κύλινδρος θα συνδεθεί με το σύστημα θα πρέπει η επιτάχυνσή του κυλίνδρου να μειωθεί ενώ η επιτάχυνση του συστήματος δαχτυλιδιού σφαίρας να αυξηθεί για να αποκτηθεί και πάλι κοινή επιτάχυνση. Έτσι η δύναμη της δεύτερης ράβδου θα πρέπει να σπρώχνει το σύστημα προς τα κάτω ενώ τον κύλινδρο προς τα πάνω.

Η κάθε αβαρής ράβδος εκτελεί μεταφορική κίνηση με κοινή επιτάχυνση την επιτάχυνση του συστήματος όλων των στερεών σωμάτων. Άρα με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στα άκρα της κάθε ράβδου θα ασκούνται αντίθετες δυνάμεις άρα δυνάμεις ίσου μέτρου.

Έτσι με βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα στην μεταφορική και περιστροφική κίνηση όλων των στερεών θα έχουμε



Δαχτυλιδι $Mg\eta\mu\phi - T_1 + F'_1 = Ma \quad (9)$

$$T_1 R = MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (10) \quad \text{και με αντικατάσταση } Mg\eta\mu\phi + F'_1 = 2Ma \quad (11)$$

Σφαίρα $Mg\eta\mu\phi + F'_2 - F'_1 - T_2 = Ma \quad (12)$

$$T_2 R = 0,4MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (13) \quad \text{και με αντικατάσταση } Mg\eta\mu\phi + F'_2 - F'_1 = 1,4Ma \quad (14)$$

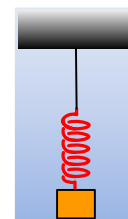
Κύλινδρος $Mg\eta\mu\phi - T_3 - F'_2 = Ma \quad (15)$

$$T_3 R = 0,5MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (16) \quad \text{και με αντικατάσταση } Mg\eta\mu\phi - F'_2 = 1,5Ma \quad (17)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη την (11) (14) και (17) θα έχουμε $3Mg\eta\mu\phi = 4,9Ma$ άρα $a = 3g\eta\mu\phi/4,9 = 3m/s^2$.

Το ελατήριο στο άκρο νήματος.

Μη εκτατό νήμα μήκους $l=15\text{cm}$ και με όριο αντοχής μεγαλύτερο από 30N στερεώνεται σε οροφή εργαστηρίου. Στο κάτω μέρος του νήματος στερεώνουμε κατακόρυφο ελατήριο σταθερά $K=100\text{N/m}$ και στο κάτω μέρος του ελατηρίου ισορροπεί σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$.



Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d=0,2\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο την χρονική στιγμή $t=0$. Κάποια στιγμή το νήμα χαλαρώνει αλλά δεν εμποδίζει την κίνηση του συστήματος οπότε μετά από λίγο το πάνω άκρο του ελατηρίου φτάνει στην οροφή του εργαστηρίου και χωρίς απώλεια ενέργειας το ελατήριο κολλάει στην οροφή. Να βρεθούν:

- A) Η χρονική εξίσωση του μέτρου της τάσης του νήματος.
- B) Η χρονική στιγμή της επαφής του άκρου του ελατηρίου με την οροφή.
- Γ) Η μέγιστη δυναμική του ελατηρίου στην διάρκεια του παραπάνω πειράματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για τη θέση ισορροπίας ισχύει $mg=Kx_1$ άρα $x_1=0,1\text{m}$. Το σύστημα ταλαντώνεται μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος ενώ στην συνέχεια το σώμα θα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και μέχρι να ακουμπήσει το ελατήριο στην οροφή οπότε θα ξαναρχίσει εκ νέου η ταλάντωση. Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι $\psi=A\eta\mu(\omega t+\phi_0)$ και για χρόνο $T/4 + T/12 = T/3$ μιας και η θέση φυσικού μήκους είναι στην $\psi=A/2$ άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$$\psi=0,2\eta\mu(10t+3\pi/2) \quad 0 \leq t \leq \pi/15 \quad (\text{SI})$$

Το μέτρο της τάσης του νήματος είναι συνεχώς ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου

Ετσι για την δύναμη του ελατηρίου θα έχουμε $F_{ελ}-mg=-K\psi$ και μετά την αντικατάσταση της εξίσωσης της απομάκρυνσης θα έχουμε

$$T=F_{ελ}=10-20\eta\mu(10t+3\pi/2) \quad 0 \leq t \leq \pi/15 \quad (\text{SI})$$

B) Η ταχύτητα του σώματος την στιγμή που το νήμα χαλαρώνει θα βρεθεί με την βοήθεια της ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2} m u_0^2 + \frac{1}{2} K x_1^2 = \frac{1}{2} K A^2 \quad \text{θα βρεθεί μετά από τις πράξεις } u_0 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Το σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω θα χρειασθεί χρόνο που θα βρεθεί από την εξίσωση:

$$l = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{άρα } t = \frac{\sqrt{3}}{10} \text{ s.}$$

Αρα ο συνολικός χρόνος μέχρι την επαφή του ελατηρίου με την οροφή θα είναι $t_{ολ} = \left(\frac{\pi}{15} + \frac{\sqrt{3}}{10} \right) \text{s} = 0,382\text{s}$

Γ) Η ταχύτητα του σώματος θα βρεθεί από την σχέση $u = u_0 - gt$ και θα βρεθεί μετά από τις πράξεις $u_{τελ} = 0\text{m/s}$. Ετσι εκείνη τη στιγμή το σώμα δεν έχει ταχύτητα και θα εκτελέσει νέα ταλάντωση με νέο πλάτος το $x_1=0,1\text{m}$. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι τώρα $x_{\max}=2x_1=0,2\text{m}$.

Η αρχική μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου ήταν $X_{\alphaρχ\max}=x_1+A_{\alphaρχ}=0,3\text{m}$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι στην διάρκεια του πειράματος την στιγμή $t=0$ και θα είναι $U_{\max} = \frac{1}{2} K x_{\alphaρχ\max}^2 = 4,5\text{J}$

Κρούση δύο ράβδων και χρόνος κρούσης.

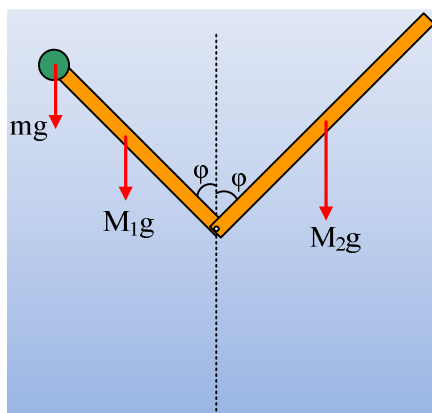
Δύο λεπτότατοι ελαστικοί ράβδοι μήκους $L_1=0,6\text{m}$ & $L_2=0,8\text{m}$ έχουν μάζα $M_1=4/3\text{Kg}$ και $M_2=3\text{Kg}$ αντίστοιχα μπορούν να περιστρέφονται γύρω από οριζόντιο κοινό άξονα που διέρχεται από το ένα τους άκρο. Στο ελεύθερο άκρο της πρώτης ράβδου μάζας M_1 κολλάμε σημειακό σώμα μάζας m . Οι δύο ράβδοι φέρνονται σε κατακόρυφη θέση και αφήνονται ταυτόχρονα δίνοντας τους ελάχιστη ώθηση έτσι ώστε να κινούνται αντίθετα. Αν οι δύο ράβδοι συγκρουστούν ελαστικά την στιγμή που αποκτούν ταυτόχρονα την μέγιστη κινητική τους ενέργεια να βρεθούν:

- Α) Η μάζα m .
- Β) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της κάθε ράβδου αμέσως μετά την κρούση τους.
- Γ) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m κατά την διάρκεια της κρούσης.
- Δ) Ποια από τις δύο ράβδος θα σταματήσει πρώτη για πρώτη φορά και που θα συμβεί αυτό.

Δίνεται για την κάθε ράβδο $I_{cm}=1/12ML^2$.

Απάντηση

Α) Αν οι δύο ράβδοι είχαν συνεχώς την ίδια γωνιακή επιτάχυνση και επειδή η αρχική τους γωνιακή ταχύτητα έχει μηδενικό μέτρο οι ράβδοι θα έφταναν ταυτόχρονα στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς τους εκεί που θα έχουν και την μέγιστη κινητική τους ενέργεια.



Ετσι για την πρώτη ράβδο μαζί με το μπαλάκι της και από το νόμο της της στροφικής κίνησης

$$M_1g \cdot \frac{1}{2} L_1 \sin \phi + mg L_1 \sin \phi = I_1 \alpha \sin \phi \quad (1)$$

Και για την δεύτερη ράβδο

$$M_2g \cdot \frac{1}{2} L_2 \sin \phi = I_2 \alpha \sin \phi \quad (2)$$

Αν διαιρέσουμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη θα έχουμε $M_1(L_2-L_1)=m(3L_1-2L_2)$ και μετά από πράξεις θα βρούμε $M_1=m$ άρα $m=4/3\text{Kg}$

Β) Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την ανώτερη στην κατώτερη θέση της κάθε ράβδου θα έχουμε

$$M_2gL_2 = \frac{1}{2} I_2\omega_2^2 \text{ και μετά τις πράξεις θα βρούμε } \omega_2 = 5\sqrt{3} \text{ r/s}$$

$M_1gL_1 + mg2L_1 = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2$ και μετά τις πράξεις θα βρούμε $\omega_1 = 5\sqrt{3} \text{ r/s}$ ίδια φυσικά κατά μέτρο με την ω_2 μιας και οι δύο ράβδοι έχουν κοινό χρόνο κίνησης με συνεχώς την ίδια στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση.

$$\text{Παρατηρώ ότι } I_1 = \frac{1}{3} M_1L_1^2 + mL_1^2 = 0,64\text{kgm}^2 \text{ και } I_2 = \frac{1}{3} M_2L_2^2 = 0,64\text{kgm}^2.$$

Υπάρχει ελαστική κρούση δύο ράβδων που έχουν την ίδια ροπή αδράνειας άρα κατ' αναλογία με τις κεντρικές ελαστικές κρούσεις των σημειακών σωμάτων οι ράβδοι θα ανταλλάξουν γωνιακές ταχύτητες έτσι τα μέτρα των δύο νέων γωνιακών ταχυτήτων θα είναι και πάλι $\omega_1' = \omega_2' = 5\sqrt{3} \text{ r/s}$.

Γ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της μάζας m πριν αλλά και μετά την κρούση θα είναι:

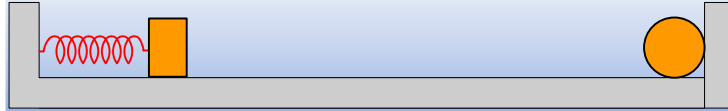
$$u_1 = u_1' = \omega L_1 = 3\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Άρα } \Delta P = mu_1' - (-mu_1) = 2mu_1 = 8\sqrt{3} \text{ kgm/s}$$

Δ) Η κάθε ράβδος θα αρχίσει να ανεβαίνει προς την αντίθετη της αρχικής κατεύθυνσης αλλά και πάλι με την ίδια ακριβώς γωνιακή επιβράδυνση αυτή τη φορά. Επειδή οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες κατά μέτρο των δύο ράβδων είναι ίδιες οι ράβδοι θα φτάσουν ταυτόχρονα και πάλι στην αρχική τους θέση έχοντας μηδενική γωνιακή ταχύτητα όση ήταν και η αρχική τους φυσικά μιας και δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας κατά την κρούση.

Πού θα γίνει η κρούση

Λείος κύβος ακμής $a=2R=0,4\text{m}$ και μάζας $M_1=3\text{Kg}$ είναι δεμένος με ιδανικό ελατήριο φυσικού μήκους $L_0=0,5\text{ m}$ και σταθεράς $K=300\pi^2\text{N/m}$ η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο σε κατακόρυφο τοίχο. Λεία σφαίρα ακτίνας $R=0,2\text{m}$ και μάζας $M_2=3\text{Kg}$ είναι ακίνητη στην άλλη άκρη του οριζόντιο λείου δαπέδου και σε επαφή με κατακόρυφο τοίχο όπως στο παρακάτω σχήμα



Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $x_1=0,1\text{ m}$ και την στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο ενώ την ίδια στιγμή δίνουμε στο κέντρο μάζας της σφαίρας ταχύτητα μέτρου $u_{cm}=\pi\sqrt{3}\text{ m/s}$ και κατάλληλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε να αρχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πλησιάζοντας τον κύβο. Η κρούση των δύο στερεών είναι κεντρική και ελαστική και διαρκεί ελάχιστο χρόνο όπως επίσης και η κάθε κρούση της σφαίρας με τον κατακόρυφο τοίχο. Αν η κρούση των δύο στερεών συμβεί σε τέτοια θέση όπου ο κύβος φτάνει για πρώτη φορά μετά την στιγμή $t=0$ και μετά την κρούση τους ο κύβος εκτελεί ταλάντωση με το μέγιστο δυνατό πλάτος να βρεθούν:

- A) Το οριζόντιο μήκος του δωματίου
- B) Το είδος της κίνησης του κάθε σώματος ξεχωριστά και να βρεθεί η περίοδος του φαινομένου
- Γ) Η γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας του ανώτερου σημείου της σφαίρας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Για να εκτελεί ο κύβος ταλάντωση με το μέγιστο δυνατό πλάτος θα πρέπει να πάρει από τη σφαίρα την μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα ενέργειας. Αυτό θα συμβεί μόνο αν η σφαίρα μείνει ακίνητη μεταφορικά. Η στροφική κατάσταση της σφαίρας δεν μπορεί να αλλάξει μιας και όλες οι κρούσεις είναι κεντρικές και οι δυνάμεις επαφής δεν μπορούν να προκαλέσουν στην διάρκεια της κρούσης καμία ροπή καθώς επίσης δεν μπορούν να αναπτυχθούν τριβές μιας και τα στερεά είναι λεία. Επειδή τα στερεά έχουν ίδιες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι η ταχύτητα του κύβου θα πρέπει να έχει μέτρο μηδέν την στιγμή της κρούσης. Θα πρέπει να βρίσκεται δηλαδή σε ακραία θέση της ταλάντωσής του. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην θέση $+A$ μιας και φτάνει στην θέση αυτή για πρώτη φορά μετά την χρονική στιγμή $t=0$. Ο χρόνος για να φτάσει εκεί θα είναι $t_1=T/2=0,1\text{sec}$. Στο ίδιο χρόνο η σφαίρα εκτελεί ομαλή μεταφορική και στροφική κίνηση διανύοντας το κέντρο μάζας του απόσταση $S=u_{cm}T/2=0,1\pi\sqrt{3}\text{ m}$

Το μήκος του δωματίου θα είναι $S_{ολ}=L_0+A+a+2R+S=1,5+0,1\pi\sqrt{3}\approx 2\text{ m}$

B) Η σφαίρα αρχικά κυλιέται μέχρι να γίνει η πρώτη σύγκρουση με τον κύβο ενώ ο κύβος εκτελεί μέρος γ.α.τ. από την ακραία αρχική του θέση $-A$ μέχρι την $+A$ αυτό διαρκεί αρχικό χρόνο $\Delta t_1=T/2=0,1\text{s}$.

Στην συνέχεια ο κύβος συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα με αποτέλεσμα να ανταλλά-

ξουν ταχύτητες τα κέντρα μάζας τους. Έτσι ο κύβος τώρα θα εκτελεί νέα γ.α.τ. με πλάτος που θα βρεθεί με την βοήθεια της ΑΔΕΤ

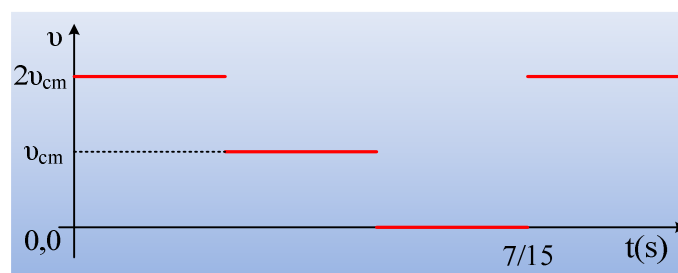
$$\frac{1}{2} K A^2 + \frac{1}{2} M_1 u_{cm}^2 = \frac{1}{2} K A'^2 \text{ και μετά από πράξεις θα βρούμε } A' = 0,2m.$$

Το κέντρο μάζας της σφαίρας θα μείνει ακίνητο ενώ η στροφική της κατάσταση δεν θα αλλάξει. Αυτό θα συμβεί μέχρι ο κύβος να επιστρέψει στη θέση της κρούση και αυτό θα διαρκέσει χρονικό διάστημα

$$\Delta t_2 = T/12 + T/4 + T/4 + T/12 = 5/15s$$

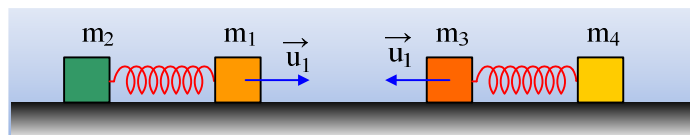
Εκείνη την στιγμή τα σώματα θα ανταλλάξουν και πάλι ταχύτητες οπότε ο κύβος θα μείνει ακίνητος στιγμιαία ενώ η σφαίρα θα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $u_{cm} = \pi\sqrt{3}$ m/s ενώ θα συνεχίσει να περιστρέφεται κατά την αρχική φορά μέχρι το κέντρο μάζας να διανύσει και πάλι διάστημα $S = 0,1\pi\sqrt{3}$ m οπότε θα συγκρουστεί ακαριαία με το τοίχο για να αλλάξει φορά το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας και να ξαναρχίσει η κύλιση της σφαίρας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και την χρονική στιγμή $t=0$. Ο χρόνος αυτός θα είναι $\Delta t_2 = S/u_{cm} = 0,1s$. Ο χρόνος όμως αυτός αντιστοιχεί σε χρόνο $T/2$ για τον κύβο. Έτσι ο κύβος θα βρεθεί στην αρχική του θέση όπου βρισκόταν και την χρονική στιγμή $t=0$. Έτσι το φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο $T_{\text{κιν}} = T/2 + \Delta t_1 + \Delta t_2 = 7/15$ s

Γ) Μέχρι την πρώτη κρούση το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου της σφαίρας είναι $2u_{cm} = 2\pi\sqrt{3}$ m/s. Μετά την πρώτη τους κρούση και μέχρι να γίνει η δεύτερη κρούση το ανώτερο σημείο της σφαίρας έχει μόνο την ταχύτητα περιστροφής που φυσικά έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας $u_{cm} = \pi\sqrt{3}$ m/s. Μετά την δεύτερη κρούση η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά ενώ περιστρέφεται αριστερόστροφα. Έτσι το συνολικό μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου είναι 0 μιας και η ταχύτητα περιστροφής είναι αντίθετη της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας. Αυτό θα συμβαίνει μέχρι να γίνει η πρώτη κρούση με τον τοίχο οπότε θα ξαναρχίσει η κύλιση και θα φτάσουμε και πάλι στην αρχική κατάσταση. Έτσι η γραφική παράσταση θα έχει μορφή



2^ο Θέμα. Εξάσκηση στις εξισώσεις της ελαστικής κρούσης.

Δύο σώματα με μάζες $m_1=1\text{Kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ κινούνται με την ίδια σταθερή ταχύτητα μέτρου $u_1=8\text{m/s}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένα με ιδανικό ελατήριο σταθεράς K . Ένα πανομοιότυπο σύστημα αλλά με μάζες $m_3=3\text{kg}$ και $m_4=1\text{kg}$ με ελατήριο σταθεράς K κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_3=4\text{m/s}$ αντίθετης φοράς της u_1 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Αν η κρούση των M_1 και M_2 είναι κεντρική και ελαστική και διαρκεί αμελητέο χρόνο ο λόγος των μέγιστων δυναμικών ενεργειών των δύο ελατηρίων μετά την κρούση των σωμάτων θα είναι:

- A.5 B. 8,8 Γ. 4,5 Δ. 9

Απάντηση:

Για την ελαστική κρούση των σωμάτων με μάζες m_1 και m_3 θα έχουμε από τους γνωστούς τύπους

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} u_1 + \frac{2m_3}{m_1 + m_2} u_3 = -10\text{m/s}$$

$$u'_3 = \frac{2m_1}{m_1 + m_3} u_1 + \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_2} u_3 = 2\text{m/s}$$

Τα ελατήρια θα αποκτήσουν τη μέγιστη παραμόρφωσή τους όταν τα σώματα θα αποκτήσουν την ίδια κατά μέτρο και φορά ταχύτητα. Με την βοήθεια της ΑΔΟ για κάθε επιμέρους σύστημα θα έχουμε

$$m_2 u_1 - m_2 u'_1 = (m_1 + m_2) u_{\text{συσ1}} \quad \text{άρα μετά την αντικατάσταση } u_{\text{συσ1}} = 3,5\text{m/s}$$

$$m_3 u'_3 - m_4 u_3 = (m_3 + m_4) u_{\text{συσ2}} \quad \text{άρα μετά την αντικατάσταση } u_{\text{συσ2}} = 0,5\text{m/s}$$

Με την βοήθεια του ΑΔΕ για κάθε επιμέρους σύστημα θα έχουμε

$$\frac{1}{2} m_2 u_1^2 + \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u_{\text{συσ1}}^2 + U_{\text{ελ,max1}} \quad \text{άρα μετά από πράξεις } U_{\text{ελ,max1}} = 121,5\text{J}$$

$$\frac{1}{2} m_3 u_3'^2 + \frac{1}{2} m_4 u_3^2 = \frac{1}{2} (m_3 + m_4) u_{\text{συσ2}}^2 + U_{\text{ελ,max2}} \quad \text{άρα μετά από πράξεις } U_{\text{ελ,max2}} = 13,5\text{J}$$

Άρα ο λόγος είναι $U_{\text{max1}}/U_{\text{max2}}=9$ άρα σωστή απάντηση το Δ.

Στάσιμα κύματα και Doppler.

Δύο ελαστικές ίδιες χορδές από το ίδιο υλικό στερεώνονται στο ένα τους άκρο από ακλόνητο σημείο έτσι ώστε να είναι οριζόντιες και να απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση $D=5\text{ cm}$. Πάνω στις χορδές έχει σχηματιστεί στάσιμο κύμα και στο ελεύθερο άκρο των δύο χορδών έχει σχηματιστεί κοιλία. Όσα τα σημεία της κάθε χορδής ταλαντώνονται, ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και με το ίδιο μέγιστο πλάτος και στις χορδές. Την χρονική στιγμή $t=0$ το ελεύθερο άκρο της πάνω χορδής βρίσκεται στην θέση $\psi=0$ και έχει θετική ταχύτητα ενώ της κάτω χορδής βρίσκεται στη θέση $\psi=0$ αλλά έχει αρνητική ταχύτητα.



Τοποθετούμε στο ελεύθερο άκρο της κάτω χορδής μία σημειακή αβαρή πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας F_s ενώ στο πάνω ελεύθερο άκρο τοποθετούμε έναν αβαρή ανιχνευτή ήχων. Παρατηρούμε ότι ο ανιχνευτής ανιχνεύει περιοδικά μέγιστη αλλά και ελάχιστη συχνότητα και για το γινόμενο αυτών των συχνοτήτων να ισχύει $F_{\max} \cdot F_{\min} = 250000\text{ Hz}^2$ ενώ ο λόγος τους είναι $F_{\max}/F_{\min} = 1,201$. Για την κατακόρυφη απόσταση του ανιχνευτή από την πηγή ισχύει η σχέση $1\text{ cm} \leq d$. Αν ο ανιχνευτής και η πηγή των ηχητικών κυμάτων μετακινηθούν προς τα δεξιά και πάνω στις χορδές παρατηρούμε ότι για πρώτη φορά ο ανιχνευτής ανιχνεύει διαρκώς την τιμή F_s όταν διανύσουν ταυτόχρονα οριζόντια απόσταση 5 cm . Αν πάνω στην κάθε χορδή υπάρχουν 10 ακίνητα σημεία να βρεθούν:

A) Το μήκος της κάθε χορδής

B) Η συχνότητα F_s της πηγής

Γ) Οι εξισώσεις των δύο στάσιμων κυμάτων που δημιουργήθηκαν στις χορδές.

Δίνεται η $v_{\text{ηχ}} = 340\text{ m/s}$ και $(1,201)^{1/2} = 1,01$

Απάντηση:

A) Για να ανιχνεύει ο ανιχνευτής την συχνότητα της πηγής θα πρέπει η σχετική απόσταση πηγής παρατηρητή να είναι σταθερή. Αυτό μπορεί να συμβεί ή όταν και οι δύο κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με το ίδιο μέτρο ταχύτητας ή όταν και οι δύο είναι ακίνητοι. Στις χορδές μας όμως όλα τα σημεία και μέχρι τον πρώτο τους δεσμό κινούνται συνεχώς αντίθετα άρα δεν μπορεί η σχετική τους απόσταση να είναι σταθερή. Έτσι το πρώτο σημείο που θα ανιχνευτεί συχνότητα ίση με την F_s είναι ο και ο πρώτος δεσμός του στάσιμου κύματος. Έτσι $\lambda/4 = 5\text{ cm}$ άρα $\lambda = 20\text{ cm}$. Επειδή η κάθε χορδή μας

έχει 10 ακίνητα σημεία άρα 10 δεσμούς με την βοήθεια της εξίσωσης που δίνει τους δεσμούς θα έχουμε $x_{\text{δεσμών}} = (2\kappa + 1)\lambda/4$ και για τιμή $\kappa = 9$ (ο δέκατος δεσμός) θα βρούμε $L = 95\text{cm}$.

Β) Από την εξίσωση για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε

$$f_{\text{παρ}} = \frac{u_{\eta\chi} \pm u_{\text{παρ}}}{u_{\eta\chi} \pm u_{\text{πηγ}}}} f_{\text{πηγ}}$$

Η πηγή και ο παρατηρητής βρίσκονται πάνω σε κοιλία του στάσιμου κύματος και αποκτούν ταυτόχρονα την μέγιστη και την ελάχιστη τους ταχύτητα. Η μέγιστη συχνότητα που θα καταγράφει ο ανιχνευτής θα είναι όταν και δύο βρίσκονται στην ΘΙΤ και θα πλησιάζουν μεταξύ τους ενώ η ελάχιστη συχνότητα θα είναι όταν θα βρίσκονται στην ΘΙΤ και θα απομακρύνονται μεταξύ τους. Με βάσει τα παραπάνω θα έχουμε

$$f_{\text{max}} = \frac{u_{\eta\chi} + \omega 2A}{u_{\eta\chi} - \omega 2A} f_s \quad (1)$$

$$f_{\text{min}} = \frac{u_{\eta\chi} - \omega 2A}{u_{\eta\chi} + \omega 2A} f_s \quad (2)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις εξισώσεις (1) & (2) και με την βοήθεια των δεδομένων θα καταλήξουμε $F_s^2 = 250000$ άρα η συχνότητα $F_s = 500\text{Hz}$.

Γ) Η ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση της πηγής και του ανιχνευτή θα συμβεί όταν το ένα θα βρίσκεται στην θέση $-2A$ ενώ το άλλο θα βρίσκεται στην θέση $+2A$. Άρα η $d_{\text{min}} = D - 4A$ άρα το $A = 1\text{cm}$.

Αν διαιρέσουμε τις εξισώσεις (1) & (2) θα έχουμε Q

$$\frac{(u_{\eta\chi} - \omega 2A)^2}{(u_{\eta\chi} + \omega 2A)^2} = 1,201$$

μετά τις πράξεις $\omega = 340/4,02 = 84,58\text{r/s}$.

Έτσι οι εξισώσεις για τα στάσιμα κύματα θα έχουν μορφή

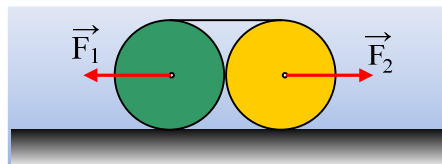
$$\psi_1 = 0,02 \sin\left(\frac{2\pi x}{0,2}\right) \cdot \eta\mu 84,58t \quad (\text{SI}) \text{ για την πάνω χορδή}$$

Και

$$\psi_2 = 0,02 \sin\left(\frac{2\pi x}{0,2}\right) \cdot \eta\mu(84,58t + \pi) \quad (\text{SI}) \text{ για την κάτω χορδή}$$

Δύο δίσκοι που πήραν ανάποδες στροφές και επανήλθαν μετά την επιστράτευση.

Δύο ομογενείς δίσκους μάζας $M_1=2\text{kg}$ και $M_2=1\text{kg}$ έχουν ίδια ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και έχουν περασμένο σε ένα λεπτό αυλάκι αβαρές μη εκτατό νήμα που μπορεί να ξετυλίγεται χωρίς τριβές. Οι δίσκοι είναι σε επαφή και το νήμα είναι οριζόντιο στην πάνω μεριά των δίσκων όπως στο παρακάτω σχήμα



Την χρονική στιγμή $t=0$ ασκώ στο κέντρο του κάθε δίσκου σταθερή δύναμη $F_1=10\text{N}$ και $F_2=3,5\text{N}$ αντίστοιχα έτσι ώστε το ανώτερο σημείο του κάθε δίσκου να είναι συνεχώς ακίνητο και το νήμα να ξετυλίγεται. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κάθε δίσκο και στο έδαφος είναι $\mu=0,1$ να βρεθούν:

A) Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κάθε δίσκου

B) Το ποσοστό του έργου των δύο δυνάμεων που έχει μετατραπεί σε θερμότητα λόγω τριβής μετά από χρόνο $t=1\text{s}$ για όλο το σύστημα

Αν την χρονική στιγμή $t=1\text{s}$ νήμα κοπεί και καταργηθούν ταυτόχρονα οι δυνάμεις F_1 και F_2 να βρεθούν:

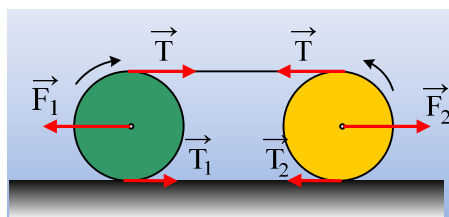
Γ) Ποια χρονική στιγμή μετά το κόψιμο του νήματος θα πάψει η τριβή προσφέρει ενέργεια στο περιβάλλον

Δ) Ποιες οι τελικές ταχύτητες των κέντρων μάζας του κάθε δίσκου.

$$I_{\text{cm}}=0,5MR^2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) Επειδή το ανώτερο σημείο του κάθε δίσκου παραμένει ακίνητο το χαμηλότερο σημείο του κάθε δίσκου έχει ταχύτητα διπλάσια του κέντρου μάζας και με φορά προς την φορά κίνησης του κάθε δίσκου. Έτσι σε κάθε δίσκο θα ασκείται τριβή ολίσθησης με φορά αντίθετη της ταχύτητας του χαμηλότερου σημείου του δίσκου. Από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε και με βάση το σχήμα



$$F_1 - T - \mu M_1 g = M_1 a_1 \quad (1)$$

$$F_2 - T - \mu M_2 g = M_2 a_2 \quad (2)$$

$$TR - T_1 R = \frac{1}{2} M_1 R^2 \alpha_{\gamma\omega v1} \quad \text{ή} \quad T - \mu M_1 g = \frac{1}{2} M_1 a_1 \quad (3)$$

$$TR - T_2 R = \frac{1}{2} M_2 R^2 \alpha_{\gamma\omega v2} \quad \text{ή} \quad T - \mu M_2 g = \frac{1}{2} M_2 a_2 \quad (4)$$

Μετά την επίλυση των εξισώσεων (1) και (3) θα βρούμε $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$

Μετά την επίλυση των εξισώσεων (2) και (4) θα βρούμε $a_2 = 1 \text{ m/s}^2$

B) Η κίνηση του κέντρου μάζας είναι επιταχυνόμενη με το διάστημα του κέντρου μάζας του κάθε δίσκου $S = \frac{1}{2} a_{\text{cm}} t^2$ και για τον κάθε δίσκο θα είναι $S_1 = 1 \text{ m}$ & $S_2 = 0,5 \text{ m}$

Το έργο της κάθε δύναμης θα δίνεται από τη σχέση $W_1 = F_1 S_1 = 10 \text{ J}$ & $W_2 = F_2 S_2 = 1,75 \text{ J}$

Η θερμότητα είναι το έργο της τριβής για κάθε δίσκο και θα δίνεται από τη σχέση

$$Q_1 = T_1 S_1 + T_1 R \theta = 2 T_1 S_1 = 4 \text{ J} \quad \& \quad Q_2 = T_2 S_2 + T_2 R \theta = 2 T_2 S_2 = 1 \text{ J}$$

Ετσι το ποσοστό του έργο των δυνάμεων που έγινε θερμότητα είναι:

$$\Pi = Q_{\text{ολ}} \cdot 100\% / W_{\text{ολ}} = 42,55\%$$

Γ) Μετά το κόψιμο του νήματος το η τριβή ολίσθησης θα επιβραδύνει την στροφική κίνηση αλλά και την μεταφορική και θα πάψει να προσφέρει ενέργεια στο περιβάλλον την στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση δηλαδή όταν το χαμηλότερο σημείο του κάθε δίσκου αποκτήσει μηδενική ταχύτητα. Από τους νόμους και πάλι του Νεύτωνα για την κάθε κίνηση ξεχωριστά θα έχουμε

$$\mu M_1 g = M_1 a_1 \quad \text{άρα} \quad a_1 = 1 \text{ m/s}^2 \quad \& \quad \mu M_1 g R = \frac{1}{2} M_1 R^2 \alpha_{\gamma\omega v1} \quad \text{άρα} \quad \alpha_{\gamma\omega v1} = 10 \text{ r/s}^2$$

$$\mu M_2 g = M_2 a_2 \quad \text{άρα} \quad a_2 = 1 \text{ m/s}^2 \quad \& \quad \mu M_2 g R = \frac{1}{2} M_2 R^2 \alpha_{\gamma\omega v2} \quad \text{άρα} \quad \alpha_{\gamma\omega v2} = 10 \text{ r/s}^2$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του καθενός δίσκου την στιγμή που κόβεται το νήμα ήταν

$$u_{\text{cm1}} = a_1 t = 2 \text{ m/s} \quad \& \quad u_{\text{cm2}} = a_2 t = 1 \text{ m/s} \quad \text{και τα μέτρα της γωνιακής ταχύτητας του καθενός δίσκου ήταν}$$

$$\omega_1 = u_{\text{cm1}} / R = 10 \text{ r/s} \quad \& \quad \omega_2 = u_{\text{cm2}} / R = 5 \text{ r/s}$$

Ετσι $u_{\text{cm1}} - \alpha_1 t_1 = (-\omega_1 + \alpha_{\gamma\omega v1} t_1) R$ και μετά από πράξεις θα βρούμε $t_1 = 4/3 \text{ s}$ για τον πρώτο δίσκο ενώ για τον δεύτερο δίσκο θα έχουμε

$$u_{\text{cm2}} - \alpha_2 t_2 = (-\omega_2 + \alpha_{\gamma\omega v2} t_2) R \quad \text{και μετά από πράξεις θα βρούμε} \quad t_2 = 2/3 \text{ s}$$

Δ) Οι τελικές ταχύτητες των κέντρων μάζας θα είναι μόλις αποκτήσουν την καθαρή κύλιση μιας και μετά από εκεί οι δίσκοι θα εκτελούν ομαλή στροφική και μεταφορική κίνηση

$$v_{\text{τελ1}} = u_{\text{cm1}} - \alpha_1 t_1 = 2 - 1 \cdot 4/3 = 2/3 \text{ m/s} \quad \& \quad v_{\text{τελ2}} = u_{\text{cm2}} - \alpha_2 t_2 = 1 - 1 \cdot 2/3 = 1/3 \text{ m/s}.$$

Τρύπα και κύλιση

Ομογενής σιδερένιος δίσκος έχει μάζα $M=4\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,4\text{m}$. Ο Μπάρπα-Γιάννης ο σιδεράς θέλει να αφαιρέσει από τον δίσκο ένα άλλον ομόκεντρο δίσκο ακτίνας $R/2$ έτσι ώστε αν εφαρμόσει οριζόντια σταθερή δύναμη $F=39\text{N}$ στο ανώτερο σημείου του κοίλου δίσκου ώστε αυτός να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu>0,3$.

Να βρεθούν:

A) Η ροπή αδράνειας του κοίλου δίσκου

B) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κοίλου δίσκου.

Γ) Σε ποια απόσταση από το κέντρο και πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο του κοίλου δίσκου μπορεί να εφαρμοσθεί οποιαδήποτε οριζόντια σταθερή δύναμη έτσι ώστε ο κοίλος δίσκος να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει είτε σε λείο οριζόντιο επίπεδο είτε σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο

$$I_{\text{cm}}=0,5MR^2$$

Απάντηση:

A) Αν I_1 είναι η ροπή αδράνειας του κοίλου δίσκου μπορεί να βρεθεί αν από την αρχική ροπή αδράνειας του συμπαγούς δίσκου αφαιρέσουμε την ροπή αδράνειας του δίσκου που αφαιρέθηκε από το συμπαγή δίσκο.

$$I_1=0,5MR^2-0,5M'R_1^2 \quad (1)$$

όπου M' ή μάζα που αφαιρέθηκε. Επειδή η πυκνότητα του δίσκου είναι σταθερή μιας και ο δίσκος είναι ομογενής μπορούμε να βρούμε την μάζα M' από την σχέση με την πυκνότητα $M/V=M'/V'$ ή $M/d\pi R^2=M'/d\pi R_1^2$ όπου d το πάχος του δίσκου άρα $M'=MR_1^2/R^2=1\text{Kg}$ και με αντικατάσταση στην (1) θα βρούμε $I_1=0,3\text{kgm}^2$.

B) Με τη βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα για την στροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

$$F+T=M_{\Delta}a \quad (2)$$

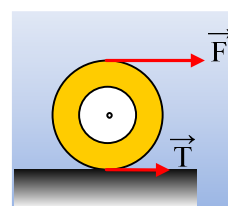
$$FR-TR=I_1\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

$$a=\alpha_{\gamma\omega\nu}R \quad (3) \text{ και μετά από πράξεις θα βρούμε } a=16\text{m/s}^2$$

Γ) Για να μπορεί ο κοίλος δίσκος να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και σε λείο και σε τραχύ επίπεδο θα πρέπει να μην ασκείται τριβή. Με βάσει τους νόμους της κίνησης θα έχουμε:

$$F=M_{\Delta}a \quad (4) \quad Fx=I_1a/R \quad (5)$$

οπότε με διαίρεση κατά μέλη θα έχουμε $1/x=M_{\Delta}R/I_1$ και μετά από πράξεις $x=0,25\text{m}$.



60 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ ΟΛΕΣ ΣΩΣΤΕΣ

- 1) Το b είναι μία σταθερά που ονομάζεται σταθερά απόσβεσης και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται.
- 2) Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις) του πλάτους στη σύνθεση δύο ταλαντώσεων με παραπλήσιες συχνότητες, ονομάζεται περίοδος των διακροτημάτων
- 3) Ιδιοσυχνότητα ενός συστήματος είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται ελεύθερα ένα σύστημα.
- 4) Το κύκλωμα επιλογής σταθμών στο ραδιόφωνο είναι ένα κύκλωμα LC, που εξαναγκάζεται σε ηλεκτρική ταλάντωση από την κεραία.
- 5) Όταν ταλαντώνεται το έδαφος (σεισμός) το κτίριο εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.
- 6) Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα στερεά καθώς και στην επιφάνεια του νερού που μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση εγκάρσια
- 7) Τα διαμήκη διαδίδονται στα στερεά, στα υγρά και στα αέρια
- 8) Περίοδος του κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται
- 9) Οποιαδήποτε κυματική διαταραχή, όσο περίπλοκη και να είναι, μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από το άθροισμα ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων.
- 10) Όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επί μέρους κύματα (αρχή επαλληλίας)
- 11) Η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου ονομάζεται συμβολή
- 12) Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται μόνο όταν τα κύματα είναι τόσο ισχυρά ώστε να μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδονται
- 13) Δύο πηγές που δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα λέμε ότι βρίσκονται σε φάση και ονομάζονται σύγχρονες
- 14) Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις.
- 15) Ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός. Σε όλα τα υλικά τα Η/Μ κύματα διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα
- 16) Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα-όπως και τα μηχανικά-υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας.
- 17) Η αιτία δημιουργίας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι η επιταχυνόμενη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων

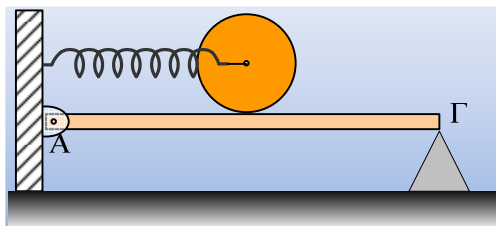
- 18)Κοντά στην κεραία το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν διαφορά φάσης 90° . Μακριά από την κεραία τα δύο πεδία είναι σε φάση.
- 19)Τα ραδιοκύματα δημιουργούνται από ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως τα κυκλώματα L-C.
- 20)Μικροκύματα παράγονται από ηλεκτρονικά κυκλώματα και τα χρησιμοποιούν τα ραντάρ
- 21)Τα υπέρυθρα κύματα εκπέμπονται από τα θερμά σώματα και απορροφώνται εύκολα από τα περισσότερα υλικά. Όταν η υπέρυθρη ακτινοβολία απορροφάται από ένα σώμα αυξάνει το πλάτος της ταλάντωσης των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται, αυξάνοντας έτσι την θερμοκρασία του.
- 22)Μία ακτινοβολία που περιέχει μήκη κύματος σε μία πολύ μικρή περιοχή χαρακτηρίζεται μονοχρωματική.
- 23)Το απόλυτα μονοχρωματικό φως αποτελεί μία εξιδανίκευση. Τα λέιζερ παράγουν φως που πλησιάζει πολύ στο απόλυτα μονοχρωματικό.
- 24)Οι υπεριώδεις ακτίνες είναι υπεύθυνες για το «μαύρισμα» το καλοκαίρι και το μεγαλύτερο του μέρος απορροφάται από τα άτομα της ανώτερης ατμόσφαιρας που λέγεται στρατόσφαιρα
- 25)Η πιο κοινή αιτία παραγωγής ακτίνων Χ είναι η επιβράδυνση ηλεκτρονίων που προσκρούουν με μεγάλη ταχύτητα σε ένα μεταλλικό στόχο.
- 26)Η ακτινοβολία γ εκπέμπεται από ορισμένους ραδιενεργούς πυρήνες καθώς και σε αντιδράσεις πυρήνων και στοιχειωδών σωματιδίων ή ακόμη και κατά τη διάσπαση στοιχειωδών σωματιδίων. Είναι πολύ διεισδυτικές και βλάπτουν όπως και οι ακτίνες Χ και οι υπεριώδεις τους οργανισμούς που τις απορροφούν.
- 27)Όταν οι ακτίνες μιας φωτεινής παράλληλης δέσμης που προσπίπτουν πάνω σε λεία και στιλπνή επιφάνεια (κάτοπτρο) και οι ανακλώμενες ακτίνες εξακολουθούν να είναι παράλληλες μεταξύ τους τότε μιλάμε για κατοπτρική ανάκλαση.
- 28)Αν μία παράλληλη δέσμη μονοχρωματικού φωτός προσπέσει σε επιφάνεια που έχει ανωμαλίες τότε οι ανακλώμενες ακτίνες έχουν διάφορες διευθύνσεις. Η ανάκλαση αυτή ονομάζεται διάχυση.
- 29)Ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητα του φωτός στο υλικό ονομάζεται δείκτης διάθλασης του υλικού.
- 30)Εξαιτίας της διάθλασης ένα αντικείμενο μέσα στο νερό φαίνεται να βρίσκεται πιο κοντά στην επιφάνεια από όσο είναι στην πραγματικότητα.
- 31)Οι μεταλλικές επιφάνειες παίζουν για τα ραδιοκύματα το ρόλο που παίζουν οι καθρέπτες για το φως.
- 32)Στις κεραίες λήψης το κάτοπτρο ανακλά τα ΗΜ κύματα που πέφτουν πάνω του και τα εστιάζει στην κεραία, με αποτέλεσμα το σήμα στην κεραία να είναι πιο ισχυρό.
- 33)Παραβολικές είναι οι κεραίες των ραδιοτηλεσκοπίων
- 34)Η μικρή κρίσιμη γωνία είναι ο λόγος που λαμποκοπά ένα κατεργασμένο διαμάντι στο φως
- 35)Τα περισκόπια των υποβρυχίων περιέχουν πρίσματα ολικής ανάκλασης

- 36) Στην μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα
- 37) Ο τροχός του λούνα πάρκ κάνει στροφική κίνηση ενώ ο θαλαμίσκος κάνει μεταφορική κίνηση
- 38) Στην στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό
- 40) Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει σύνθετη κίνηση η οποία μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.
- 41) Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.
- 42) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους
- 43) Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ($\Sigma \tau = I \alpha$) ισχύει και στις περιπτώσεις όπου ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται αρκεί ο άξονας αυτός να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος να είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά την διάρκεια της κίνησης
- 44) Την στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από τον άξονά που περνάει από το κέντρο μάζας του συχνά την ονομάζουμε **σπιν**.
- 45) Τα αστέρια στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρι που οι πυρήνες των ατόμων να αρχίσουν να εφάπτονται. Η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις οπότε η στροφορμή των αστεριών αυτών διατηρείται και επειδή η ροπή αδράνειας μειώνεται έχουμε αύξηση της ταχύτητας περιστροφής.
- 46) Το φαινόμενο κρούσης στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια, αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις και για πολύ μικρό χρόνο ονομάζεται **σκέδαση** στην σύγχρονη φυσική.
- 50) Κεντρική ή μετωπική ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.
- 51) Εκκεντρή ονομάζεται μία κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες.
- 52) Πλάγια ονομάζεται μία κρούση αν οι ταχύτητες των σωμάτων βρίσκονται σε τυχαίες διευθύνσεις.
- 53) Ανελαστική, ονομάζεται η κρούση στην οποία ένας μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα.
- 54) Όταν η σχετική απόσταση πηγής – παρατηρητή ελαττώνεται ο παρατηρητής ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερο) από αυτή που παράγει η πηγή.
- 55) Όταν η σχετική απόσταση πηγής – παρατηρητή αυξάνει ο παρατηρητής ακούει ήχο μικρότερης συχνότητας (βαρύτερο) από αυτή που παράγει η πηγή
- 56) Το φαινόμενο Doppler ισχύει για κάθε μορφής κύμανση ακόμη και για τα Η/Μ κύματα όπως είναι το φως.

- 57) Η σχέση που περιγράφει το φαινόμενο Doppler για το φως είναι διαφορετική από αυτήν που καταλήξαμε για το ήχο και αυτό οφείλεται στο ότι το φως δεν χρειάζεται μέσον για να διαδοθεί καθώς και ότι η ταχύτητα διάδοσής του είναι ίδια για όλα τα συστήματα αναφοράς.
- 58) Η αστυνομία με τη βοήθεια του φαινομένου Doppler μπορεί να υπολογίσει την ταχύτητα των οχημάτων.
- 59) Με την διαφοροποίηση των μηκών κύματος που εκπέμπουν τα άτομα στα αστέρια σε σχέση με τα μήκη κύματος που εκπέμπουν τα ίδια άτομα πάνω στη γη μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το αν ένα αστέρι πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη γη.
- 60) Το φαινόμενο Doppler το αξιοποιούν για την μέτρηση της ταχύτητας των αυτοκινήτων ή των αεροπλάνων με το ραντάρ, οι αστρονόμοι για να παρακολουθούν την κίνηση πολύ μακρινών ουράνιων σωμάτων αλλά και οι γιατροί για να παρακολουθούν την ροή του αίματος.

Στροφική Ταλάντωση, αλλά και Ισορροπία.

Ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μάζα $M_1=3\text{kg}$ και μήκος $L=3\text{m}$ μπορεί να ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια άρθρωσης στο σημείο Α και με λείο κατακόρυφο υποστήριγμα στο σημείο Γ. Πάνω στη ράβδο ισορροπεί δίσκος μάζας $M_2=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$. Στο κέντρο μάζας του δίσκου έχουμε περάσει το άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου φυσικού μήκους $L_0=1,5\text{m}$ και σταθεράς $K=150\text{N/m}$ έτσι ώστε ο δίσκος να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου βρίσκεται ακλόνητα στερεωμένο στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το σημείο Α της ράβδου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

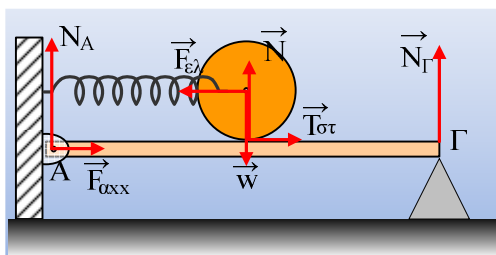


Απομακρύνουμε το κέντρο μάζας του δίσκου κατά $x_1=0,3\text{m}$ και την χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο οπότε ο δίσκος κυλιέται συνεχώς χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην ράβδο. Να βρεθούν:

- A) Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στα σημεία Α και Γ πριν απομακρυνθεί ο δίσκος.
- B) Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου σαν συνάρτηση του χρόνου καθώς και η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σαν συνάρτηση του χρόνου.
- Γ) Να βρεθεί η εξίσωση του μέτρου της δύναμης που ασκείται στην άρθρωση σε συνάρτηση του χρόνου μετά την χρονική στιγμή 0.

Για τον δίσκο $I_{\text{cm}}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



- A) Για την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα θα έχουμε $N_A+N_\Gamma=(M_1+M_2)g$ (1) και με την βοήθεια της συνθήκης ισορροπίας $\Sigma\tau_{(A)}=0$ ή $N_\Gamma L-(M_1+M_2)gL/2=0$ θα βρούμε $N_\Gamma=20\text{N}$ και με την βοήθεια της σχέσης (1) θα βρούμε $N_A=20\text{N}$.
- B) Θα πρέπει να βρούμε τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το κέντρο μάζας τους δίσκου

Για μία τυχαία θετική απομάκρυνση του δίσκου θα έχουμε:

$$\Sigma F=T_{\text{στ}}-Kx \quad (1)$$

Με την βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα για την στροφική και την μεταφορική κίνηση του δίσκου θα έχουμε:

$$Kx - T_{στ} = M_2 a_{cm} \quad (2) \quad T_{στ} R = 0,5 M_2 R^2 \alpha_{γων} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) θα βρούμε $T_{στ} = Kx/3$ (4) και με αντικατάσταση στην (1) θα βρούμε:

$$\Sigma F = -2Kx/3 = -100x$$

άρα το κέντρο μάζας του δίσκου θα εκτελεί γ.α.τ. με $D = 100 \text{ N/m}$.

Την χρονική στιγμή $t=0$ το κέντρο μάζας του δίσκου δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του δηλαδή στην θέση $x = +A = 0,3 \text{ m}$. Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου θα είναι:

$$x = 0,3 \eta \mu(10t + \pi/2) \quad (\text{S.I.})$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα δίνεται από την σχέση

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} Kx^2 = 6,75 \eta \mu^2(10t + \pi/2) \quad (\text{S.I.})$$

μιας και το x της ταλάντωσης ταυτίζεται με το x του ελατηρίου.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση

$$U_{ταλ} = \frac{1}{2} Dx^2 = 4,5 \eta \mu^2(10t + \pi/2) \quad (\text{S.I.})$$

Γ) Για την ισορροπία της ράβδου και μετά την χρονική στιγμή $t=0$ θα έχουμε

Στον οριζόντιο άξονα xx' θα υπάρχει η αντίδραση της στατικής τριβής που θα έχει φυσικά μέτρο

$T_{στ} = Kx/3 = 50x$ (S.I.) και για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει στην άρθρωση να ασκείται η $F_{α\alpha\chi} = -$

$T_{στ}$ ή το μέτρο της να δίνεται από την σχέση με το χρόνο

$$F_{α\alpha\chi} = 15 \eta \mu(10t + \pi/2) \quad (\text{S.I.})$$

Την ίδια στιγμή και με την βοήθεια της σχέσης $\Sigma \tau_{(Γ)} = 0$ θα έχουμε

$$-F_{α\psi\psi'} L + M_1 g L/2 + M_2 g (L/2 - x) = 0$$

θα βρούμε $F_{α\psi\psi'} = 20 - 10x/3$ και με αντικατάσταση του x θα βρούμε $F_{α\psi\psi'} = 20 - \eta \mu(10t + \pi/2)$ (S.I.)

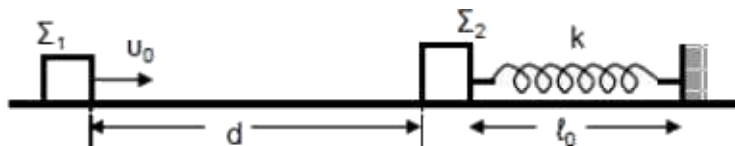
Έτσι το συνολικό μέτρο της δύναμης στην άρθρωση θα βρεθεί με την βοήθεια του Π.Θ. και θα έχει μορφή

$$F_a = \sqrt{225 \eta \mu^2 \left(10t + \frac{\pi}{2}\right) + \left(20 - \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \rightarrow$$

$$F_a = \sqrt{226 \eta \mu^2 \left(10t + \frac{\pi}{2}\right) - 40 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2}\right) + 400} \quad (\text{S.I.})$$

Θέμα Γ (ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ χωρίς προβλήματα στα νούμερα)

Σώμα Σ_1 με μάζα m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνοντας προς άλλο σώμα Σ_2 με μάζα $m_2 = 2 m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Έστω u_0 η ταχύτητα που έχει το σώμα Σ_1 τη στιγμή $t_0 = 0$ και ενώ βρίσκεται σε απόσταση $d = 1,6 \text{ m}$ από το σώμα Σ_2 . Αρχικά, θεωρούμε ότι το σώμα Σ_2 είναι ακίνητο πάνω στο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελατηρίου k , και το οποίο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0 . Το δεύτερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Αμέσως μετά τη κρούση, που είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 αποκτά ταχύτητα με μέτρο $u_1' = 1 \text{ m/s}$ και φορά αντίθετη της αρχικής ταχύτητας.

Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu = 0,5$ και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

C₁. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα u_0 του σώματος Σ_1 .

Μονάδες 6

C₂. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση.

Μονάδες 6

C₃. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος Σ_1 από την αρχική χρονική στιγμή t_0 μέχρι να ακινητοποιηθεί τελικά.

Μονάδες 6

C₄. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν δίνεται ότι $m_2 = 1 \text{ kg}$ και $k = 300 \text{ N/m}$.

Μονάδες 7

Θεωρήστε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και ότι τα δύο σώματα συγκρούονται μόνο μία φορά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

C1. Με τη βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης θα βρούμε

$u_1' = (m_1 - m_2)u_1 / (m_1 + m_2)$ και με αντικατάσταση θα έχουμε $u_1 = 3 \text{ m/s}$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην θέση της κρούσης για το σώμα μάζας m_1 θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 u_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \mu m_1 g d \quad \text{θα βρούμε } u_0 = 5 \text{ m/s}$$

C2. Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος m_1 πριν την κρούση με το σώμα m_2 είναι $K_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ ενώ η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο δεύτερο σώμα ήταν $K_2' = \frac{1}{2} m_2 u_2'^2$ όπου u_2' η ταχύτητα του δεύτερου σώματος μετά την κρούση θα βρεθεί από τον γνωστό τύπο της θεωρίας για τις ελαστικές κρούσεις

$$u_2' = 2m_1 u_1 / (m_1 + m_2) \quad \text{και μετά από πράξεις } u_2' = 2 \text{ m/s}$$

Με την βοήθεια της απλής μέθοδου των τριών θα έχουμε

$$\chi = 100 \cdot \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 / \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = 800/9 \quad \%$$

C3. Με τη βοήθεια του νόμου του Νεύτωνα για την επιβραδυνόμενη κίνηση προς την κρούση με το m_2 θα έχουμε $T = ma$ άρα $\mu mg = ma$ άρα $a = 5 \text{ m/s}^2$.

Ετσι για την πρώτη επιβραδυνόμενη κίνηση και μέχρι την κρούση των δύο σωμάτων θα έχουμε:

$$u = u_0 - at_1 \quad \text{άρα } t_1 = 0,4 \text{ s.}$$

Μετά την κρούση των δύο σωμάτων το πρώτο σώμα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα πίσω άρα και πάλι με το νόμο της επιβραδυνόμενης κίνησης θα έχουμε

$$0 = u_1' - at_2 \quad \text{άρα } t_2 = 0,2 \text{ s}$$

άρα ο συνολικός χρόνος για την κίνηση των πρώτου σώματος θα είναι $t_{\text{ολ}} = 0,6 \text{ s}$.

C4. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση του σώματος m_2 θα έχουμε

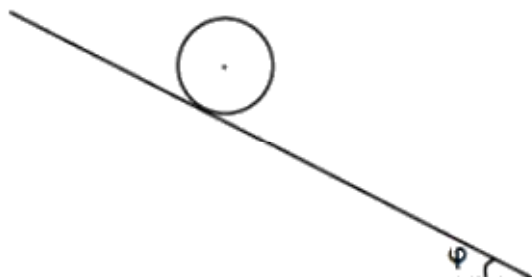
$$\frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} K x_{\text{max}}^2 + \mu m g x_{\text{max}}$$

και καταλήγοντας στην δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$150 x_{\text{max}}^2 + 5 x_{\text{max}} - 2 = 0 \quad \text{θα καταλήξουμε στο } x_{\text{max}} = 0,1 \text{ m.}$$

Μήπως του χρόνου πρέπει να κάνουμε τέτοιες ασκήσεις;

Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R . Αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ , όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:

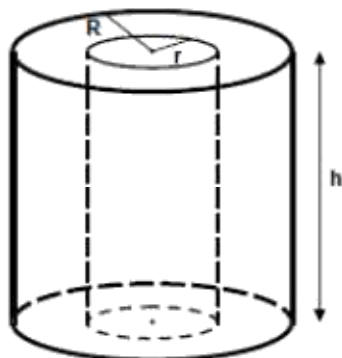


C1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Ο άξονας του κυλίνδρου διατηρείται οριζόντιος.

Μονάδες 3

D2. Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h , αφαιρούμε πλήρως ένα ομοαξονικό μικρό κύλινδρο ακτίνας r , όπου $r < R$, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

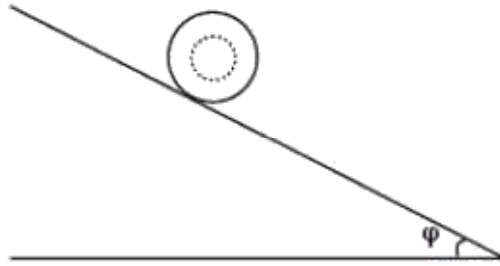


Να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει

μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος, είναι: $I_{\text{κοιλ}} = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right)$

Μονάδες 5

Στη συνέχεια λιπαίνουμε το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και το επανατοποθετούμε στη θέση του, ούτως ώστε να εφαρμόζει απόλυτα με τον κοίλο κύλινδρο χωρίς τριβές. Το νέο σύστημα που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



D.3 Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος.

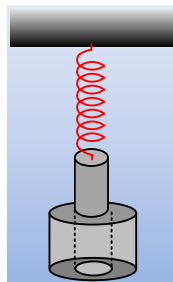
Μονάδες 5

D4. Όταν $r = \frac{R}{2}$, να υπολογίσετε, σε κάθε χρονική στιγμή της κύλισης στο κεκλιμένο επίπεδο, το λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος.

Μονάδες 5

Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

Ο μικρός κύλινδρος του παραπάνω ερωτήματος **D4** έχει μάζα $m=1\text{Kg}$ και μήκους $L=0,2\text{m}$ δένετε από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ από το άνω άκρο του έτσι ώστε να μπορεί να ταλαντώνεται κατακόρυφα έχοντας τον άξονα του επίσης κατακόρυφο όπως στο παρακάτω σχήμα



Ανεβάζουμε το μικρό κύλινδρο έτσι ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος. Τοποθετούμε ακριβώς από κάτω τον κοίλο κύλινδρο έτσι ώστε να είναι κατακόρυφος με τον κατακόρυφο άξονά του να είναι στην ίδια κατακόρυφο με το ελατήριο και το πάνω μέρος μόλις που να είναι σε επαφή με το κάτω μέρος του μικρού κυλίνδρου. Συγκρατούμε τον κοίλο κύλινδρο σε αυτή τη θέση και την χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο την χρονική στιγμή $t=0$ τον μικρό κύλινδρο. Εκείνη την στιγμή ψεκάζουμε με ειδικό λιπαντικό-κόλλα (ανακάλυψης του εγγονού του Μπάρμπα Γιάννη του σιδερά) τον μικρό κύλινδρο που όμως σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \pi/10 \text{ sec}$ μετατρέπεται ταυτόχρονα σε ισχυρή κόλλα. Μόλις το λιπαντικό μετατραπεί σε κόλλα αφήνουμε τον κοίλο κύλινδρο ελεύθερο.

D5. Να βρεθεί το σχήμα του τελικού ταλαντωτή.

(Μονάδες 2)

D6. Να βρεθεί το τελικό πλάτος ταλάντωσης του τελικού ταλαντωτή.

(Μονάδες 5)

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R , ως προς τον

άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται: $I = \frac{1}{2} MR^2$ Ο όγκος V ενός συμπαγούς κυλίνδρου

ακτίνας R και ύψους h : $V = \pi R^2 h$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εντάξει... δεν είναι ανάγκη να λύσουμε ξανά τα 4 πρώτα ερωτήματα!!! Έχουν αναλυθεί δεόντως...

D5. Από την ισορροπία του μικρού κυλίνδρου θα έχουμε $mg = Kx_1$ άρα $x_1 = 0,1\text{m}$

Η περίοδος του μικρού κυλίνδρου θα δοθεί από την σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{άρα } T = \pi/5\text{s}$$

Παρατηρώ ότι ο χρόνος μέχρι το λιπαντικό να μετατραπεί σε κόλλα είναι $T/2$.

Αρχικά ο μικρός κύλινδρος βρισκόταν στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής του και την στιγμή που κολλάει με τον κοίλο κύλινδρο βρίσκεται στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσής του.

Αρα έχει κατέβει κατά μήκος $2A = 0,2\text{m}$. Το μήκος αυτό αντιστοιχεί με το μήκος των δύο κυλίνδρων του μικρού αλλά και του κοίλου. Έτσι το σχήμα του τελικού ταλαντωτή θα είναι ο αρχικός κύλινδρος πριν μετατραπεί σε κοίλο.

D6. Με την βοήθεια της πυκνότητας θα βρούμε την συνολική μάζα του τελικού ταλαντωτή

$$M/V = m/V' \quad \text{και μετά τις πράξεις θα βρούμε } M = 4\text{Kg}$$

Ο τελικός ταλαντωτής θα ισορροπεί σε θέση σε σχέση με το φυσικό μήκος $Mg = Kx_2$ άρα $x_2 = 0,4\text{m}$

Την στιγμή της συγκόλλησης των δύο κυλίνδρων το πάνω μέρος του συμπαγούς πλέον κυλίνδρου απέχει απόσταση $x_3 = 0,2\text{m}$. Η θέση όμως ισορροπίας έχει μετατοπισθεί στην θέση $x_2 = 0,4\text{m}$. Ο μικρός κύλινδρος δεν έχει ταχύτητα άρα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του. Αρα το νέο πλάτος του συμπαγούς κυλίνδρου θα είναι $A_{\text{τελ}} = x_2 - x_3 = 0,2\text{m}$.