

Μερικές ερωτήσεις στις φθίνουσες και στις εξαναγκασμένες

A) Φθίνουσα Ταλάντωση λόγω δύναμης αντίστασης $F_{αντ}=-bv$

Θεωρούμε ότι ο ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{επ}=-Dx$ και δύναμης αντίστασης $F_{αντ}=-bv$. Σε κάθε θέση της τροχιάς ισχύει:

$$\Sigma F = F_{επ} + F_{αντ} \Leftrightarrow ma = -Dx - bv \quad (1)$$

Ερώτηση 1

Στη διάρκεια μιας περιόδου της φθίνουσας ταλάντωσης, ο ταλαντωτής αποκτά μέγιστη (τοπικά) ταχύτητα όταν διέρχεται από τη θέση $x=0$;

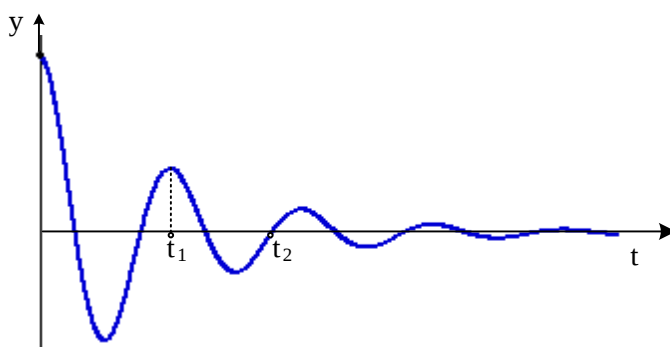
Απάντηση: ΟΧΙ

Αποκτά μέγιστη (τοπικά) ταχύτητα στη θέση όπου: $\frac{dv}{dt} = a = 0$

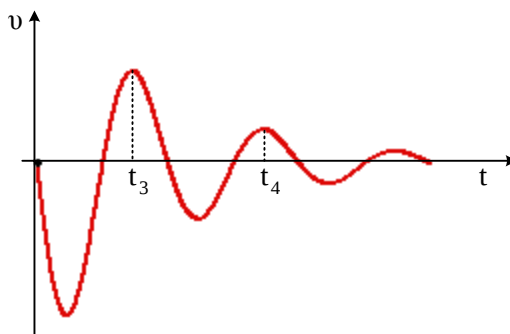
Λόγω της (1) έχουμε: $0 = -Dx - bv_{\max} \Leftrightarrow x = \frac{-bv_{\max}}{D}$

Όταν κινείται προς τη θέση $x=0$, με $v_{\max} < 0$ τότε $x > 0$, ενώ όταν κινείται με $v_{\max} > 0$ τότε $x < 0$

Έστω λοιπόν ότι η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από την αρχική θέση ισορροπίας $y=0$ σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σώμα το οποίο εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{επ}=-Dy$ και δύναμης αντίστασης $F_{αντ}=-bv$, δίνεται από το επόμενο σχήμα



Έστω ότι το αντίστοιχο διάγραμμα της ταχύτητας είναι:



Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι χρονικές στιγμές t_2 στο διάγραμμα $y-t$ και t_4 στο διάγραμμα $v-t$ είναι διαφορετικές.

Ερώτηση 2

Όταν η ενέργεια ταλάντωσης μηδενιστεί, ο ταλαντωτής θα σταματήσει στη θέση $x=0$;

Απάντηση: ΝΑΙ

Ο ταλαντωτής θα σταματήσει όταν $v=0$ και $\frac{dv}{dt} = a = 0$

Λόγω της (1): $0 = -Dx + 0 \Leftrightarrow x = 0$

Προσοχή: Όταν η ταλάντωση είναι φθίνουσα λόγω σταθερής δύναμης αντίστασης όπως η τριβή, τότε, όταν η ενέργεια ταλάντωσης μηδενιστεί, ο ταλαντωτής δε θα σταματήσει στη θέση $x=0$, αλλά στη θέση όπου: $0 = -Dx + T \Leftrightarrow x = \frac{T}{D}$

Ερώτηση 3

Στη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση: $\frac{dU}{dt} = Dx \cdot v$

Απάντηση: ΝΑΙ

Η δυναμική ενέργεια οφείλεται στη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα και ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\pi}} = -F_{\varepsilon\pi} \cdot v = -(-Dx) \cdot v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dx \cdot v$$

Ερώτηση 4

Στη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = ma \cdot v$

Απάντηση: ΝΑΙ

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας οφείλεται στο έργο της συνισταμένης δύναμης, άρα: $\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot v = ma \cdot v$

Προσοχή: Στη φθίνουσα **δεν** ισχύει ότι $a = -\omega^2 x$, οπότε αντίστοιχα **δεν** ισχύει ότι $\frac{dK}{dt} = -m\omega^2 x \cdot v$

B) Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

Θεωρούμε ότι ο ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi} = -Dx$, δύναμης αντίστασης $F_{\alpha\nu\tau} = -bv$ και της περιοδικής δύναμης του διεγέρτη $F_{\delta} = F_{\max} \eta\mu(\omega t + \theta)$. Ο ταλαντωτής εκτελεί αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω , τη γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη.

Οι συναρτήσεις απομάκρυνσης-χρόνου ($x-t$), ταχύτητας-χρόνου ($v-t$), επιτάχυνσης-χρόνου ($a-t$), δίνονται από τις εξισώσεις:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Σε κάθε θέση της τροχιάς ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = ma \Leftrightarrow -Dx - bv + F_{\delta} = m(-\omega^2 x) \quad (2)$$

αφού η επιτάχυνση συνδέεται με την απομάκρυνση με τη σχέση $a = -\omega^2 x$

Ερώτηση 1

Ο στιγμιαίος ρυθμός προσφοράς ενέργειας από το διεγέρτη είναι ίσος με το στιγμιαίο ρυθμό απώλειας ενέργειας λόγω της δύναμης αντίστασης;

Απάντηση: ΟΧΙ

Σε κάθε θέση της τροχιάς ισχύει:

$$\begin{aligned}\Sigma F = ma &\Leftrightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = ma \Leftrightarrow -Dx + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = m(-\omega^2 x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -m\omega_o^2 x + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = -m\omega^2 x \Leftrightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = m\omega_o^2 x - m\omega^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = m(\omega_o^2 - \omega^2)x(2\alpha)\end{aligned}$$

Προσοχή Η σταθερά επαναφοράς D συνδέεται με τη γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_o του συστήματος και όχι με τη γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη : $D = m\omega_o^2$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε σε κάθε θέση $x \neq 0$:

$$(2\alpha) \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} \neq 0 \Leftrightarrow F_{\delta} \neq -F_{\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F_{\delta}v \neq -F_{\alpha\nu\tau}v \Leftrightarrow P_{F_{\delta}} \neq -P_{F_{\alpha\nu\tau}}$$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε ΜΟΝΟ στη θέση $x = 0$:

$$(2\alpha) \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = 0 \Leftrightarrow F_{\delta} = -F_{\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F_{\delta}v = -F_{\alpha\nu\tau}v \Leftrightarrow P_{F_{\delta}} = -P_{F_{\alpha\nu\tau}}$$

Αν $\omega = \omega_o$ τότε σε κάθε θέση $x \neq 0$:

$$(2\alpha) \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = 0 \Leftrightarrow F_{\delta} = -F_{\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F_{\delta}v = -F_{\alpha\nu\tau}v \Leftrightarrow P_{F_{\delta}} = -P_{F_{\alpha\nu\tau}}$$

Δηλαδή μόνο αν το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό, ο στιγμιαίος ρυθμός προσφοράς ενέργειας από το διεγέρτη είναι ίσος με το στιγμιαίο ρυθμό απώλειας ενέργειας λόγω της δύναμης αντίστασης.

Ερώτηση 2

Η μέγιστη κινητική και η μέγιστη δυναμική ενέργεια στη διάρκεια της περιόδου, είναι ίσες;

Απάντηση: ΟΧΙ

$$\begin{aligned}\text{Ισχύει ότι: } K_{\max} &= \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Leftrightarrow K_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \\ \text{αλλά } U_{\max} &= \frac{1}{2}DA^2 \Leftrightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}m\omega_o^2 A^2\end{aligned}$$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε $K_{\max} \neq U_{\max}$

Μόνο αν $\omega = \omega_o$ τότε $K_{\max} = U_{\max}$

Ερώτηση 3

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι αντίθετος του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας;

Απάντηση: ΟΧΙ

Για το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot v = ma \cdot v \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = -m\omega^2 x \cdot v$$

Η δυναμική ενέργεια οφείλεται στη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα και ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\pi}} = -F_{\varepsilon\pi} \cdot v = -(-Dx) \cdot v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dx \cdot v \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = m\omega_o^2 x \cdot v$$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε $\frac{dK}{dt} \neq -\frac{dU}{dt}$

Ερώτηση 4

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση η ταχύτητα υ και η απομάκρυνση χ, συνδέονται με τη σχέση $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

Απάντηση: ΝΑΙ

Η σχέση αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι η απομάκρυνση χ και η ταχύτητα υ είναι αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου.

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Leftrightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_o) = \frac{x}{A} \Leftrightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{x^2}{A^2}$$

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) = \frac{v}{\omega A} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{v^2}{\omega^2 A^2}$$

Όμως:

$$\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Leftrightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Ερώτηση 5

Α) Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση η ταχύτητα v και η απομάκρυνση x , συνδέονται με τη σχέση: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$;

Απάντηση: ΝΑΙ

Β) Η σχέση αυτή δηλώνει ότι το άθροισμα κινητικής και δυναμικής σε κάθε θέση είναι ίση με την ολική;

Απάντηση: ΟΧΙ

Η σχέση αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι η απομάκρυνση x και η ταχύτητα v είναι αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου. Όπως δείξαμε πριν:

$$\begin{aligned} \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) &= 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Leftrightarrow \omega^2 x^2 + v^2 = \omega^2 A^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \end{aligned}$$

Γ) Η σχέση $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ ποια φυσική σημασία έχει;

Απάντηση: ΚΑΜΙΑ

Οι όροι $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ και $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ δεν εκφράζουν ούτε τη δυναμική, η οποία συνδέεται με τη δύναμη επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi} = -Dx = -m\omega_o^2x$, ούτε την ολική ενέργεια.

Θοδωρής Παπασγουρίδης

parasgou@gmail.com