

ΚΥΛΙΣΗ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

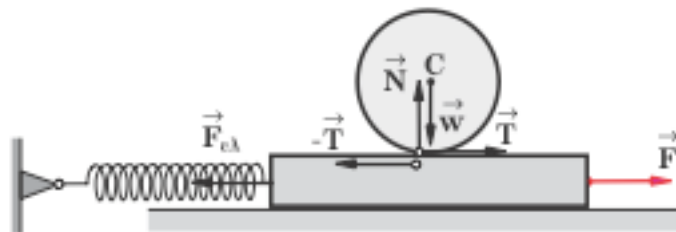
Τροχός μάζας m και ακτίνας R , εφάπτεται ενός οριζόντιου δοκαριού μάζας M με το οποίο παρουσιάζει αρκετά μεγάλο συντελεστή οριακής τριβής, ο οποίος επιτρέπει την κύλιση χωρίς ολίσθηση του τροχού πάνω στο δοκάρι. Το δοκάρι βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και συνδέεται με το ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται ώστε το ελατήριο να είναι οριζόντιο (σχ.) Κάποια στιγμή που θεωρείται ως αρχή του χρόνου εξασκείται στο δοκάρι οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που μεταβάλλεται με τον χρόνο t σύμφωνα με την σχέση:

$$\vec{F} = F_0 \sin \omega t \vec{i}$$

όπου F_0 , ω θετικές και σταθερές ποσότητες και $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του οριζόντιου άξονα Ox . Να μελετηθεί η κίνηση του δοκαριού και του τροχού στο σύστημα αναφοράς του δαπέδου.

Να δεχθείτε ότι την στιγμή $t=0$ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και ότι τόσο ο τροχός όσο και το δοκάρι είναι ακίνητα. Δίνεται ακόμη η ροπή αδράνειας $I_C = mR^2/2$ του τροχού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του και διερχόμενο από το κέντρο του C και η επιτάχυνση $\vec{g}$ της βαρύτητας.

ΛΥΣΗ: Εξετάζουμε το σύστημα κάποια στιγμή t που το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x από την φυσική του κατάσταση. Ο τροχός δέχεται το βάρος του $\vec{w}$ και την αντίδραση του δοκαριού, η οποία αναλύεται στην κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και στην τριβή $\vec{T}$, που είναι στατική τριβή, αφού ο τροχός κυλιέται χωρίς ολίσθηση πάνω στο δοκάρι. Εξάλλου το δοκάρι κατά την διεύθυνση κίνησής του x' δέχεται την δύναμη $\vec{F}$, την αντίδραση $-\vec{T}$ της τριβής $\vec{T}$ και την



Σχήμα 1

δύναμη $\vec{F}_{el}$ από το παραμορφωμένο ελατήριο, σύμφωνα δε με τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα θα έχουμε την σχέση:

$$F_0 \sin \omega t - T - F_{el} = Ma_{\Delta} \Rightarrow F_0 \sin \omega t - T - kx = Ma_{\Delta} \quad (1)$$

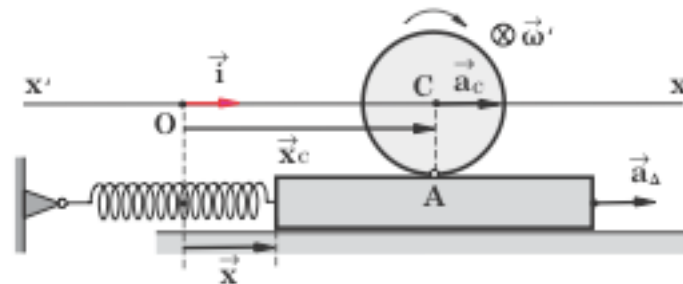
όπου a_{Δ} η επιτάχυνση του δοκαριού (αλγεβρική τιμή) στο σύστημα αναφοράς

του δαπέδου την στιγμή που εξετάζουμε το σύστημα. Εφαρμόζοντας τον ίδιο νόμο για την κίνηση του κέντρου μάζας C του δίσκου παίρνουμε την σχέση:

$$T = ma_C \quad (2)$$

όπου a_C η αντίστοιχη επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δοκαριού (αλγεβρική τιμή). Όμως η τριβή $\vec{T}$ παρουσιάζει ροπή περί το κέντρο μάζας C του τροχού, με αποτέλεσμα να προκαλεί περιστροφή αυτού περι άξονα που διέρχεται από το C και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$ του τροχού έχει κάθε στιγμή αλγεβρική τιμή, που ικανοποιεί τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, δηλαδή την σχέση:

$$TR = I_C \omega' \Rightarrow TR = \frac{mR^2}{2} \omega' \Rightarrow T = \frac{mR}{2} \omega' \quad (3)$$



Σχήμα 2

όπου T η αλγεβρική τιμή της τριβής $\vec{T}$. Όμως η κυλίσση χωρίς ολίσθηση του τροχού επιβάλλει να θεωρήσουμε κοινή την επιτάχυνση των σημείων επαφής A του τροχού με το δοκάρι είτε αυτά είναι σημεία του τροχού είτε σημεία του δοκαριού, οπότε θα ισχύει η σχέση:

$$a_C + \omega' R = a_A \Rightarrow \omega' R = a_A - a_C \quad (4)$$

η οποία συνδυαζόμενη με την (3) δίνει:

$$T = m(a_A - a_C)/2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} ma_C = m(a_A - a_C)/2 \Rightarrow$$

$$3a_C = a_A \Rightarrow a_C = a_A/3 \quad (5)$$

και η (2) παίρνει την μορφή:

$$T = ma_A/3 \quad (6)$$

Λόγω της προηγούμενης σχέσεως η (1) γράφεται:

$$F_0 \sin \omega t - ma_A/3 - kx = Ma_A \Rightarrow$$

$$3F_0 \sin \omega t - 3kx = (3M + m)a_A \Rightarrow$$

$$3F_0\sigma\omega t = (3M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + 3kx \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3kx}{3M + m} = \frac{3F_0\sigma\omega t}{3M + m} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0\sigma\omega t}{m_0} \quad (7)$$

με $\omega_0^2 = k/m_0$ και $m_0 = M + m/3$. Για την λύση της διαφορικής εξίσωσης (7) ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Δοκιμάζουμε ως μερική λύση της (7) την συνάρτηση:

$$x_1(t) = A\eta\mu\omega t + B\sigma\omega t \quad (8)$$

οπότε με διπλή παραγώγιση αυτής θα έχουμε:

$$dx_1(t)/dt = A\omega\sigma\omega t - B\omega\eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$d^2x_1(t)/dt^2 = -A\omega^2\eta\mu\omega t - B\omega^2\sigma\omega t \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας στην (7) την τιμή της δεύτερης παραγώγου από την (9) παίρνουμε την σχέση:

$$-A\omega^2\eta\mu\omega t - B\omega^2\sigma\omega t + \omega_0^2(A\eta\mu\omega t + B\sigma\omega t) = F_0\sigma\omega t / m_0 \Rightarrow$$

$$(\omega_0^2 A - \omega^2 A)\eta\mu\omega t + (\omega_0^2 B - B\omega^2 - F_0/m_0)\sigma\omega t = 0 \quad (10)$$

Επειδή η (10) πρέπει να ισχύει για κάθε $t > 0$, αυτό εξασφαλίζεται από τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 A - \omega^2 A &= 0 \\ \omega_0^2 B - B\omega^2 - F_0/m_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) &= 0 \\ B(\omega_0^2 - \omega^2) &= F_0/m_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= F_0/m_0(\omega_0^2 - \omega^2) \end{aligned} \right\}$$

με $\omega \neq \omega_0$. Συνδυάζοντας τις πιο πάνω σχέσεις με την (8) παίρνουμε:

$$x_1(t) = \frac{F_0\sigma\omega t}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (11)$$

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (7) έχει την μορφή:

$$x_2(t) = C_1\eta\mu\omega_0 t + C_2\sigma\omega_0 t \quad (12)$$

όπου C_1, C_2 σταθεροί συντελεστές, που θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες κίνησης του δοκαριού. Η γενική λύση $x(t)$ της (7) θα προκύψει ως άθροισμα των λύσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$, δηλαδή:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) \stackrel{(11),(12)}{\Rightarrow} \mathbf{x}(t) = \frac{F_0 \sin \omega t}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} + C_1 \eta \mu \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (13)$$

Παραγωγίζοντας την (13) ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -\frac{F_0 \omega \eta \mu \omega t}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} + C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t - C_2 \omega_0 \eta \mu \omega_0 \quad (14)$$

Για $t=0$ οι σχέσεις (13) και (14) δίνουν:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= F_0/m_0(\omega_0^2 - \omega^2) + C_2 \\ 0 &= C_1 \omega_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} C_2 &= -F_0/m_0(\omega_0^2 - \omega^2) \\ C_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Η τελική επομένως μορφή της (8) είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{F_0 \sin \omega t}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} - \frac{F_0 \sin \omega_0 t}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow \\ \mathbf{x}(t) &= \frac{F_0(\sin \omega t - \sin \omega_0 t)}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (I)$$

Η (I) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του δοκαριού στο σύστημα αναφοράς του δαπέδου και ισχύει εφ' όσον $\omega \neq \omega_0$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x(t)$ προκύπτει ως επαληθής δύο συνημιτονικών συναρτήσεων με διαφορετικές κυκλικές συχνότητες ω και ω_0 και το ερώτημα που εγείρεται είναι ποια είναι η φυσιογνωμία της κίνησης του δοκαριού. Μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Οι κυκλικές συχνότητες ω , ω_0 έχουν τυχαίες τιμές.

Στην περίπτωση αυτή η χρονική μεταβολή της μετατόπισης του δοκαριού είναι πολύπλοκη και δεν εκφράζει κάποιο συγκεκριμένο νόμο.

ii) Οι κυκλικές συχνότητες ω , ω_0 έχουν λόγο που είναι ρητός αριθμός, δηλαδή ικανοποιούν μια σχέση της μορφής $\omega/\omega_0 = n_1/n_2$ όπου n_1 , n_2 θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους.

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $x(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T που δίνεται από την σχέση:

$$T = 2\pi/n_1\omega = 2\pi/n_2\omega_0$$

δηλαδή στην περίπτωση αυτή η κίνηση του δοκαριού θα είναι περιοδική, αλλά όχι αρμονική.

iii) Οι κυκλικές συχνότητες ω , ω_0 διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει $\omega/\omega_0 \approx 1$.

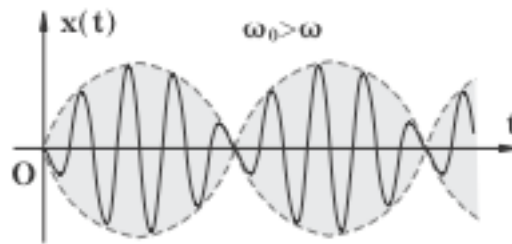
Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $x(t)$ είναι περιοδική με περίοδο:

$$T \approx 2\pi/\omega \approx 2\pi/\omega_0$$

και έχει την μορφή **διακροτήματος**, δηλαδή η μετατόπιση του δοκαριού θα μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο, αλλά το πλάτος της είναι διαμορφωμένο στον ρυθμό μιας χαμηλής κυκλικής συχνότητας $|\omega_0 - \omega|/2$. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή η σχέση (I) μπορεί να πάρει την μορφή:

$$x(t) = \frac{-2F_0}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \eta\mu \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \eta\mu \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \Rightarrow$$

$$x(t) \approx \frac{-2F_0}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \eta\mu \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \eta\mu\omega t \quad (II)$$



Σχήμα 3

Η γραφική παράσταση της (II) είναι η καμπύλη του σχήματος (3)

iv) Η κυκλική συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ τείνει προς την τιμή ω_0 ($\omega \rightarrow \omega_0$).

Στην περίπτωση αυτή το δεύτερο μέλος της σχέσεως (I) καθίσταται απροσδιόριστο και για να αρθεί η απροσδιοριστία του εφαρμόζουμε τον κανόνα de L'Hospital, οπότε θα έχουμε:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left(\frac{\sin\omega t - \sin\omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \frac{\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} d(\sin\omega t - \sin\omega_0 t) / d\omega}{\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} d(\omega_0^2 - \omega^2) / d\omega} =$$

$$= \frac{\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} (-t\eta\mu\omega t)}{\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} (-2\omega)} = \frac{t\eta\mu\omega_0 t}{2\omega_0}$$

Άρα η οριακή μορφή της $x(t)$ όταν $\omega \rightarrow \omega_0$, δηλαδή στην κατάσταση κάποιου είδους **”συντονισμού”** του συστήματος είναι:

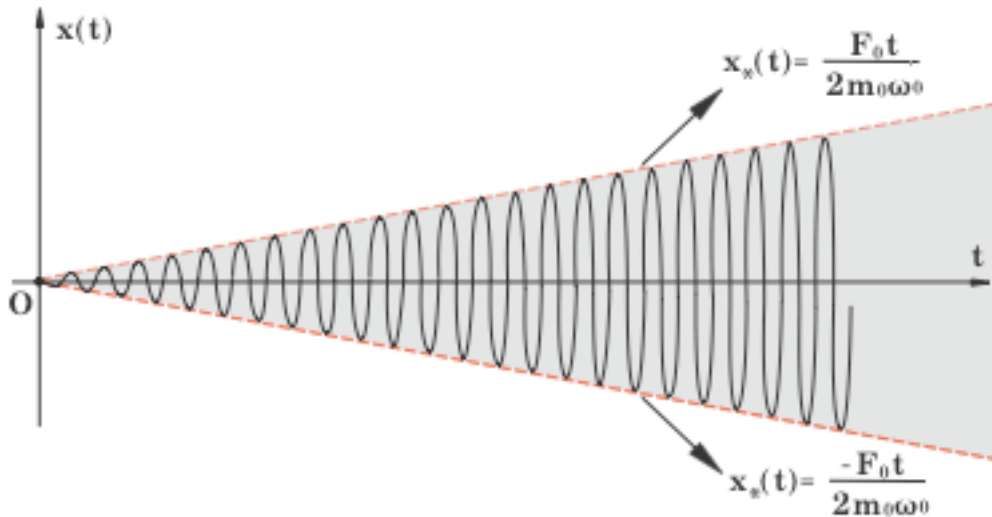
$$x(t) = \frac{F_0}{m_0} \frac{t\eta\mu(\omega_0 t)}{2\omega_0} \quad (III)$$

Η σχέση (III) δεν εκφράζει ημιτονική μεταβολή της μετατόπισης του δοκαριού, αλλά μια πολύπλοκη χρονική εξέλιξη αυτής κατά την οποία παίρνει τιμές που

αυξάνονται χρονικά προς το άπειρο και αυτό οφείλεται στον όρο $t\eta\mu(\omega_0 t)$. Για να γίνει αυτό αντιληπτό χρησιμοποιούμε την γνωστή σχέση:

$$-1 \leq \eta\mu(\omega_0 t) \leq +1 \quad \stackrel{(III)}{\Rightarrow} \quad -1 \leq \frac{2m_0\omega_0}{tF_0} x(t) \leq +1 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{F_0 t}{2m_0\omega_0} \leq x(t) \leq +\frac{F_0 t}{2m_0\omega_0} \quad (IV)$$



Σχήμα 4

Από την (IV) παρατηρούμε ότι οι ευθείες $x_*(t) = \pm F_0 t / 2m_0\omega_0$ αποτελούν την περιβάλλουσα της συνάρτησης (III), η οποία οριοθετεί τις τιμές της $x(t)$ και την κατευθύνει προς το άπειρο (σχ. 4). Είναι προφανές ότι η περίπτωση αυτή έχει καθαρά θεωρητικό χαρακτήρα, διότι στην πράξη κανένα ελατήριο δεν αντέχει σε τέτοιες παραμορφώσεις.

Αν στην συνέχεια εντοπίσουμε την προσοχή μας στην κίνηση του κέντρου μάζας C του κυλιόμενου τροχού πρέπει να αξιοποιήσουμε την (5), η οποία γράφεται:

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{1}{3} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \quad \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{F_0 \sigma\upsilon\nu\omega t}{3m_0} - \frac{\omega_0^2}{3} x(t) \quad \stackrel{(I)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{F_0 \sigma\upsilon\nu\omega t}{3m_0} - \frac{\omega_0^2 F_0 (\sigma\upsilon\nu\omega t - \sigma\upsilon\nu\omega_0 t)}{3m_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{F_0}{3m_0} \left(\frac{\omega_0^2 \sigma\upsilon\nu\omega_0 t - \omega^2 \sigma\upsilon\nu\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Με ολοκλήρωση η πιο πάνω σχέση δίνει:

$$\frac{dx_C}{dt} = \frac{F_0}{3m_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} (\omega_0 \eta\mu\omega_0 t - \omega \eta\mu\omega t) + K_1$$

Όμως η σταθερά ολοκλήρωσης K_1 είναι μηδενική, διότι την στιγμή $t=0$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού είναι μηδενική, οπότε με νέα ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσεως θα έχουμε:

$$x_c = \frac{F_0}{3m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} (-\sin\omega_0 t + \sin\omega t) + K_2$$

Εάν η αρχική απόσταση του κέντρου μάζας του τροχού από την αρχή O του άξονα x είναι x_0 η σταθερά ολοκλήρωσεως K_2 είναι x_0 και η πιο πάνω σχέση παίρνει την μορφή:

$$x_c = \frac{F_0(\sin\omega t - \sin\omega_0 t)}{3m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} + x_0 \quad (V)$$

Η (V) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του κέντρου μάζας του τροχού και είναι της ίδιας μορφής με την (I), που σημαίνει ότι μπορούμε να επαναλάβουμε τα ίδια σχόλια για την κίνηση του κέντρου μάζας του τροχού. Τέλος αν φ είναι η γωνιακή εκτροπή του τροχού σε χρόνο t λόγω της περιστροφής του, η κύλισή του επιβάλλει την σχέση:

$$x_c - x_0 = R\varphi(t) \stackrel{(V)}{\Rightarrow} \varphi(t) = \frac{F_0(\sin\omega t - \sin\omega_0 t)}{3m_0 R(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

κ.λ.π.

P.M. fysikos