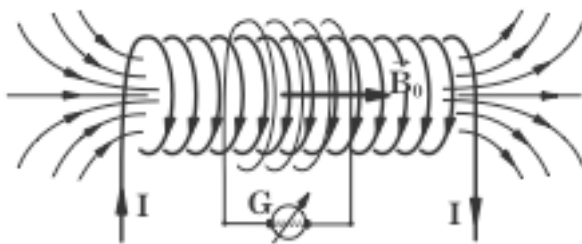


ΜΙΑ ΕΚΛΑΙΚΕΥΜΕΜΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΑΣΚΗΣΗΣ ΤΗΣ Β! ΛΥΚΕΙΟΥ

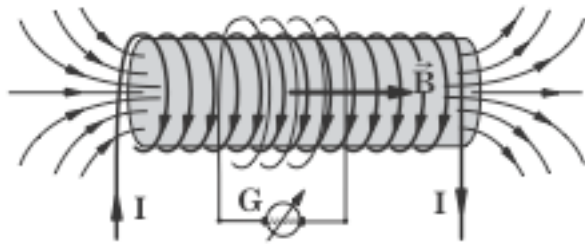
Το μαγνητικό πεδίο εντός της ύλης

Μαγνητική διαπερατότητα υλικού

Θεωρούμε επίμηκες σωληνοειδές, του οποίου οι σπείρες διαρρέονται με ηλεκτρικό ρεύμα ορισμένης έντασης I . Τότε στο εσωτερικό του σωληνοειδούς υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$, που μπορεί να μετρηθεί από την ένδειξη του βαλυστικού γαλβανομέτρου (G), όταν διακοπεί το ρεύμα στο σωληνοειδές. Έστω τώρα ότι στο εσωτερικό του σωληνοειδούς τοποθετείται σιδερένιος πυρήνας (σχ. 2) και διακόπτεται πάλι το ηλεκτρικό ρεύμα σ' αυτό. Τότε θα διαπιστώσουμε μεγαλύτερη ένδειξη του γαλβανομέτρου, γεγονός που σημαίνει ότι με την εισαγωγή του σιδηροπυρήνα στο σωληνοειδές αυξάνεται το πεδίο, μολονότι το ρεύμα παρέμεινε αμετάβλητο. Εάν $\vec{B}$ είναι το πεδίο μετά την εισαγωγή του σιδηροπυρήνα, τότε το πηλίκο



Σχήμα 1



Σχήμα 2

B/B_0 ορίζεται ως σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ του υλικού του σιδηροπυρήνα, δηλαδή ισχύει:

$$\mu = B/B_0$$

Από τον ορισμό της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας συμπεραίνεται ότι, αυτή είναι καθαρός αριθμός η δε τιμή της εξαρτάται από την φύση του υλικού στο οποίο αναφέρεται. Για ορισμένα υλικά το μ λαμβάνει σημαντικές τιμές (σιδηρομαγνητικά υλικά), για άλλα λαμβάνει τιμές λίγο μεγαλύτερες της μονάδας (παραμαγνητικά υλικά) και τέλος υπάρχουν υλικά με σχετική μαγνητική διαπερατότητα λίγο μικρότερη της μονάδας (διαμαγνητικά υλικά). Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι, το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς που πληρούται με υλικό σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας μ , πρέπει πλέον να υπολογίζεται από την τροποποιημένη σχέση:

$$B = \mu B_0 \Rightarrow B = \mu \mu_0 n \cdot I$$

όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και n^* ο αριθμός σπειρών του σωληνοειδούς ανά μονάδα μήκους. Η φυσική εξήγηση της αλλοίωσης του μαγνητικού πεδίου του σωληνοειδούς, λόγω της παρουσίας ύλης στο εσωτερικό του, δίνεται στα επόμενα εδάφια.

Μαγνήτιση υλικού

Στο εσωτερικό κάθε υλικού υπάρχουν στοιχειώδη κυκλικά ρεύματα, που δημιουργούνται από την περιφορά των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες των ατόμων του υλικού. Τα ρεύματα αυτά καλούνται μοριακά ρεύματα του υλικού και αποτελούν στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα, των οποίων οι μαγνητικές ροπές έχουν τυχαίο προσανατολισμό, όταν το υλικό βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου*. Έτσι, εάν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού, τα μοριακά ρεύματα που υπάρχουν σ' αυτό θα παρουσιάζουν ολική μαγνητική ροπή ίση με μηδέν. Έστω τώρα ότι το υλικό τοποθετείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Τότε οι μαγνητικές ροπές των μοριακών ρευμάτων κάθε στοιχειώδους τμήματος του υλικού θα προσανατολισθούν κατά την διεύθυνση του πεδίου, οπότε το τμήμα τούτο θ' αποκτήσει μαγνητική ροπή ίση με το διανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών ροπών των μοριακών ρευμάτων που περιέχει. Στην περίπτωση αυτή εννοούμε ότι το υλικό αποκτά μαγνητικές ιδιότητες ή ότι καθίσταται μαγνητισμένο. Η μαγνητική κατάσταση του μαγνητισμένου υλικού καθορίζεται σε κάθε σημείο του από ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{M}$ που ονομάζεται μαγνήτιση του υλικού και ορίζεται ως το πηλίκο της μαγνητικής ροπής $d\vec{m}$ ενός στοιχειώδους τμήματος του υλικού, λαμβανόμενου στην περιοχή του σημείου, δια του όγκου dV που καταλαμβάνει το τμήμα αυτό, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\vec{M} = d\vec{m}/dV$$

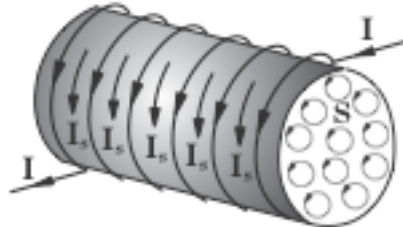
Γνωρίζοντας την μαγνήτιση ενός υλικού σε κάθε σημείο του, μπορούμε να μελετήσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο εσωτερικό του από τα προσανατολισμένα μοριακά του ρεύματα. Στην περίπτωση που η μαγνήτιση ενός υλικού είναι παντού η αυτή, τότε λέμε πως το σώμα είναι μαγνητισμένο με ομογενή τρόπο, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο εσωτερικό του από τα προσανατολισμένα μοριακά ρεύματα, είναι ομογενές.

Μαγνητικό πεδίο μαγνητισμένου υλικού

Η μελέτη του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργείται στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου υλικού παρουσιάζει στην γενική περίπτωση σημαντικές δυσκολίες από μαθηματική άποψη. Για τον λόγο αυτό εξετάζουμε αρχικά την απλούστερη περίπτωση ενός υλικού, κυλινδρικής μορφής, το οποίο πληροί το εσωτερικό επιμήκους σωληνοειδούς, που διαρρέεται με ηλεκτρικό ρεύμα (σχ. 3). Στην περίπτωση αυτή το υλικό μαγνητίζεται από το μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς με ομογενή τρόπο, τα δε μοριακά του ρεύματα προσανατολίζονται με τα επίπεδά τους παράλληλα προς

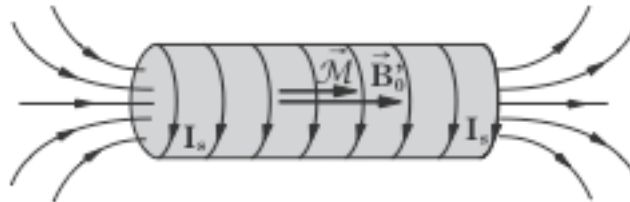
* Εξαίρεση αποτελούν οι μόνιμοι μαγνήτες, των οποίων τα μοριακά ρεύματα είναι προσανατολισμένα κατά περιοχές.

τις σπείρες του σωληνοειδούς. Θεωρώντας τα μοριακά ρεύματα μιας διατομής S του υλικού παρατηρούμε ότι, σε κάθε εσωτερικό σημείο του περιγράμματος της διατομής S , επέρχεται εξουδετέρωση δύο γειτονικών μοριακών ρευμάτων αντιθέτου φοράς, ενώ στα σημεία του περιγράμματος της διατομής S τα μοριακά ρεύματα κυκλοφορούν ομόρροπα, γεγονός που ισοδυναμεί με την δημιουργία ενός ρεύματος κατά το μήκος του περιγράμματος της διατομής S , που ονομάζεται επιφανειακό ρεύμα μαγνήτισης του υλικού. Κάθε τέτοιο ρεύμα είναι δέσμιο επί της παράπλευ



Σχήμα 3

ρης επιφάνειας του σωληνοειδούς, δηλαδή δεν μπορεί να παροχετευθεί σε άλλη θέση, κατ' αντίθεση με τα ρεύματα των σπειρών που είναι ελεύθερα ρεύματα που ρυθμίζονται κατά βούληση. Η εμφάνιση όλων αυτών των επιφανειακών ρευμάτων μαγνήτισης επί της παράπλευρης επιφάνειας του κυλινδρικού υλικού (σχ. 3), συνεπάγεται την δημιουργία στο εσωτερικό αυτού ενός πρόσθετου μαγνητικού πεδίου, το οποίο σε άλλες περιπτώσεις είναι ομόρροπο εκείνου που προκαλεί την μαγνήτιση του υλικού, σε άλλες δε είναι αντίρροπο προς αυτό, ανάλογα με την φορά των επιφανειακών ρευμάτων μαγνήτισης σε σχέση με την φορά των εμφανών ρευμάτων αγωγιμότητας που κυκλοφορούν στις σπείρες του σωληνοειδούς. Το πεδίο αυτό $\vec{B}'_0$ καλείται μαγνητικό πεδίο από μαγνήτιση του υλικού αποδεικνύεται δε ότι είναι ίσο με $\mu_0 \vec{\mathcal{M}}$, όπου $\vec{\mathcal{M}}$ η μαγνήτιση του υλικού.



Σχήμα 4

Πράγματι, έστω ότι επί ενός μήκους L του υλικού υπάρχουν n το πλήθος επιφανειακά ρεύματα μαγνήτισης, που το καθένα έχει ένταση I_s . (σχ. 4). Τότε το πεδίο $\vec{B}'_0$ που δημιουργούν τα ρεύματα αυτά, θα έχει μέτρο:

$$B'_0 = \mu_0 n I_s / L \quad (1)$$

Εξάλλου, η μαγνητική ροπή $\vec{m}$ του υλικού έχει μέτρο $n I_s S$, οπότε το μέτρο της μαγνήτισής του θα είναι:

$$\mathcal{M} = \frac{m}{SL} = \frac{n I_s S}{SL} = \frac{n I_s}{L} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\vec{B}'_0 = \mu_0 \vec{\mathcal{M}} \quad (3)$$

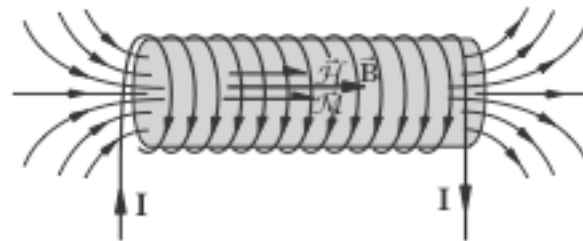
Η (3), αν ληφθεί υπ' όψη ότι τα διανύσματα $\vec{B}'_0$ και $\vec{\mathcal{M}}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα, μας επιτρέπει να γράψουμε την διανυσματική σχέση:

$$\vec{B}'_0 = \mu_0 \vec{\mathcal{M}} \quad (4)$$

Στο σχήμα (4) απεικονίζονται οι δυναμικές γραμμές του πεδίου $\vec{B}'_0$ που οφείλεται μόνο στα επιφανειακά ρεύματα μαγνήτισης του κυλινδρικού υλικού.

Μαγνητική διέγερση

Από την προηγούμενη ανάλυση έγινε σαφές ότι τα επιφανειακά δέσμια ρεύματα του υλικού, δημιουργούν στο εσωτερικό του σωληνοειδούς το καλούμενο μαγνητικό πεδίο από μαγνήτιση του υλικού. Το πεδίο τούτο, ανάλογα με την φύση του υλικού, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο προς το επιδρών μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν τα εμφανή ρεύματα, των σπειρών. Έτσι, στο εσωτερικό του σωληνοειδούς υπάρχουν δύο μαγνητικά πεδία, ένα πεδίο $\vec{B}_0$ προερχόμενο από τα εμφανή ρεύματα των σπειρών και ένα πεδίο $\vec{B}'_0$ προερχόμενο από τα ρεύματα μαγνήτισης του υλικού που γεμίζει το σωληνοειδές. Το ολικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ εντός του σωληνοειδούς θα είναι, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, ίσο με το διανυσματικό άθροισμα $\vec{B}_0 + \vec{B}'_0$ δηλαδή θα ισχύει:



Σχήμα 5

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'_0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{\mathcal{M}} \Rightarrow$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + \vec{\mathcal{M}} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (1)$$

όπου $\vec{\mathcal{M}}$ η μαγνήτιση του υλικού. Εξάλλου το πεδίο $\vec{B}_0$ εξαρτάται μόνο από τα εμφανή ρεύματα των σπειρών, διότι το μέτρο του είναι $B_0 = \mu_0 n I$, όπου I η ένταση των ρευμάτων αυτών. Έτσι το διάνυσμα $\vec{B}/\mu_0 - \vec{\mathcal{M}}$, σύμφωνα με την σχέση (1), θα εξαρτάται μόνο από τα εμφανή ρεύματα του σωληνοειδούς και θα είναι συγγραμμικό και ομόρροπο προς το πεδίο $\vec{B}_0$, που δημιουργούν τα ρεύματα αυτά. Το διάνυσμα αυτό ορίζεται ως **μαγνητική διέγερση** του μαγνητικού πεδίου του σωληνοειδούς και συμβολίζεται με $\vec{\mathcal{H}}$, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{\mathcal{M}} \quad (2)$$

Το μέτρο του πεδίου $\vec{\mathcal{H}}$ είναι σύμφωνα με την σχέση (1), ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\vec{B}_0/\mu_0$, δηλαδή ισχύει:

$$\mathcal{H} = B_0 / \mu_0 \Rightarrow \mathcal{H} = \mu_0 n_* I / \mu_0 = n_* I \quad (3)$$

Εξάλλου, για το μέτρο του συνολικού πεδίου $\vec{B}$ στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι γνωστή η σχέση $B = \mu \mu_0 n_* I$, η οποία λόγω της (3) γράφεται:

$$B = \mu \mu_0 H \Rightarrow \mathcal{H} = B / \mu \mu_0 \quad (4)$$

Η σχέση (4) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι, τα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{\mathcal{H}}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα, μας επιτρέπει να γράψουμε την διανυσματική σχέση:

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{B} / \mu \mu_0 \quad (5)$$

Στο σχήμα (5) απεικονίζονται οι δυναμικές γραμμές του συνολικού πεδίου $\vec{B}$, που οφείλεται στα εμφανή ρεύματα των σπειρών και στα επιφανειακά ρεύματα μαγνήτισης του κυλινδρικού υλικού. Με βάση τα πιο πάνω μπορούμε να κάνουμε τα εξής σημαντικά σχόλια για τα τρία χαρακτηριστικά διανύσματα $\vec{B}$, $\vec{\mathcal{M}}$ και $\vec{\mathcal{H}}$ ενός μαγνητικού πεδίου.

i) Το πεδίο $\vec{B}$ εξαρτάται από τα εμφανή ρεύματα (ρεύματα αγωγιμότητας) του πεδίου και από τα επιφανειακά ρεύματα μαγνήτισης του υλικού, μέσα στο οποίο εκτείνεται το μαγνητικό πεδίο. Δηλαδή το πεδίο $\vec{B}$ περιγράφει την κατάσταση του χώρου, όπως διαμορφώνεται από τα μακροσκοπικά ρεύματα, καθώς και από τα μικροσκοπικά ρεύματα μαγνήτισης του χώρου αυτού.

ii) Το διάνυσμα $\vec{\mathcal{M}}$ της μαγνήτισης του υλικού (ονομάζεται και πεδίο $\vec{\mathcal{M}}$) μέσα στο οποίο εκτείνεται το πεδίο, εξαρτάται μόνο από τα μικροσκοπικά επιφανειακά ρεύματα μαγνήτισης του υλικού, δηλαδή περιγράφει την κατάσταση του χώρου όπως αυτή διαμορφώνεται από την παρουσία των ρευμάτων αυτών.

iii) Το πεδίο $\vec{\mathcal{H}}$ (μαγνητική διέγερση) εξαρτάται μόνο από τα εμφανή ρεύματα αγωγιμότητας που υπάρχουν εντός αυτού, δηλαδή καθορίζει την κατάσταση του χώρου που διαμορφώνεται από την παρουσία των ρευμάτων αυτών. Τούτο σημαίνει πως το διάνυσμα $\vec{\mathcal{H}}$ είναι ανεξάρτητο* από την παρουσία της ύλης μέσα στο πεδίο.

iv) Σε κάθε μαγνητικό πεδίο που εκτείνεται μέσα σε ομογενές και ισότροπο υλικό, τα τρία χαρακτηριστικά διανύσματα $\vec{B}$, $\vec{\mathcal{M}}$ και $\vec{\mathcal{H}}$ οποιουδήποτε σημείου του πεδίου, συνδέονται μεταξύ τους με την διανυσματική σχέση:

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{\mathcal{M}}$$

* Τούτο είναι αληθές, όταν το υλικό μέσα στο οποίο εκτείνεται το πεδίο είναι ομογενές και ισότροπο σε όλη την έκτασή του.

ν) Για μαγνητικά πεδία που εκτείνονται στο κενό ή κατά προσέγγιση στον ατμοσφαιρικό αέρα, ισχύουν σε κάθε σημείο οι διανυσματικές σχέσεις:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{0} \text{ και } \vec{B} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}$$

Ο νόμος του Ampere για τα πεδία $\vec{\mathcal{M}}$ και $\vec{\mathcal{H}}$

Ας αναφερθούμε και πάλι στο μαγνητικό πεδίο ενός σωληνοειδούς μεγάλου μήκους, του οποίου οι σπείρες διαρρέονται με ρεύμα σταθερής έντασης, το εσωτερικό του οποίου καλύπτεται από ομογενές και ισότροπο υλικό σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας μ . Οι πηγές του πεδίου $\vec{B}$ εντός του υλικού είναι τα ρεύματα αγωγιμότητας που κυκλοφορούν στις σπείρες καθώς και δέσμια ρεύματα μαγνήτισης που είναι κατανομημένα στην εξωτερική επιφάνεια του υλικού. Αν θεωρήσουμε μια τυχαία κλειστή γραμμή (C) τότε για την κυκλοφορία $\sum_{(C)} (\vec{B} \cdot d\vec{L})$ του πεδίου $\vec{B}$ κατά μήκος της γραμμής αυτής ισχύει ο νόμος του Ampere που εκφράζεται με την σχέση:

$$\sum_{(C)} (\vec{B} \cdot d\vec{L}) = \mu_0 (I + I_s) \quad (1)$$

όπου I η συνολική ένταση των ρευμάτων αγωγιμότητας και I_s η συνολική ένταση των δεσμίων επιφανειακών ρευμάτων που περιβάλλει η κλειστή γραμμή (C). Όμως για το πεδίο $\vec{B}$ ισχύει $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'_0$, οπότε η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} \sum_{(C)} [(\vec{B}_0 + \vec{B}'_0) \cdot d\vec{L}] &= \mu_0 (I + I_s) \Rightarrow \\ \sum_{(C)} (\vec{B}_0 \cdot d\vec{L}) + \sum_{(C)} (\vec{B}'_0 \cdot d\vec{L}) &= \mu_0 I + \mu_0 I_s \end{aligned} \quad (2)$$

Για το πεδίο $\vec{B}_0$ ο νόμος του Ampere δίνει την σχέση:

$$\sum_{(C)} (\vec{B}_0 \cdot d\vec{L}) = \mu_0 I$$

και τότε η (2) παίρνει την μορφή:

$$\sum_{(C)} (\vec{B}'_0 \cdot d\vec{L}) = \mu_0 I_s \quad (3)$$

Εξάλλου το πεδίο $\vec{B}'_0$ και η μαγνήτιση $\vec{\mathcal{M}}$ του υλικού συνδέονται με την σχέση $\vec{B}'_0 = \mu_0 \vec{\mathcal{M}}$, οπότε η (3) γράφεται:

$$\sum_{(C)} (\mu_0 \vec{\mathcal{M}} \cdot d\vec{L}) = \mu_0 I_s \Rightarrow \sum_{(C)} (\vec{\mathcal{M}} \cdot d\vec{L}) = I_s \quad (4)$$

Η (4) αποτελεί τον νόμο του Ampere για το πεδίο $\vec{\mathcal{M}}$ και δηλώνει ότι η κυκλοφορία της μαγνήτισης του υλικού κατά μήκος μιας κλειστής γραμμής, είναι ίση με την συνολική ένταση των δεσμίων επιφανειακών ρευμάτων που περικλείει η γραμμή.

μή. Έαν τώρα λαβουμε υπ' όψη ότι σε κάθε σημείο του μαγνητικού πεδίου ισχύει η σχέση $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$, η (1) γράφεται:

$$\sum_{(C)} [(\vec{H}_{\mu_0} + \mu_0 \vec{M}) \cdot d\vec{L}] = \mu_0 (I + I_s) \Rightarrow$$

$$\sum_{(C)} (\vec{H} \cdot d\vec{L}) + \sum_{(C)} (\vec{M} \cdot d\vec{L}) = I + I_s \quad (4) \Rightarrow$$

$$\sum_{(C)} (\vec{H} \cdot d\vec{L}) = I \quad (5)$$

Η (5) αποτελεί τον νόμο του Ampere για το πεδίο $\vec{H}$ και παρουσιάζει ως πλεονέκτημα ότι περιέχει μόνο τα ρεύματα αγωγιμότητας που συμμετέχουν στην δημιουργία του πεδίου, τα οποία ως μακροσκοπικά ρεύματα μπορούμε να τα ελέγχουμε κατά βούληση, ενώ τα δέσμια επιφανειακά ρεύματα λόγω του μικροσκοπικού τους χαρακτήρα είναι δύσκολο να περιγραφούν ποσοτικά.

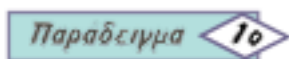
Σπουδαία παρατήρηση:

Στην περίπτωση που το υλικό δεν είναι ομογενώς μαγνητισμένο, δηλαδή η μαγνήτιση του μεταβάλλεται τοπικά, τότε τα προσανατολισμένα μοριακά ρεύματα μαγνήτισης του υλικού στο εσωτερικό του δεν αλληλοεξουδετερώνονται, με αποτέλεσμα να προκύπτει εντός του υλικού **δέσμιο ρεύμα χώρου**, που είναι υπεύθυνο για την δημιουργία μαγνητικού πεδίου, που μαζί με το μαγνητικό πεδίο των ελεύθερων ρευμάτων αγωγιμότητας διαμορφώνουν το ολικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή παρουσιάζονται μαθηματικές δυσκολίες όσον αφορά την περιγραφή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του υλικού, πρέπει όμως να αναφέρουμε ότι οι υπολογισμοί καταλήγουν και πάλι στην σχέση (5). ενώ η σχέση (4) διαφοροποιείται στην μορφή:

$$\sum_{(C)} (\vec{M} \cdot d\vec{L}) = I_v$$

όπου I_v η συνολική ένταση των δεσμίων ρευμάτων χώρου του υλικού, που περιβάλλει η κλειστή γραμμή (C), η δε μαγνήτιση $\vec{M}$ σε κάθε σημείο του υλικού συνδέεται με τα πεδία $\vec{B}$ και $\vec{H}$ μέσω της σχέσεως:

$$\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{M}$$



Θεωρούμε κυλινδρικό αγωγό, άπειρου μήκους και ακτίνας R, που διαρρέεται με ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής πυκνότητας $\vec{J}$ που διευθύνεται κατά τον γεωμετρικό του άξονα.

i) Να δείξετε ότι το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ που δημιουργεί ο ρευματοφόρος αγωγός έχει αζιμουθιακή διεύθυνση, δηλαδή το πεδίο $\vec{B}$ σε κάθε σημείο

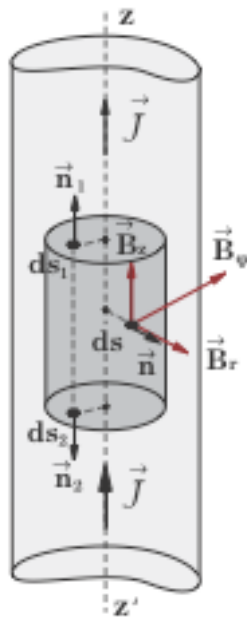
είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το σημείο και ο γεωμετρικός άξονας του αγωγού.

ii) Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere, να εκφράσετε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ που δημιουργεί ο αγωγός, σε συνάρτηση με την απόσταση r από τον γεωμετρικό του άξονα και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της σχέσεως που θα βρείτε. Δίνεται η σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ του υλικού του αγωγού.

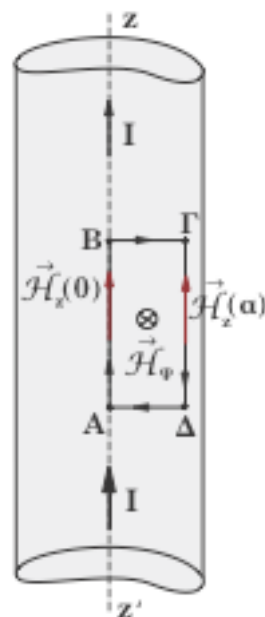
ΛΥΣΗ: i) Θεωρούμε μέσα στο μαγνητικό πεδίο του κυλινδρικού ρευματοφόρου αγωγού κλειστή επιφάνεια (S) που αποτελείται από τις δύο βάσεις (S_1), (S_2) και την παράπλευρη επιφάνεια (S_Π) ενός κυλίνδρου ύψους h και ακτίνας a , ο οποίος είναι ομοαξονικός με τον αγωγό (σχ. 6). Επειδή οι δυναμικές γραμμές κάθε μαγνητικού πεδίου είναι κλειστές η μαγνητική ροή που διασχίζει την κλειστή επιφάνεια (S) είναι μηδενική (**μαγνητικός νόμος του Gauss**), δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\sum_{(S)} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (1)$$

Όμως σε κάθε σημείο το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ αναλύεται στην αξονική συνιστώσα $\vec{B}_z$ που διευθύνεται παράλληλα προς τον άξονα zz' του αγωγού, στην ακτινική συνι



Σχήμα 6



Σχήμα 7

τώσα $\vec{B}_r$ που τέμνει κάθετα τον άξονα zz' και την αζιμουθιακή συνιστώσα $\vec{B}_\phi$ που είναι ασύμβατα κάθετη προς τον άξονα zz' . Για λόγους αξονικής συμμετρίας τα μέτρα των τριών αυτών πεδίων εξαρτώνται μόνο από την απόσταση r του σημείου από τον άξονα zz' . Έτσι η σχέση (1) παίρνει την μορφή:

$$\sum_{(S)} (\vec{B}_z \cdot d\vec{S}) + \sum_{(S)} (\vec{B}_r \cdot d\vec{S}) + \sum_{(S)} (\vec{B}_\phi \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (2)$$

Εξάλλου το πεδίο $\vec{B}_z$ είναι παράλληλο προς την παράπλευρη επιφάνεια (S_Π), ενώ οι

στοιχειώδεις μαγνητικές ροές του πεδίου αυτού που διασχίζουν δύο οποιαδήποτε αντικρουστά στοιχειώδη τμήματα dS_1 και dS_2 των βάσεων (S_1) και (S_2) αντιστοίχως είναι αντίθετες, που σημαίνει ότι:

$$\sum_{(S)} (\vec{B}_z \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (3)$$

Ακόμη το πεδίο $\vec{B}_r$ είναι παράλληλο προς τις βάσεις (S_1) και (S_2) και κάθετο προς κάθε στοιχείο dS της παράπλευρης επιφάνειας (S_{Π}) , που σημαίνει ότι:

$$\sum_{(S)} (\vec{B}_r \cdot d\vec{S}) = 2\pi\alpha h B_r \quad (4)$$

Τέλος το πεδίο $\vec{B}_\phi$ είναι παράλληλο προς τις βάσεις (S_1) και (S_2) αλλά και προς κάθε στοιχείο dS της παράπλευρης επιφάνειας (S_{Π}) , που σημαίνει ότι:

$$\sum_{(S)} (\vec{B}_\phi \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2), (3), (4) και (5) παίρνουμε:

$$2\pi\alpha h B_r = 0 \Rightarrow B_r = 0$$

δηλαδή η ακτινική συνιστώσα $\vec{B}_r$ του πεδίου $\vec{B}$ είναι μηδενική. Στην συνέχεια θεωρούμε μέσα στο πεδίο την κλειστή γραμμή $(C)=AB\Gamma\Delta$ σχήματος ορθογωνίου της οποίας οι πλευρές AB και $B\Gamma$ έχουν αντίστοιχα μήκη h και a , η AB βρίσκεται πάνω στον άξονα zz' το δε επίπεδό της (C) είναι παράλληλο προς το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος $\vec{J}$ (σχ. 7). Επειδή η γραμμή αυτή δεν περιβάλλει κανένα ρεύμα εφαρμόζοντας κατά μήκος αυτής τον νόμο του Ampere για το πεδίο $\vec{\mathcal{H}}$ (μαγνητική διέγερση), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{(AB)} (\vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{L}) + \sum_{(B\Gamma)} (\vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{L}) + \sum_{(\Gamma\Delta)} (\vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{L}) + \sum_{(\Delta A)} (\vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{L}) &= 0 \Rightarrow \\ \mathcal{H}_z(0) \cdot (AB) + 0 - \mathcal{H}_z(\alpha) \cdot (\Gamma\Delta) + 0 &= 0 \Rightarrow \\ [\mathcal{H}_z(0) - \mathcal{H}_z(\alpha)] \cdot h &= 0 \Rightarrow \mathcal{H}_z(0) = \mathcal{H}_z(\alpha) \end{aligned} \quad (6)$$

Η (6) δηλώνει ότι το μέτρο της αξονικής συνιστώσας της $\vec{\mathcal{H}}$ (άρα και της $\vec{B}$) είναι ανεξάρτητο της απόστασης r από τον άξονα zz' και επειδή για $r \rightarrow +\infty$ το πεδίο μηδενίζεται θα ισχύει:

$$\mathcal{H}_z(0) = \mathcal{H}_z(\alpha) = \mathcal{H}_z(+\infty) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_z(r) = 0$$

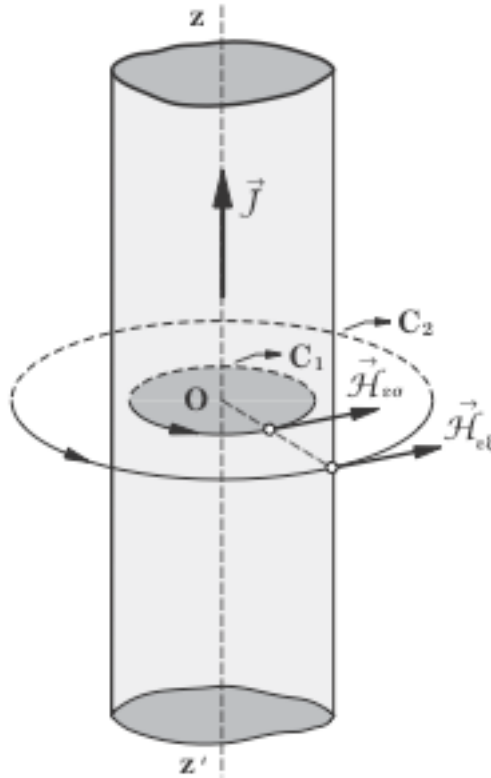
που σημαίνει ότι η αξονική συνιστώσα του πεδίου $\vec{\mathcal{H}}$ (άρα και του πεδίου $\vec{B}$) είναι μηδενική. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι τα πεδία $\vec{\mathcal{H}}$ και $\vec{B}$ που δημιουργεί γύρω του ο ρευματοφόρος κυλινδρικός αγωγός έχουν αξιμουθιακή διεύθυνση, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις:

$$\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\mathbf{r})\vec{e}_\varphi \quad \text{και} \quad \vec{B} = B(\mathbf{r})\vec{e}_\varphi$$

όπου $\vec{e}_\varphi$ το μοναδιαίο αζιμουθιακό διάνυσμα, που μαζί με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_z$ και $\vec{e}_r$ (αξονικό και ακτινικό) αποτελούν δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα, δηλαδή ισχύει $\vec{e}_\varphi = (\vec{e}_z \times \vec{e}_r)$.

ii) Για τον υπολογισμό του μέτρου του πεδίου $\vec{\mathcal{H}}$ στο εσωτερικό του αγωγού ($0 \leq r \leq R$), εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere κατά μήκος της περιφέρειας C_1 , που το κέντρο της O βρίσκεται στον άξονα zz' και το επίπεδό της είναι κάθετο στον άξονα (σχ. 8), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{(C_1)} (\vec{\mathcal{H}}_{\text{εσ}} \cdot d\vec{L}) &= I_{(C_1)} \Rightarrow \sum_{(C_1)} (\mathcal{H}_{\text{εσ}} dL \sin 0) = I_{(C_1)} \Rightarrow \\ \mathcal{H}_{\text{εσ}} \sum_{(C_1)} (dL) &= I_{(C_1)} \Rightarrow \mathcal{H}_{\text{εσ}} 2\pi r = J \pi r^2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\text{εσ}} = J r / 2 \end{aligned} \quad (7)$$



Σχήμα 8

όπου $I_{(C_1)}$ η ένταση του ρεύματος που περιβάλλεται από την γραμμή C_1 και $\mathcal{H}_{\text{εσ}}$ το μέτρο του πεδίου $\vec{\mathcal{H}}$ σ' ένα εσωτερικό σημείο του αγωγού. Εξάλλου εφαρμόζοντας το ίδιο θεώρημα για την κυκλική γραμμή C_2 , που βρίσκεται στο εξωτερικό του κυλινδρικού αγωγού (σχ. 8) έχουμε:

$$\sum_{(C_2)} (\vec{\mathcal{H}}_{\text{εξ}} \cdot d\vec{L}) = I_{(C_2)} \Rightarrow \sum_{(C_2)} (\mathcal{H}_{\text{εξ}} dL \sin 0) = I_{(C_2)} \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_{\varepsilon\xi} \sum_{(C_2)} (dL) = I_{(C_2)} \Rightarrow \mathcal{H}_{\varepsilon\xi} 2\pi r = J\pi R^2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\varepsilon\xi} = JR^2/2r \quad (8)$$

όπου $I_{(C_2)}$ η ένταση του ρεύματος που περιβάλλεται από την γραμμή C_2 , δηλαδή η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυλινδρικό αγωγό και $\mathcal{H}_{\varepsilon\xi}$ το μέτρο του πεδίου $\vec{\mathcal{H}}$ σ' ένα εξωτερικό σημείο του αγωγού.

Παρατήρηση 1η:

Η σχέση (7) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το πεδίο $\vec{\mathcal{H}}$ έχει αζιμουθιακή διεύθυνση επιτρέπει να γράψουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\sigma} &= \frac{Jr}{2} \vec{e}_\phi \Rightarrow \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\sigma} = \frac{Jr}{2} (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = \frac{1}{2} (J \vec{e}_z \times r \vec{e}_r) \Rightarrow \\ \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\sigma} &= \frac{1}{2} (\vec{J} \times \vec{r}) \quad \mu\epsilon \quad 0 \leq r \leq R \end{aligned} \quad (9)$$

Επίσης η σχέση (8) μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\xi} &= \frac{JR^2}{2r} \vec{e}_\phi = \frac{JR^2}{2r} (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \Rightarrow \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\xi} = \frac{R^2}{2r^2} (J \vec{e}_z \times r \vec{e}_r) \Rightarrow \\ \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\xi} &= \frac{R^2}{2r^2} (\vec{J} \times \vec{r}) \quad \mu\epsilon \quad R \leq r < +\infty \end{aligned} \quad (10)$$

Παρατήρηση 2η:

Από την σχέση (1) προκύπτει:

$$\lim_{r \rightarrow R^-} (\mathcal{H}_{\varepsilon\sigma}) = J R/2$$

ενώ από την (2) προκύπτει:

$$\lim_{r \rightarrow R^+} (\mathcal{H}_{\varepsilon\xi}) = J R^2/2R = J R/2$$

δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{r \rightarrow R^-} (\mathcal{H}_{\varepsilon\sigma}) = \lim_{r \rightarrow R^+} (\mathcal{H}_{\varepsilon\xi}) = J R/2$$

που σημαίνει ότι το πεδίο $\vec{\mathcal{H}}$ στα σημεία της παράπλευρης επιφάνειας του κυλινδρικού αγωγού δεν παρουσιάζει ασυνέχεια.

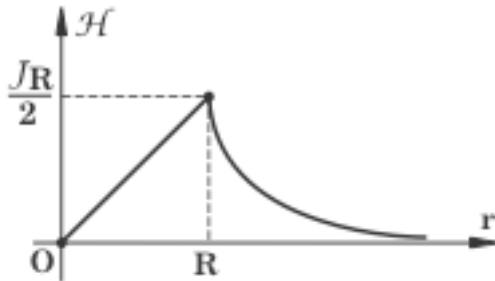
Παρατήρηση 3η:

Για το πεδίο $\vec{B}$ έχουμε:

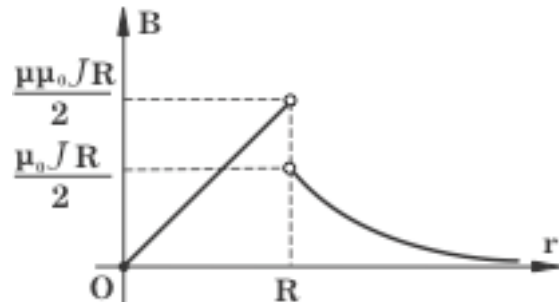
$$\vec{B}_{\varepsilon\sigma} = \mu\mu_0 \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\sigma} \quad \vec{B}_{\varepsilon\sigma} = \frac{\mu\mu_0}{2} (\vec{J} \times \vec{r})$$

ΚΟΙ

$$\vec{B}_{\varepsilon\xi} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}_{\varepsilon\xi} \quad \vec{B}_{\varepsilon\xi} = \frac{\mu_0 R^2}{2r^2} (\vec{J} \times \vec{r})$$



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτουν:

$$\lim_{r \rightarrow R_-} (B_{\varepsilon\sigma}) = \mu\mu_0 J R/2$$

ΚΟΙ

$$\lim_{r \rightarrow R_+} (B_{\varepsilon\xi}) = \mu_0 J R^2/2R = \mu_0 J R/2$$

δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{r \rightarrow R_-} (B_{\varepsilon\sigma}) \neq \lim_{r \rightarrow R_+} (B_{\varepsilon\xi})$$

που σημαίνει ότι το πεδίο $\vec{B}$ στα σημεία της παράπλευρης επιφάνειας του κυλινδρικού αγωγού παρουσιάζει ασυνέχεια. Στα σχήματα (9) και (10) φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathcal{H}(r)$ και $B(r)$.

Παραδειγμα

2ο

Αγώγιμο υλικό γεμίζει τον χώρο μεταξύ δύο κυλίνδρων K_1 και K_2 , ακτίνων R_1 και R_2 αντιστοίχως με $R_1 > R_2$, των οποίων τα μήκη είναι απεριόριστα οι δε γεωμετρικοί τους άξονες παράλληλοι. Ο κύλινδρος K_2 βρίσκεται στο εσωτερικό του K_1 και είναι κοίλος, το δε αγώγιμο υλικό μεταφέρει ρεύμα, του οποίου η πυκνότητα $\vec{J}$ είναι σταθερή σε όλη του την έκταση και κατευθύνεται παράλληλα προς τους άξονες των κυλίνδρων. Να δείξετε ότι η μαγνητική διέγερση (πεδίο $\vec{\mathcal{H}}$) του μαγνητικού πεδίου του ρεύματος σ' ένα εσωτερικό σημείο του κοίλου κυλίνδρου, δίνεται από την σχέση:

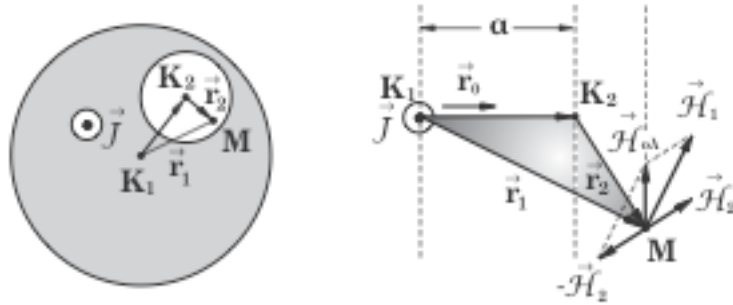
$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\alpha}{2} (\vec{J} \times \vec{r}_0)$$

όπου α η απόσταση των δύο αξόνων και $\vec{r}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα της

κάθετης επί τους δύο άξονες διεύθυνσης. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει από την παραπάνω σχέση;

ΛΥΣΗ: Εάν ο κύλινδρος K_1 ήταν πλήρης με το αγωγίμο υλικό θα δημιουργούσε στο τυχαίο σημείο M του εσωτερικού του κοίλου κυλίνδρου K_2 πεδίο $\vec{\mathcal{H}}_1$, που σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα (παρατήρηση 1η) δίνεται από την σχέση:

$$\vec{\mathcal{H}}_1 = \frac{1}{2}(\vec{J} \times \vec{r}_1) \quad (1)$$



Σχήμα 11

όπου $\vec{r}_1$ η κάθετη προς τον άξονα του κυλίνδρου K_1 επιβατική ακτίνα του M . Εξάλλου εάν ο κύλινδρος K_2 ήταν πλήρης με το αγωγίμο υλικό και διαρρεόταν με ρεύμα πυκνότητας $\vec{J}$ θα δημιουργούσε στο M πεδίο $\vec{\mathcal{H}}_2$ που δίνεται από ανάλογη προς την σχέση (1), δηλαδή θα ισχύει:

$$\vec{\mathcal{H}}_2 = \frac{1}{2}(\vec{J} \times \vec{r}_2) \quad (2)$$

όπου $\vec{r}_2$ η αντίστοιχη επιβατική ακτίνα του M ως προς τον άξονα του κυλίνδρου K_2 . Όμως η απουσία αγωγίμου υλικού στον χώρο του κυλίνδρου K_2 μας επιτρέπει χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, να ισχυριστούμε ότι, το ολικό πεδίο $\vec{\mathcal{H}}_{ol}$ στο σημείο M είναι:

$$\vec{\mathcal{H}}_{ol} = \vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_2 \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \vec{\mathcal{H}}_{ol} = \frac{1}{2}(\vec{J} \times \vec{r}_1) - \frac{1}{2}(\vec{J} \times \vec{r}_2) \Rightarrow$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{ol} = \frac{1}{2}[\vec{J} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \Rightarrow \vec{\mathcal{H}}_{ol} = \frac{1}{2}(\vec{J} \times \overline{K_1 K_2}) \Rightarrow$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{ol} = \frac{1}{2}(\vec{J} \times \alpha \vec{r}_0) = \frac{\alpha}{2}(\vec{J} \times \vec{r}_0) \quad (3)$$

Παρατηρούμε από την (3) ότι το ολικό πεδίο $\vec{\mathcal{H}}_{ol}$ είναι ανεξάρτητο της θέσεως του σημείου M εντός του κυλίνδρου K_2 , δηλαδή το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι ομογενές.