

ΜΙΑ ΑΠΡΟΣΔΟΚΗΤΗ ΚΥΛΙΣΗ

Τροχός μάζας m και ακτίνας R , εφάπτεται ενός οριζόντιου δοκαριού μάζας M με το οποίο παρουσιάζει αρκετά μεγάλο συντελεστή οριακής τριβής, ο οποίος επιτρέπει την κύλιση χωρίς ολίσθηση του τροχού πάνω στο δοκάρι. Το δοκάρι βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και κάποια στιγμή που θεωρείται ως αρχή του χρόνου εξασκείται σ' αυτό οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που μεταβάλλεται με τον χρόνο t σύμφωνα με την σχέση:

$$\vec{F} = F_0 \eta \mu \omega t \vec{i}$$

όπου F_0 , ω θετικές και σταθερές ποσότητες και $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του οριζόντιου άξονα Ox .

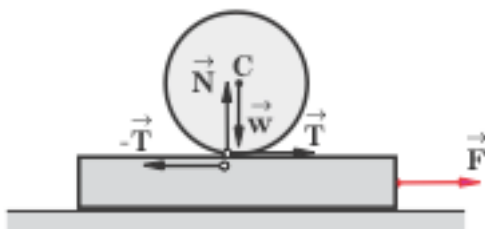
i) Να εξετάσετε την κίνηση του δοκαριού και του τροχού στο σύστημα αναφοράς του δαπέδου.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής μεταξύ τροχού-δοκαριού, ώστε να εξασφαλίζεται η κύλιση του τροχού.

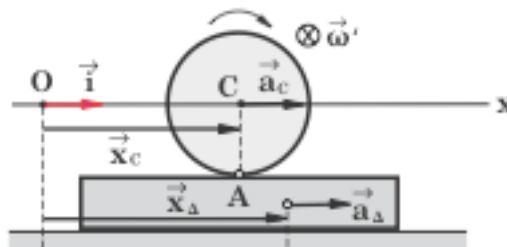
Δίνεται η ροπή αδράνειας $I_C = mR^2/2$ του τροχού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του και διερχόμενο από το κέντρο του C και η επιτάχυνση $\vec{g}$ της βαρύτητας.

ΛΥΣΗ: i) Ο τροχός δέχεται το βάρος του $\vec{w}$ και την αντίδραση του δοκαριού, η οποία αναλύεται στην κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και στην τριβή $\vec{T}$, που είναι στατική τριβή, αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση πάνω στο δοκάρι. Εξάλλου το δοκάρι κατά την διεύθυνση κίνησής του $x'x$ δέχεται την δύναμη $\vec{F}$ και την αντίδραση $-\vec{T}$ της τριβής $\vec{T}$ σύμφωνα δε με τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα θα έχουμε την σχέση:

$$F_0 \eta \mu \omega t - T = M a_\Delta \quad (1)$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

όπου a_Δ η επιτάχυνση του δοκαριού (αλγεβρική τιμή) στο σύστημα αναφοράς του δαπέδου την στιγμή που εξετάζουμε το σύστημα. Εφαρμόζοντας τον ίδιο νόμο

μο για την κίνηση του κέντρου μάζας C του δίσκου παίρνουμε την σχέση:

$$\mathbf{T} = m\mathbf{a}_C \quad (2)$$

όπου a_C η αντίστοιχη επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δοκαριού (αλγεβρική τιμή). Όμως η τριβή $\vec{T}$ παρουσιάζει ροπή περί το κέντρο μάζας C του τροχού, με αποτέλεσμα να προκαλεί περιστροφή αυτού περι άξονα που διέρχεται από το C και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$ του τροχού έχει κάθε στιγμή αλγεβρική τιμή, που ικανοποιεί τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, δηλαδή την σχέση:

$$\mathbf{TR} = I_C \omega' \Rightarrow \mathbf{TR} = \frac{mR^2}{2} \omega' \Rightarrow \mathbf{T} = \frac{mR}{2} \omega' \quad (3)$$

όπου T η αλγεβρική τιμή της τριβής $\vec{T}$. Όμως η κυλίσση χωρίς ολίσθηση του τροχού επιβάλλει να θεωρήσουμε κοινή την επιτάχυνση των σημείων επαφής A του τροχού με το δοκάρι είτε αυτά είναι σημεία του τροχού είτε σημεία του δοκαριού, οπότε θα ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{a}_C + \omega' \mathbf{R} = \mathbf{a}_\Delta \Rightarrow \omega' \mathbf{R} = \mathbf{a}_\Delta - \mathbf{a}_C \quad (4)$$

η οποία συνδυαζόμενη με την (3) δίνει:

$$\mathbf{T} = m(\mathbf{a}_\Delta - \mathbf{a}_C) / 2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} m\mathbf{a}_C = m(\mathbf{a}_\Delta - \mathbf{a}_C) / 2 \Rightarrow$$

$$3\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_\Delta \Rightarrow \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_\Delta / 3 \quad (5)$$

και η (2) παίρνει την μορφή:

$$\mathbf{T} = m\mathbf{a}_\Delta / 3 \quad (6)$$

Λόγω της προηγούμενης σχέσεως η (1) γράφεται:

$$F_0 \eta \mu \omega t - m\mathbf{a}_\Delta / 3 = M\mathbf{a}_\Delta \Rightarrow 3F_0 \eta \mu \omega t = (3M + m)\mathbf{a}_\Delta \Rightarrow$$

$$\mathbf{a}_\Delta = \frac{3F_0 \eta \mu \omega t}{3M + m} \quad (7)$$

Η (7) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα v_Δ (αλγεβρική τιμή) του δοκαριού σε συνάρτηση με τον χρόνο t, η οποία γράφεται:

$$\frac{dv_\Delta}{dt} = \frac{3F_0 \eta \mu \omega}{3M + m} \Rightarrow dv_\Delta = \frac{3F_0 \eta \mu \omega}{3M + m} dt$$

η οποία με ολοκλήρωση δίνει:

$$v_\Delta = - \frac{3F_0 \sigma \eta \mu \omega t}{\omega(3M + m)} + C \quad (8)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσεως C θα βρεθεί από την αρχική συνθήκη ότι για $t=0$ είναι $v_{\Delta}=0$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$0 = -\frac{3F_0}{\omega(3M+m)} + C \Rightarrow C = \frac{3F_0}{\omega(3M+m)}$$

και η (8) γράφεται:

$$v_{\Delta} = \frac{3F_0}{\omega(3M+m)} - \frac{3F_0 \sin \omega t}{\omega(3M+m)} \Rightarrow v_{\Delta} = \frac{3F_0(1 - \sin \omega t)}{\omega(3M+m)} \Rightarrow$$

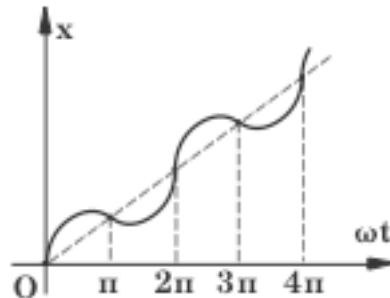
$$\frac{dx_{\Delta}}{dt} = \frac{3F_0(1 - \sin \omega t)}{\omega(3M+m)} \Rightarrow dx_{\Delta} = \frac{3F_0(1 - \sin \omega t)dt}{\omega(3M+m)}$$

η οποία με ολοκλήρωση δίνει:

$$x_{\Delta} = \frac{3F_0}{3M+m} \left(\frac{t}{\omega} - \frac{\eta \mu \omega t}{\omega^2} \right) + C'$$

όπου x_{Δ} η μετατόπιση του δοκαριού (αλγεβρική τιμή) από την αρχική του θέση σε χρόνο t και C' σταθερά ολοκλήρωσεως που θα βρεθεί από την αρχική συνθήκη $x_{\Delta}(0)=0$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει $C'=0$. Έτσι η εξίσωση κίνησης του δοκαριού στο σύστημα αναφοράς του δαπέδου θα έχει την μορφή:

$$x_{\Delta} = \frac{3F_0}{3M+m} \left(\frac{t}{\omega} - \frac{\eta \mu \omega t}{\omega^2} \right) \quad (9)$$



Σχήμα 3

Από την (9) προκύπτει ότι η κίνηση του δοκαριού είναι μη περιοδική μολονότι εξασκείται σ' αυτό περιοδική δύναμη, η δε γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα (3). Χρησιμοποιώντας στην συνέχεια την σχέση $a_c = a_{\Delta}/3$ και εργαζόμενοι με τον ίδιο ως και προηγούμενο τρόπο θα καταλήξουμε στην εξίσωση κίνησης του κέντρου μάζας του δίσκου που έχει την μορφή:

$$x_c = \frac{F_0}{3M+m} \left(\frac{t}{\omega} - \frac{\eta \mu \omega t}{\omega^2} \right) \quad (10)$$

Τέλος συνδυάζοντας τις σχέσεις (3), (5) και (6) παίρνουμε τελικά:

$$\omega' = \frac{2F_0 \eta \mu \omega t}{(3M + m)R}$$

η οποία ολοκληρούμενη δύο φορές (με μηδενική αρχική γωνιακή ταχύτητα και μηδενική αρχική γωνιακή εκτροπή του τροχού), τελικά δίνει:

$$\varphi(t) = \frac{2F_0}{(3M + m)R} \left(\frac{t}{\omega} - \frac{\eta \mu \omega t}{\omega^2} \right) \quad (11)$$

Η (11) αποτελεί την εξίσωση της στροφικής κίνησης του κυλιόμενου τροχού, όπου $\varphi(t)$ είναι η γωνία στροφής του ως συνάρτηση του χρόνου.

ii) Για να εξασφαλίζεται η κύλιση χωρίς ολίσθηση του τροχού σε όλη την διάρκεια δράσεως της δύναμης $\vec{F}$ επί του δοκαριού, πρέπει η τριβή $\vec{T}$ να είναι στατική, δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$|\vec{T}| \leq \mu N \stackrel{(2)}{\Rightarrow} m|a_c| \leq \mu mg \Rightarrow$$

$$\frac{F_0 |\eta \mu \omega t|}{3M + m} \leq \mu g \Rightarrow \mu \geq \frac{F_0 |\eta \mu \omega t|}{(3M + m)g}$$

Η πιο πάνω σχέση θα ισχύει κάθε στιγμή, εφ' όσον ο συντελεστής οριακής τριβής μ μεταξύ τροχού και δοκαριού ικανοποιεί την σχέση:

$$\mu \geq \frac{F_0}{(3M + m)g}$$

P.M. fysikos