

ΜΙΑ ΚΙΝΗΣΗ ΠΟΥ ΕΙΧΕ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΕΙ ΤΟΥΣ ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΝΕΤ

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Ένα υλικό σημείο δέχεται κεντρική δύναμη $\vec{F}(r)$, υπό την επίδραση της οποίας διαγράφει επίπεδη τροχιά. Να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση της τροχιάς σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) με πόλο το κέντρο από το οποίο εκπορεύεται η δύναμη, έχει την μορφή:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r = \frac{mr^4}{\mathcal{L}^2} F(r)$$

ή την μορφή:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\mathcal{L}^2 u^2} F(r)$$

όπου $u=1/r$, $\mathcal{L}$ το μέτρο της σταθερής στροφορμής του υλικού σημείου και m η μάζα του.

ΛΥΣΗ: Επειδή το υλικό σημείο δέχεται κεντρική δύναμη θα έχει μόνο ακτινική επιτάχυνση και σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα, ισχύει κατά την ακτινική διεύθυνση η σχέση:

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = F(r) \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{F(r)}{m} \quad (1)$$

Όμως για το σταθερό μέτρο $\mathcal{L}$ της στροφορμής ισχύει:

$$\mathcal{L} = mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathcal{L}}{mr^2}$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\mathcal{L}^2}{m^2 r^4} = \frac{F(r)}{m} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^3} = \frac{F(r)}{m} \quad (2)$$

Εάν η εξίσωση της τροχιάς σε πολικές συντεταγμένες έχει την μορφή $r=r(\theta)$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{\mathcal{L}}{mr^2} \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς τον χρόνο t παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \frac{\mathcal{L}}{m r^2} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \frac{\mathcal{L}}{m r^2} \right) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \left[\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\theta^2} \frac{\mathcal{L}}{m r^2} + \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \frac{\mathcal{L}}{m} \left(-\frac{2}{r} \right) \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right] \frac{\mathcal{L}}{m r^2} \Rightarrow \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\theta^2} \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^4} - \frac{2\mathcal{L}^2}{m^2 r^5} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right)^2\end{aligned}\quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\theta^2} \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^4} - \frac{2\mathcal{L}^2}{m^2 r^5} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right)^2 - \frac{2\mathcal{L}^2}{m^2 r^3} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} \Rightarrow \\ \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^4} \left[\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right)^2 - \mathbf{r} \right] &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} \Rightarrow \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right)^2 - \mathbf{r} &= \frac{m^2 r^4}{\mathcal{L}^2} \mathbf{F}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Εξάλλου θέτοντας $u=1/r$ η σχέση (3) γράφεται:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\mathcal{L}}{m} \frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{\mathcal{L}}{m} \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \quad (5)$$

Παραγωγίζοντας την (5) ως προς τον χρόνο t έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{\mathcal{L}}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right) = -\frac{\mathcal{L}}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{\mathcal{L}}{m} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2} \right) \frac{\mathcal{L}}{m r^2} = -\frac{\mathcal{L}^2 \mathbf{u}^2}{m^2} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2} \right)\end{aligned}\quad (6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (6) παίρνουμε:

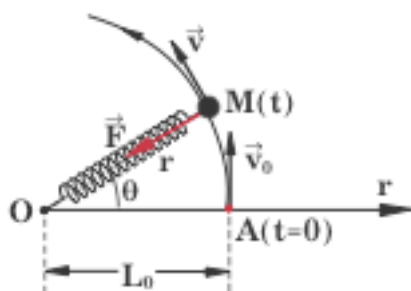
$$\begin{aligned}-\frac{\mathcal{L}^2 \mathbf{u}^2}{m^2} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2} \right) - \frac{\mathcal{L}^2 \mathbf{u}^3}{m^2} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} \Rightarrow -\frac{\mathcal{L}^2 \mathbf{u}^2}{m^2} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2} + \mathbf{u} \right) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} \Rightarrow \\ \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2} + \mathbf{u} &= -\frac{m}{\mathcal{L}^2 \mathbf{u}^2} \mathbf{F}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

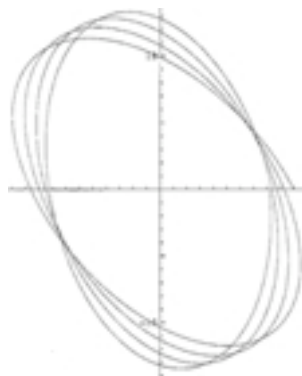
Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μικρό σώμα Σ μάζας m , δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους L_0 , το άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί στο σημείο O του επιπέδου. Δίνουμε στο σώμα ώθηση βραχείας διάρκειας ώστε ν' αποκτήσει ταχύτητα $\vec{v}_0$ κάθετη στον άξονα του ελατηρίου. Να μελετηθεί η κίνηση του σώματος.

ΛΥΣΗ: Στην διάρκεια της κίνησής του το σώμα δέχεται το βάρος του που εξουδετερώνεται από την κατακόρυφη αντίδραση του λείου οριζόντιου επιπέδου και την δύναμη $\vec{F}$ από το παραμορφωμένο ελατήριο, της οποίας ο φορέας διέρχεται συνεχώς από το O , δηλαδή η $\vec{F}$ είναι κεντρική δύναμη. Άρα η κίνηση του σώματος είναι επίπεδη και μάλιστα το επίπεδο κίνησης είναι αυτό που καθορίζει η αρχική επιβατική ακτίνα του σώματος και η αρχική του ταχύτητα. Επιπλέον η στροφορμή $\vec{L}$ του σώματος περί το O διατηρείται σταθερή, που σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε την σχέση:

$$\vec{L} = m\vec{v}_0 L_0 \quad (1)$$



Σχήμα α.



Σχήμα β.

Εάν $\vec{r}$ είναι η επιβατική ακτίνα του σώματος ως προς το O κατα μια τυχαία χρονική στιγμή t και θ η αντίστοιχη πολική του γωνία, λόγω της κεντρικής κίνησης θα ισχύει σύμφωνα με το προηγούμενο παραδειγμα η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\mathcal{L}^2 u^2} F \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{m^2 v_0^2 L_0^2} \frac{F}{u^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{m v_0^2 L_0^2} \frac{F}{u^2} \quad (2)$$

όπου $u=1/r$. Όμως για την δύναμη $\vec{F}$ ισχύει $F=-k(r-L_0)$, οπότε η (2) γράφεται:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{m v_0^2 L_0^2} \frac{(r - L_0)}{u^2} \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{m v_0^2 L_0^2} \frac{(1/u - L_0)}{u^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - a \frac{(1/u - L_0)}{u^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + a \left(\frac{L_0}{u^2} - \frac{1}{u^3} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\text{με } \mathbf{a} = \mathbf{k}/m\nu_0^2 L_0^2$$

Η (3) είναι μια **μη γραμμική** διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και δεν λύνεται με αναλυτικό τρόπο, αλλά μόνο με αριθμητική μέθοδο, λογουχάρη με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα **Mathematika**. Στο σχήμα (β) φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $r=f(\theta)$, η οποία κατασκευάστηκε με το πρόγραμμα Mathematica και αποτελείται από μη επαναλαμβανόμενες συνεχείς τροχιές.

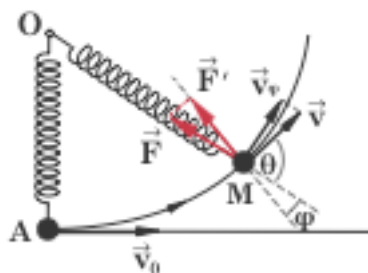
P.M. fysikos



Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σφαιρίδιο μάζας m δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους r_0 στο άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί σε σημείο O του επιπέδου. Δίνουμε στο σφαιρίδιο μια ώθηση βραχείας διάρκειας ώστε ν' αποκτήσει ταχύτητα $\vec{\nu}_0$, της οποίας ο φορέας είναι κάθετος στον άξονα του ελατηρίου. Να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σφαιριδίου στην θέση, όπου για πρώτη φορά το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $\nu_0/2$.

ΛΥΣΗ: Στην διάρκεια της κίνησής του το σφαιρίδιο δέχεται το βάρος του που εξουδετερώνεται από την κατακόρυφη αντίδραση του λείου οριζώντιου επιπέδου και την δύναμη $\vec{F}$ από το παραμορφωμένο ελατήριο, της οποίας ο φορέας διέρχεται συνεχώς από το O , δηλαδή η $\vec{F}$ είναι κεντρική δύναμη. Άρα η κίνηση του σώματος είναι επίπεδη και μάλιστα το επίπεδο κίνησης είναι αυτό που καθορίζει η αρχική επιβατική ακτίνα $\vec{r}_0$ του σφαιριδίου και η αρχική του ταχύτητα $\vec{\nu}_0$. Επιπλέον η στροφορμή $\vec{L}$ του σώματος περί το O διατηρείται σταθερή, που σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε την σχέση:

$$m\mathbf{r}_0\mathbf{v}_0 = m(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r})\mathbf{v}_\varphi \Rightarrow \mathbf{r}_0\mathbf{v}_0 = (\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r})\mathbf{v}_\varphi \quad (1)$$



όπου Δr η επιμήκυνση του ελατηρίου από την φυσική του κατάσταση όταν το σφαιρίδιο βρίσκεται στην θέση M στην οποία η ταχύτητά του $\vec{\nu}$ έχει μέτρο $\nu_0/2$ και $\vec{\nu}_\varphi$ η κάθετη προς την επιβατική ακτίνα $\vec{OM}$ του σφαιριδίου συνιστώσα της $\vec{\nu}$. Εάν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{OM}$ και $\vec{\nu}$ θα ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{v}_\varphi = \mathbf{v}\eta\mu\theta = \mathbf{v}_0\eta\mu\theta / 2$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0 = (\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \mathbf{v}_0 \frac{\eta \mu \theta}{2} \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{2 \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}} \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας εξάλλου για το σφαιρίδιο το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας κατά την κίνησή του από την θέση Α στην θέση Μ, παίρνουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{m \mathbf{v}_0^2}{2} &= \frac{m \mathbf{v}^2}{2} + \frac{k \Delta \mathbf{r}^2}{2} \Rightarrow \mathbf{v}_0^2 = \mathbf{v}^2 + \frac{k \Delta \mathbf{r}^2}{m} \Rightarrow \\ \mathbf{v}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}_0^2}{4} + \frac{k \Delta \mathbf{r}^2}{m} \Rightarrow \mathbf{v}_0^2 = \frac{\mathbf{v}_0^2}{4} + \frac{k \Delta \mathbf{r}^2}{m} \Rightarrow \\ \Delta \mathbf{r}^2 &= \frac{3 \mathbf{v}_0^2}{4} \frac{m}{k} \Rightarrow \Delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{v}_0}{2} \sqrt{\frac{3m}{k}} \end{aligned} \quad (3)$$

Εάν $\vec{\mathbf{F}}'$ είναι η κάθετη προς την ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ συνιστώσα της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$, τότε η $\vec{\mathbf{F}}'$ παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης για το σφαιρίδιο στην θέση Μ και επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \frac{m \mathbf{v}^2}{\mathbf{R}_M} \Rightarrow \mathbf{F} \cos \varphi = \frac{m \mathbf{v}_0^2}{4 \mathbf{R}_M} \Rightarrow \mathbf{F} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{m \mathbf{v}_0^2}{4 \mathbf{R}_M} \Rightarrow \\ k \Delta \mathbf{r} \eta \mu \theta &= \frac{m \mathbf{v}_0^2}{4 \mathbf{R}_M} \Rightarrow \mathbf{R}_M = \frac{m \mathbf{v}_0^2}{4 k \Delta \mathbf{r} \eta \mu \theta} \end{aligned} \quad (4)$$

όπου $\mathbf{R}_M$ η ζητούμενη ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σφαιριδίου. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (2) παίρνουμε:

$$\mathbf{R}_M = \frac{m \mathbf{v}_0^2 (\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r})}{4 k \Delta \mathbf{r}} = \frac{m \mathbf{v}_0^2 (\mathbf{r}_0 / \Delta \mathbf{r} + 1)}{4 k} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \mathbf{R}_M = \frac{m \mathbf{v}_0^2}{4 k} \left(\frac{2 \mathbf{r}_0}{\mathbf{v}_0} \sqrt{\frac{k}{3m}} + 1 \right)$$

P.M. fysikos