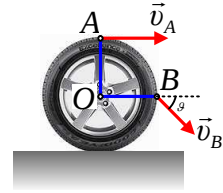


Τρεις κινήσεις ενός τροχού.

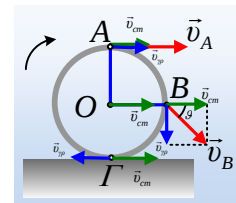
- 1) Σε οριζόντιο επίπεδο κινείται ένας τροχός ακτίνας $R=0,5\text{m}$. Η ταχύτητα του σημείου A, στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, είναι οριζόντια μέτρου $v_A=4\text{m/s}$, ενώ η ταχύτητα του σημείου B, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα.



- i) Να υπολογιστούν η ταχύτητα v_{cm} του άξονα O του τροχού και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.
ii) Ο τροχός αυτός κυλίστα ή όχι;

Απάντηση:

- i) Προφανώς η κίνηση του τροχού δεν είναι μεταφορική, αφού οι ταχύτητες των σημείων A και B είναι διαφορετικές. **Θεωρώντας** ότι ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση μια μεταφορική με ταχύτητα κέντρου μάζας v_{cm} και μια στροφική γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O, τότε οι ταχύτητες των σημείων A και B, είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε από το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων για το σημείο B ($\theta=45^\circ$), έχουμε ότι $v_{cm}=v_{\gamma\rho}$. Ερχόμαστε στο σημείο A:



$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma\rho} \rightarrow v_A = 2v_{cm} \rightarrow v_{cm} = \frac{v_A}{2} = \frac{4}{2} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

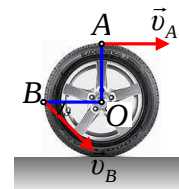
$$\text{Ενώ: } v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R \rightarrow \omega = \frac{v_{\gamma\rho}}{R} = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{2}{0,5} \text{ rad/s} = 4 \text{ rad/s}.$$

- ii) Εστιάζουμε στο σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος, στο σημείο Γ. Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι ταχύτητες του σημείου Γ, η ταχύτητα του κέντρου μάζας λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού και η γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της κυκλικής κίνησης του Γ γύρω από τον άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο O του τροχού. Τότε:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 0.$$

Αφού το σημείο Γ δεν κινείται ως προς το έδαφος, ο τροχός κυλίστα (χωρίς να ολισθαίνει).

- 2) Σε οριζόντιο επίπεδο κινείται ένας τροχός ακτίνας $R=0,5\text{m}$. Η ταχύτητα του σημείου A, στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, είναι οριζόντια μέτρου $v_A=1\text{m/s}$, ενώ η ταχύτητα του σημείου B, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, σχηματίζει γωνία θ , με $\tan\theta=3/4$ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα.

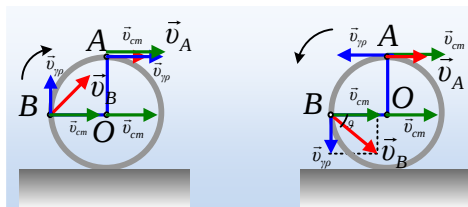


- i) Να υπολογιστούν η ταχύτητα v_{cm} του άξονα O του τροχού και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.

ii) Ο τροχός αυτός κυλίνεται ή όχι;

Απάντηση:

- i) Δουλεύοντας όπως και προηγουμένως, έχουμε ότι ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση. Δεν γνωρίζουμε όμως τη γωνιακή ταχύτητα. Αν ο τροχός στρέφεται δεξιόστροφα (όπως οι δείκτες του ρολογιού) θα έχουμε το πρώτο σχήμα, αν στρέφεται αριστερόστροφα, θα έχουμε το δεύτερο σχήμα.



Αλλά με βάση το σχήμα, στην πρώτη περίπτωση η ταχύτητα του σημείου B θα κατευθυνόταν προς τα πάνω σε σχέση με την ακτίνα, πράγμα αντίθετο με τα δεδομένα. Έτσι το σωστό σχήμα είναι το δεύτερο. Αλλά τότε:

$$\varepsilon \varphi \vartheta = \frac{v_{\gamma\rho}}{v_{cm}} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{v_{\gamma\rho}}{v_{cm}} \rightarrow v_{\gamma\rho} = \frac{3}{4} v_{cm} \quad (1)$$

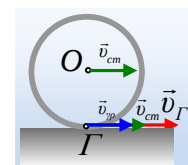
Αλλά τότε:

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho} \rightarrow v_A = v_{cm} - \frac{3}{4} v_{cm} = \frac{1}{4} v_{cm} \rightarrow v_{cm} = 4v_A = 4 \text{ m/s}$$

$$\text{Ενώ } v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R \rightarrow \omega = \frac{v_{\gamma\rho}}{R} = \frac{3v_{cm}}{4R} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 0,5} \text{ rad/s} = 6 \text{ rad/s}.$$

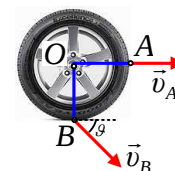
- ii) Ερχόμαστε τώρα στο σημείο Γ, όπου με βάση το διπλανό σχήμα, έχουμε:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} + v_{\gamma\rho} = v_{cm} + \frac{3}{4} v_{cm} = \frac{7}{4} v_{cm}$$



Αλλά αφού το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος έχει ταχύτητα διάφορη του μηδενός, ο τροχός ολισθαίνει και δεν κυλίνεται. (Άλλο το ότι ο τροχός **και** περιστρέφεται, όπως στην περίπτωση μας και άλλο κυλίνεται).

- 3) Από ορισμένο ύψος (από το έδαφος) εκτοξεύεται κατάλληλα ένας τροχός, ο οποίος κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Σε μια στιγμή η ταχύτητα του σημείου A, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, είναι οριζόντια μέτρου $v_A = 3 \text{ m/s}$, ενώ η ταχύτητα του σημείου B, στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, σχηματίζει γωνία θ , με $\varepsilon\theta = 4/7$ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστούν η ταχύτητα v_{cm} του άξονα O του τροχού, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού. Δίνεται η ακτίνα του $R = 0,5 \text{ m}$, ενώ κατά τη διάρκεια της κίνησης, ο άξονας του τροχού παραμένει διαρκώς οριζόντιος.



Απάντηση:

Στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις ο τροχός κινείται σε επαφή με ένα οριζόντιο επίπεδο, οπότε ουσιαστικά γνωρίζαμε ότι το κέντρο μάζας του είχε οριζόντια ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή όμως, ο τροχός πέφτει και έτσι το κέντρο μάζας του Ο έχει μια ταχύτητα, άλλης διεύθυνσης η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες v_{cmx} και v_{cmy} , όπως στο σχήμα. Ξανά αντιμετωπίζουμε την κίνηση του τροχού σαν σύνθετη, οπότε τις ίδιες συνιστώσες έχουν και τα σημεία Α και Β λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού. Όμως το σημείο Α δεν έχει κατακόρυφη ταχύτητα, πράγμα που μπορεί να συμβεί αν ο τροχός στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και η γραμμική ταχύτητα του Α έχει μέτρο:

$$v_{\gamma\rho} = \omega R = v_{cmy}, \text{ ενώ } v_{cmx} = v_A$$

Αλλά τότε:

$$\varepsilon\varphi = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} \rightarrow \frac{4}{7} = \frac{v_{cmy}}{v_{cmx} + v_{\gamma\rho}} \rightarrow \frac{v_{cmy}}{v_{cmx} + v_{cmy}} = \frac{4}{7} \rightarrow$$

$$7v_{cmy} = 4v_{cmy} + 4v_{cmx} \rightarrow 3v_{cmy} = 4v_{cmx} = 4v_A \rightarrow$$

$$v_{cmy} = \frac{4}{3}v_A = \frac{4}{3}3m/s = 4m/s$$

Έτσι το κέντρο μάζας Ο του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου:

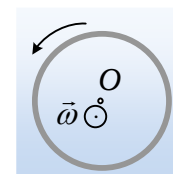
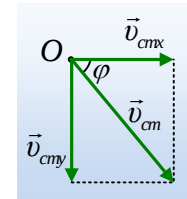
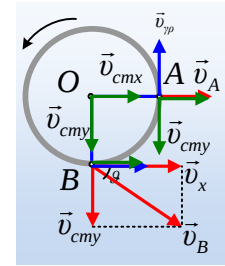
$$v_{cm} = \sqrt{v_{cmx}^2 + v_{cmy}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} m/s = 5m/s$$

Η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ με:

$$\varepsilon\phi\varphi = \frac{v_{cmy}}{v_{cmx}} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ενώ } v_{\gamma\rho} = \omega R = v_{cmy} \rightarrow \omega = \frac{v_{cmy}}{R} = \frac{4}{0,5} \text{ rad/s} = 8 \text{ rad/s}$$

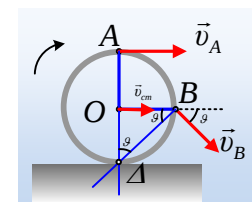
Με κατεύθυνση οριζόντια (πάνω στον άξονα) και φορά προς τον αναγνώστη.

**Σχόλιο για Καθηγητές:**

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις μελετήσαμε την κίνηση του τροχού θεωρώντας την σύνθετη. Η αλήθεια είναι ότι η κίνηση, είναι **μια** κίνηση ελεύθερου σώματος. Το αν ΕΜΕΙΣ την θεωρήσουμε σύνθετη ή όχι, είναι δική μας επιλογή. Έτσι κάποιος θα μπορούσε να δει και να μελετήσει τις κινήσεις αυτές, ως μόνο στροφικές, γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής.

Ας το δούμε.

- 1) Στο πρώτο παράδειγμα, αν φέρουμε κάθετες στις ταχύτητες στα



σημεία Α και Β αυτές τέμνονται σε ένα σημείο Δ. Αλλά αφού $\theta=45^\circ$ το τρίγωνο ΔΟΒ είναι ισοσκελές και το σημείο Δ, είναι το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος, το σημείο που στη λύση είχαμε ονομάσει, σημείο Γ. Αλλά τότε:

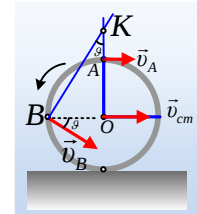
$$v_A = \omega \cdot r = \omega \cdot 2R \rightarrow \omega = \frac{v_A}{2R} = 4 \text{ rad/s} \text{ και } v_{cm} = \omega R = 2 \text{ m/s}$$

- 2) Στην 2^η κίνηση, φέρνοντας τις κάθετες στις δυο ταχύτητες, βρίσκουμε το στιγμιαίο άξονα που περνάει από το σημείο Κ, όπου:

$$\varepsilon \varphi \vartheta = \frac{(BO)}{(KO)} \rightarrow (KO) = \frac{R}{\varepsilon \varphi \vartheta} = \frac{0,5}{3/4} = \frac{2}{3} \text{ m} \rightarrow$$

$$(KA) = \frac{2}{3} \text{ m} - \frac{1}{2} \text{ m} = \frac{1}{6} \text{ m} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{v_A}{(KA)} = \frac{1}{1/6} \text{ rad/s} = 6 \text{ rad/s} \text{ και } v_{cm} = \omega(KO) = 6 \cdot \frac{2}{3} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$



- 3) Στο διπλανό σχήμα, με τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$\varepsilon \varphi \vartheta = \frac{(AO)}{(BO)} \rightarrow (AO) = R \cdot \varepsilon \varphi \vartheta = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \text{ m} = \frac{2}{7} \text{ m} \rightarrow$$

$$(LA) = R - (AO) = \frac{3}{14} \text{ m} \text{ και } (KA) = \frac{(AL)}{\varepsilon \varphi \vartheta} = \frac{3/14}{4/7} \text{ m} = \frac{3}{8} \text{ m}$$

$$\text{Οπότε } \omega = \frac{v_A}{(KA)} = \frac{3}{3/8} \text{ rad/s} = 8 \text{ rad/s}.$$

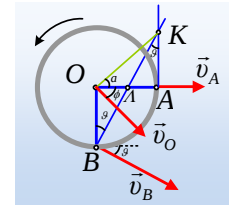
$$\text{Εξάλλου } (KO) = r_o = \sqrt{(OA)^2 + (AK)^2} = \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2} \text{ m} = \frac{5}{8} \text{ m} \text{ συνεπώς:}$$

$$v_o = \omega \cdot r_o = 8 \cdot \frac{5}{8} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

Κάθετη στην ΟΚ, όπου:

$$\sigma \phi \alpha = \frac{R}{(AK)} = \frac{0,5}{3/8} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Αλλά } \hat{a} + \hat{\phi} = 90^\circ \rightarrow \varepsilon \varphi \varphi = \frac{4}{3}$$



Υλικά Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονόσης Μάργαρης