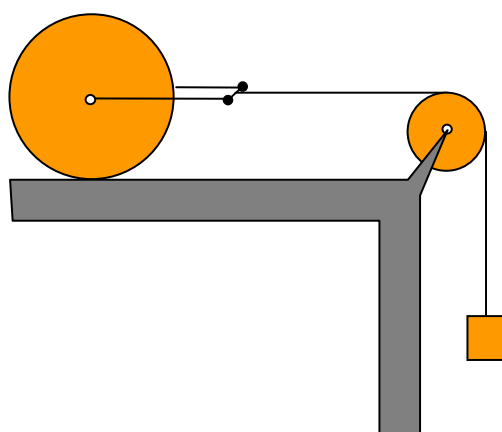


ΦΥΣΙΚΗ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ Γ΄

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ



Δ. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

5

Θεωρία -----5

Ασκήσεις – Προβλήματα ----- 15

Ροπές – Ισορροπία

22

Ασκήσεις – Προβλήματα ----- 29

Δυναμική Στερεού

39

Ασκήσεις – Προβλήματα ----- 54

Στροφορμή

91

Ασκήσεις – Προβλήματα -----100

Έργο και κινητική ενέργεια.

115

Ασκήσεις – Προβλήματα -----122

Επαναληπτικές Ασκήσεις

139

Ερωτήσεις Θεωρίας

179

Θέματα Εξετάσεων

Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί

σελιδοδείκτης.

Ασκήσεις -- Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Θεωρία

3.1. Κίνηση στερεού.

Όταν μελετάμε κίνηση ενός στερεού, το πρώτο που πρέπει να προσέξουμε είναι τι κίνηση κάνει το στερεό. Ένα στερεό μπορεί να:

- α) Στρέφεται μόνο γύρω από κάποιο άξονα.
- β) Κάνει μόνο μεταφορική κίνηση, χωρίς να στρέφεται.
- γ) Εκτελεί σύνθετη κίνηση και μεταφορική και περιστροφική.

3.2. Εξισώσεις στροφικής ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης.

Αν ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η κίνηση που εκτελεί είναι στροφική ομαλά μεταβαλλόμενη, επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη. Το σχολικό βιβλίο δεν δίνει τις εξισώσεις της γωνιακής

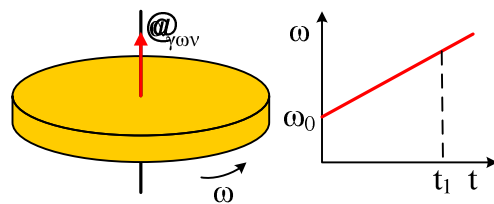
ταχύτητας και της γωνίας κατά την οποία στρέφεται το στερεό σε ορισμένο χρονικό διάστημα.

Οι εξισώσεις προκύπτουν όπως παρακάτω.

- α) Από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης και επειδή παραμένει σταθερή έχουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad (1) \text{ όπου } \omega_0 \text{ η αρχική γωνιακή επιτάχυνση. Αν πάρουμε } t_0=0$$

η εξίσωση (1) δίνει $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow$



$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \quad (2)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος.

- β) Για να υπολογίσουμε κατά ποια γωνία περιστρέφεται το στερεό σε ορισμένο χρονικό διάστημα, χρησιμοποιούμε το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σε συνάρτηση με το χρόνο. Η γωνία περιστροφής (γωνιακή μετατόπιση) είναι ίση με το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας, μέχρι και τον άξονα των χρόνων. Οπότε εδώ υπολογίζουμε το εμβαδόν του τραπεζίου και έχουμε:

$$\Delta\theta = \theta = \frac{\omega + \omega_0}{2} t = \frac{\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t + \omega_0}{2} t \quad \text{ή}$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (3).$$

Προσέξτε την πλήρη αναλογία των εξισώσεων (2) και (3) με τις εξισώσεις της

ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης $v = v_0 + at$ και $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$.

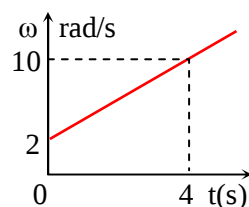
Οι εξισώσεις (2) και (3) πάντως πρέπει να αποδεικνύονται σε Άσκηση Εξετάσεων.

Παράδειγμα 1ο:

Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Να υπολογίσετε:

- Τη γωνιακή επιτάχυνση του στερεού.
- Τη γωνία κατά την οποία περιστρέφεται το στερεό από 0-4s.
- Ποια χρονική στιγμή το στερεό έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 40 \text{ rad/s}$;



Λύση

- i) Η γωνιακή επιτάχυνση ορίζεται ως $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ οπότε εκφράζει την κλίση της γωνιακής ταχύτητας στο διάγραμμα $\omega = f(t)$. Και επειδή η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία, η κλίση αυτή είναι σταθερή, οπότε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - 0} = \frac{10 - 2}{4 - 0} \text{ rad/s}^2 = 2 \text{ rad/s}^2$.

Η κίνηση του στερεού είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη.

- ii) Η γωνία περιστροφής του στερεού είναι ίση με το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας και τον άξονα των χρόνων. Άρα

$$\theta = \frac{B + \beta}{2} \cdot \omega = \frac{10 + 2}{2} 4 \text{ rad} = 24 \text{ rad}.$$

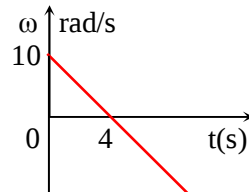
$$\text{Από τη σχέση } \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \text{ παίρνουμε } t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = 19 \text{ s}.$$

Εφαρμογή 1^η :

Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

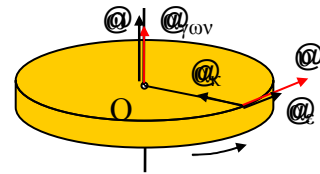
Ζητούνται:

- Η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού.
- Η γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$.
- Πόσες περιστροφές έκανε το στερεό από $t_1=2\text{s}$ έως $t_2=20\text{s}$;



3.3. Επιτάχυνση στερεού και επιτάχυνση σημείου.

Έστω ένα στερεό που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και ένα σημείο A του στερεού.



Τι κίνηση εκτελεί το σημείο A;

Το σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο O με την

ίδια γωνιακή ταχύτητα, όπως στο στερεό, άρα και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση με το στερεό.

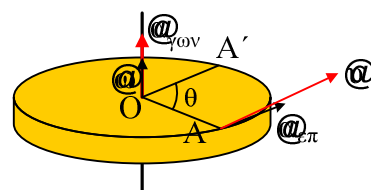
Άρα χρησιμοποιώντας γωνιακά μεγέθη, η κίνηση του σημείου A μπορεί να μελετηθεί με την βοήθεια της γωνιακής του επιτάχυνσης $\alpha_{\gamma\omega\nu}$, της γωνιακής του ταχύτητας ω και της γωνίας θ που στρέφεται σε ορισμένο χρονικό διάστημα, που είναι τα ίδια μεγέθη για όλα τα σημεία του στερεού.

Τι επιταχύνσεις έχει το σημείο A;

Χρησιμοποιώντας γραμμικά μεγέθη, η κίνηση του σημείου A μπορεί να μελετηθεί με χρήση μεγεθών όπως: Γραμμική ταχύτητα v , η οποία είναι πάντα εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, μήκος τόξου που διαγράφει το σημείο, επιτόχια επιτάχυνση, κεντρομόλος επιτάχυνση.

Βασικές σχέσεις μεταξύ γραμμικών και γωνιακών μεγεθών.

Έστω ένας δίσκος που στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O, ένα σημείο του A στην περιφέρειά του, όπου μετά από χρόνο t βρίσκεται στη θέση A', όπου θ η γωνία περιστροφής



του δίσκου.

- i) Η γωνία περιστροφής και το μήκος του τόξου AA' συνδέονται με τη σχέση:

$$\Delta\theta = \theta = \frac{\Delta s}{R} \quad (1)$$

- ii) Η γραμμική ταχύτητα $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ενώ η γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow$

$$v = \omega R \quad (2)$$

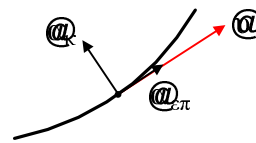
- iii) Από τη σχέση $v = \omega R$ παραγωγίζοντας παίρνουμε $\frac{dv}{dt} = (\omega R)' = \omega' R = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \rightarrow$

$$a_{\text{επ}} = a_{\gamma\omega\omega} \cdot R \quad (3)$$

όπου $a_{\text{επ}}$ η επιτρόχια επιτάχυνση η οποία εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου που εκτελεί κυκλική κίνηση.

Υπενθυμίζεται ότι το σημείο A έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση $a_k = \frac{v^2}{R}$ η οποία είναι υπεύθυνη για την αλλαγή της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Ή με άλλα λόγια

Η επιτάχυνση σε μια καμπυλόγραμμη κίνηση εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του διανύσματος της ταχύτητας. Αυτή μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια εφαπτόμενη στην τροχιά, η οποία ονομάζεται επιτρόχια επιτάχυνση και η οποία ευθύνεται για την αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας και μια κάθετη στην ταχύτητα την οποία λέμε κεντρομόλο επιτάχυνση και η οποία μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας.



Οι εξισώσεις (2) και (3) συνδέουν **τα μέτρα** γωνιακών και γραμμικών μεγεθών μιας και οι διευθύνσεις τους είναι ασύμβατα κάθετες. (Όπως φαίνεται στο σχήμα τα διανύσματα v και $a_{\text{επ}}$ βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ τα διανύσματα ω και $a_{\gamma\omega\omega}$ είναι κατακόρυφα).

Παράδειγμα 2ο:

Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας $R=0,5\text{m}$ για $t=0$ αρχίζει να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\omega}=2\text{rad/s}^2$.

Για τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$, ζητούνται:

- Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου.
- Ο αριθμός των περιστροφών που πραγματοποίησε ο δίσκος.
- Αναφερόμενοι σε ένα σημείο A στην περιφέρεια του δίσκου:
 - Βρείτε την επιτρόχια και την κεντρομόλο επιτάχυνση του σημείου A.

¹ Η γωνία θ σαν πηλίκο μηκών είναι αδιάστατο μέγεθος, άρα η μονάδα rad είναι μια «ψευτομονάδα» η οποία δεν υπολογίζεται σε περιπτώσεις υπολογισμού γραμμικών μεγεθών. Π.χ. $v = \omega R$.

β) Ποια η γραμμική ταχύτητα το σημείο A;

γ) Υπολογίστε το μήκος το τόξο που διέγραψε το σημείο A στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Λύση

i) Έχουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{t} \rightarrow$

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 2 \cdot 10 \text{ rad/s} = 20 \text{ rad/s}.$$

ii) Για να υπολογίσουμε τη γωνία θ που έχει περιστραφεί στο παραπάνω χρονικό διάστημα ο δίσκος, κάνουμε το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι αριθμητικά ίσο με τη γωνία.

$$\text{Άρα έχουμε } \theta = \frac{1}{2} \beta \cdot \tau = \frac{1}{2} 10 \cdot 20 = 100 \text{ rad}.$$

Επειδή δε σε κάθε περιστροφή αντιστοιχεί σε γωνία 2π , παίρνουμε:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{50}{\pi} \text{ περιστροφές}.$$

iii) Για το σημείο A έχουμε:

α) Η επιτροχία επιτάχυνση $\alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = 2 \text{ rad/s}^2 \cdot 0,5 \text{ m} = 1 \text{ m/s}^2$.

Ενώ για την κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = 400 \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = 200 \text{ m/s}^2$.

β) Η γραμμική ταχύτητα το σημείο A μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους:

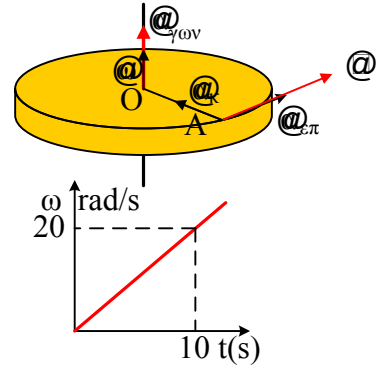
1) $v = \alpha_{\epsilon\pi} \cdot t = 1 \cdot 10 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$ ή

2) $v = \omega \cdot R = 20 \text{ rad/s} \cdot 0,5 \text{ m} = 10 \text{ m/s}.$

γ) Και το μήκος το τόξο μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους. Χρησιμοποιώντας γωνιακά μεγέθη ή γραμμικά μεγέθη:

1) $\theta = \frac{\Delta s}{R} \rightarrow \Delta s = \theta \cdot R = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ m}.$

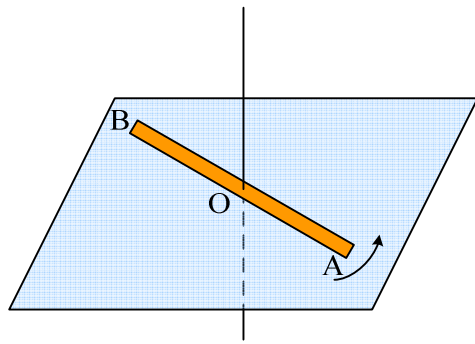
2) $s = \frac{1}{2} \alpha_{\epsilon\pi} t^2 = 0,5 \cdot 1 \cdot 100 \text{ m} = 50 \text{ m}.$



Εφαρμογή 2^η :

Μια ομογενής ράβδος AB μήκος $l = 4 \text{ m}$ στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσον της O, εφισκόμενη σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή στρέφεται όπως δείχνει το σχήμα με γωνιακή ταχύτητα 10 rad/s ενώ έχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = -1 \text{ rad/s}^2$.

i) Σχεδιάστε στο διπλανό σχήμα τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και

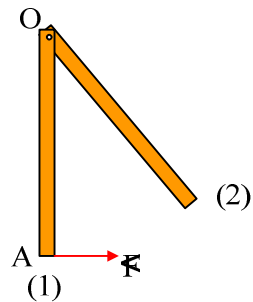


της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου.

- ii) Σχεδιάστε επίσης την γραμμική ταχύτητα του άκρου A καθώς και τα διανύσματα της κεντρομόλου και της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου A.
- iii) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του σημείου A.

Εφαρμογή 2''

Μια ράβδος μήκους $\ell = 2\text{m}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της O και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση (θέση 1). Ασκώντας μια κατάλληλη δύναμη στο άκρο A προσδίδουμε στην ράβδο σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2\text{rad/s}^2$, οπότε φτάνοντας στη θέση (2) έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1\text{rad/s}$.



- i) Για τη θέση αυτή να σχεδιάστε στο σχήμα τα διανύσματα της γραμμικής ταχύτητας και της επιτρόχιας επιτάχυνσης του άκρου A και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.
- ii) Έχει και άλλη επιτάχυνση το σημείο A; Αν ναι, να την υπολογίσετε.

3.4. Σύνθετη κίνηση.

Αν ένα στερεό μετακινείται συνολικά, ενώ ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του στο χώρο, τότε η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο επιμέρους κινήσεις (αρχή της επαλληλίας).

- 1) Μια μόνο μεταφορική, κατά την οποία το στερεό αντιμετωπίζεται σαν υλικό σημείο, ανάγοντάς το σε σημειακό αντικείμενο με συγκεντρωμένη όλη τη μάζα του σε ένα σημείο που ονομάζουμε κέντρο μάζας. Μελετάμε την κίνηση του κέντρου μάζας, βρίσκοντας την v_{cm} ή την επιτάχυνση a_{cm} ή την μετατόπιση του κέντρου μάζας $\Delta x = x_{cm}$.
- 2) Μια μόνο στροφική, γύρω από τον άξονα περιστροφής του στερεού, ο οποίος μπορεί να διέρχεται από το κέντρο μάζας του, μπορεί και όχι.

Προσοχή: Σε περιπτώσεις κύλισης τροχού, μια συνηθισμένη σύνθετη κίνηση, οι εξισώσεις που έχει αποδείξει το βιβλίο, $v_{cm} = \omega \cdot R$ και $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ ισχύουν μόνο αν ο τροχός κυλίζει χωρίς ολίσθηση. Σε κάθε άλλη περίπτωση που θα χρειαστείτε αντίστοιχες εξισώσεις που να συνδέουν γραμμικά και γωνιακά μεγέθη:

- α) Πρέπει να εξετάσετε αν ισχύουν οι εξισώσεις.
- β) Αν ισχύουν αντίστοιχες εξισώσεις, πρέπει να αποδεικνύονται.

Παράδειγμα 3ο:

Ένας τροχός ακτίνας $R=0,5\text{m}$, κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή επιτάχυνση 2m/s^2 ξεκινώντας από την ηρεμία. Μετά από χρονικό διάστημα $t=5\text{s}$, να βρείτε:

- Την ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού O .
- Την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού.
- Τη ταχύτητα και την οριζόντια επιτάχυνση του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος, σημείο A , καθώς και του αντιδιαμετρικού του σημείου B .

Λύση

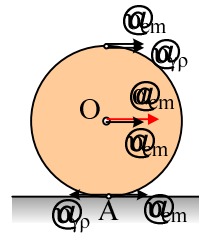
- i) Όταν αναφέρεται η επιτάχυνση του τροχού, υπονοείται η μεταφορική επιτάχυνσή του, η οποία είναι η επιτάχυνση του κέντρου O του τροχού a_{cm} .

Για την μεταφορική κίνηση ο τροχός αντιμετωπίζεται σαν υλικό σημείο, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v_{cm} = v_0 + a_{cm} \cdot t \quad (1) \quad \text{και} \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t^2. \quad (2)$$

Οπότε από την εξίσωση (1) παίρνουμε $v = v_0 + a_{cm} \cdot t = 0 + 2 \cdot 5\text{m/s} = 10\text{m/s}$.

Όλα τα σημεία του τροχού έχουν κάθε στιγμή ταχύτητα εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, ίση με την v_{cm} .



- ii) Επειδή ο τροχός κυλίνεται χωρίς ολίσθηση ισχύει $a_{cm} = a_{γων} \cdot R \rightarrow a_{γων} = \frac{a_{cm}}{R} = 4\text{rad/s}^2$.

Άρα ο τροχός εκτελεί και στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και $\omega = a_{γων} \cdot t = 20\text{rad/s}$. Την ίδια τιμή θα βρούμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$v_{cm} = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{10}{0,5} \text{rad/s} = 20\text{rad/s}.$$

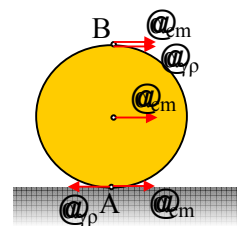
- iii) Το σημείο A έχει μια ταχύτητα προς τα δεξιά, την v_{cm} αλλά και μια ταχύτητα προς τ' αριστερά εξαιτίας της στροφικής κίνησης $v_{γρ} = \omega \cdot R = 20 \cdot 0,5\text{m/s} = 10\text{m/s}$. Άρα η συνολική ταχύτητα του σημείου A είναι ίση με μηδέν.

Αυτό είναι και το βασικό κριτήριο για να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει ο τροχός.

Με την ίδια λογική το σημείο B θα έχει ταχύτητα $v_B = v_{cm} + v_{γρ} = 20\text{m/s}$.

Για τις επιταχύνσεις των δύο σημείων:

Το σημείο A έχει εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης επιτάχυνση a_{cm} και εξαιτίας της στροφικής κίνησης μια επιτρόχια επιτάχυνση με φορά προς τ' αριστερά, η οποία είναι ίση με $a_{επ} = a_{γρ} = a_{γων} \cdot R = 4 \cdot 0,5\text{m/s}^2 = 2\text{m/s}^2$.



Άρα η συνολική επιτάχυνση του σημείου Α είναι:

$$a_A = a_{cm} - a_{\gamma\rho} = 0.$$

Ενώ για το σημείο Β: $a_B = a_{cm} + a_{\gamma\rho} = 2m/s^2 + 2m/s^2 = 4m/s^2$.

Σχόλιο: Αφού το σημείο επαφής με το έδαφος έχει ταχύτητα μηδενική, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ένα σημείο ενός ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΥ ΑΞΟΝΑ περιστροφής του τροχού. Έτσι η κίνηση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί μόνο στροφική (γύρω από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής) και όχι σύνθετη.

Εφαρμογή 3'

Ο τροχός ενός αυτοκινήτου έχει ακτίνα $R=0,8m$. Τα αυτοκίνητο για $t=0$ ξεκινά από την ηρεμία με επιτάχυνση $2m/s^2$ ενώ ο τροχός αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}=2rad/s^2$. Για τη χρονική στιγμή $t=5s$, να υπολογιστούν:

- i) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου και η μετατόπιση του κέντρου Ο του τροχού του.
- ii) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού.
- iii) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου επαφής Α του τροχού με το έδαφος.
- iv) Ο τροχός του αυτοκινήτου:
 - α) Κυλίνεται χωρίς ολίσθηση
 - β) Ολισθαίνει
 - γ) Σπινάρει.

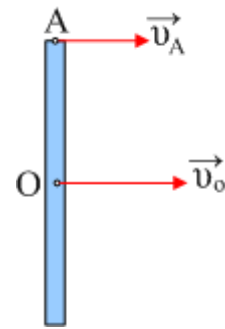
Επιλέξτε την σωστή απάντηση δικαιολογώντας την άποψή σας.

Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία για $t=0$ και επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό. Ο τροχός του αυτοκινήτου με ακτίνα $R=0,5m$ κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει και τη χρονική στιγμή $t_1=31,4s$ στρέφεται εκτελώντας 600στροφές ανά λεπτό. Να βρεθούν:

- i) Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- ii) Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου.
- iii) Η απόσταση που διανύει το αυτοκίνητο σε 20s, καθώς και ο αριθμός των περιστροφών του τροχού στο ίδιο χρονικό διάστημα.
- iv) Η επιτάχυνση του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος τις χρονικές στιγμές:
 - α) $t_1=0$ και β) $t_2= 10s$

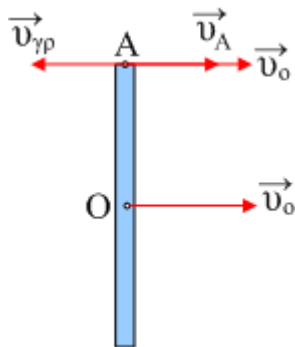
Παράδειγμα 4ο:

Μια ομογενής δοκός μήκους $l=2\text{m}$ κινείται ελεύθερα οριζόντια πάνω σε μια παγωμένη λίμνη, χωρίς τριβές και για $t=0$ δίνονται οι ταχύτητες του μέσου O και του άκρου A , $v_0=10\text{m/s}$ και $v_A=4\text{m/s}$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι ταχύτητες των παραπάνω σημείων τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/6\text{s}$.



Λύση:

Αφού οι ταχύτητες των δύο σημείων είναι διαφορετικές, η δοκός δεν κάνει μεταφορική κίνηση. Αν έκανε μόνο στροφική κίνηση θα στρέφονταν γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας O και η ταχύτητα του cm θα ήταν μηδενική. Συνεπώς η δοκός εκτελεί σύνθετη κίνηση με $v_{cm}=v_0=10\text{m/s}$ και γωνιακή ταχύτητα ω .



Έτσι το άκρο A έχει και ταχύτητα ίδια με το O , v_0 και γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\rho}=\omega \cdot R$, όπου:

$$v_A = v_0 + v_{\gamma\rho}$$

και αφού η ταχύτητα του A είναι μικρότερη από την ταχύτητα v_0 , σημαίνει ότι οι δύο ταχύτητες έχουν αντίθετη φορά όπως στο παρακάτω σχήμα.

Συνεπώς:

$$v_A = v_0 - \omega R \rightarrow \omega = (v_0 - v_A)/R = (10 - 4)/1 \text{ rad/s} = 6 \text{ rad/s},$$

αφού $R=l/2$ μιας και η δοκός στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το O .

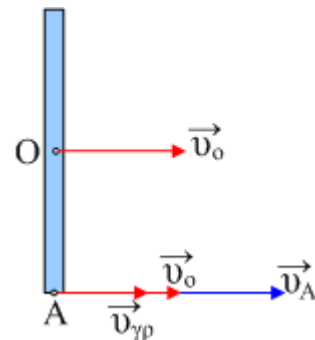
Μετά από χρόνο $t_1=\pi/6\text{s}$ η δοκός έχει περιστραφεί κατά:

$$\theta = \omega t = \pi \text{ rad}$$

και η εικόνα είναι αυτή του διπλανού σχήματος.

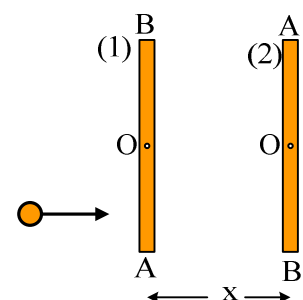
Συνεπώς η ταχύτητα του κέντρου O συνεχίζει να είναι $v_0=10\text{m/s}$, ενώ του A είναι:

$$v_A = v_0 + \omega R = 10 + 6 \cdot 1 = 16\text{m/s}.$$

**Εφαρμογή 4''**

Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα μήκους $l=4\text{m}$ (θέση 1). Μια σφαίρα που κινείται οριζόντια κτυπά τη ράβδο, με αποτέλεσμα αμέσως μετά την κρούση τα άκρα A και B της ράβδου να έχουν ταχύτητες με κατεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρα $v_A=6\text{m/s}$ και $v_B=2\text{m/s}$ αντίστοιχα.

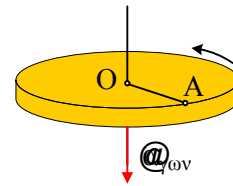
ι) Ποια η ταχύτητα του μέσου O της σανίδας;



- ii) Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σανίδας.
- iii) Ποια η προς τα δεξιά μετατόπιση x του άκρου A , τη στιγμή που η σανίδα βρίσκεται στη θέση (2) για πρώτη φορά;
Δίνεται ότι η κίνηση είναι ομαλή μετά την κρούση.

Ασκήσεις – Προβλήματα

- 1) Ο δίσκος του σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z , όπως στο σχήμα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ενώ για $t=0$ έχει γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λαθεμένες.



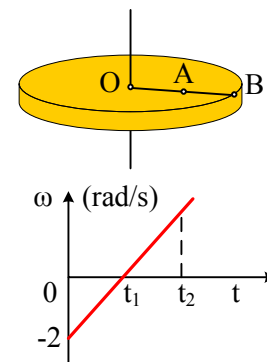
- i) Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.
- ii) Η αρχική ταχύτητα του δίσκου είναι οριζόντια.
- iii) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αυξάνεται.
- iv) Το σημείο A έχει επιτάχυνση που κατευθύνεται προς το κέντρο O.
- v) Η εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου A δίνεται από τη σχέση $a_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$.

- vi) Ο δίσκος θα σταματήσει μετά από χρόνο $t = \frac{\omega_0}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$.

- vii) Τη στιγμή που θα σταματήσει στιγμιαία ο δίσκος θα έχει συνολικά

$$\text{περιστράφει κατά γωνία } \theta = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot |\alpha_{\gamma\omega\nu}|}.$$

- 2) Ο δίσκος του διπλανού σχήματος στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, ενώ το σημείο A βρίσκεται στο μέσο της ακτίνας OB.



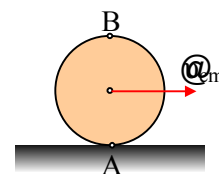
- i) Σημειώστε στο σχήμα τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης για μια στιγμή $t < t_1$.
- ii) Για την παραπάνω στιγμή σχεδιάστε τις ταχύτητες των σημείων A και B. Ποια είναι μεγαλύτερη και γιατί;
- iii) Ο δίσκος έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ή όχι και γιατί;

Αν $t_2 = 2t_1$:

- a) Ποιο το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας για $t = t_2$;
- b) Πόση γωνία έχει διαγράψει ο δίσκος από $0 - t_2$;

- 3) Ο τροχός του σχήματος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας v_{cm} .

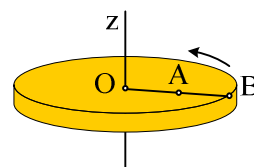
Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.



- i) Ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση. Μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του.

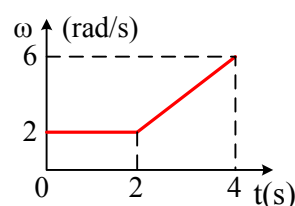
- ii) Η ταχύτητα του σημείου B είναι ίση με $2v_{cm}$.
- iii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα με τη σχέση $v_{cm} = \omega \cdot R$.
- iv) Η επιτάχυνση του σημείου B είναι ίση με $a = \omega^2 \cdot R$.
- v) Ο τροχός εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο A, οπότε για τα σημεία O και B ισχύουν:
 $v_O = \omega \cdot R$ και $v_B = \omega \cdot (AB)$.

- 4) Ο δίσκος του σχήματος ακτίνας $R=2m$ είναι οριζόντιος και στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=0,2rad/s$. Το σημείο A βρίσκεται στο μέσον της ακτίνας OB.



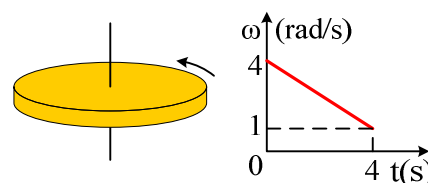
- i) Να σχεδιάσετε στο σχήμα τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου και της γραμμικής ταχύτητας του σημείου B.
- ii) Να υπολογιστούν τα μέτρα των ταχυτήτων των σημείων A και B.
- iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου A.
- iv) Πόση γωνία έχει διαγράψει το σημείο A σε χρονικό διάστημα 10s;

- 5) Η γωνιακή ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο ενός τροχού που περιστρέφεται δίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Να υπολογιστούν:



- i) Η γωνιακή επιτάχυνση, σε κάθε χρονικό διάστημα.
 - ii) Η γωνία που έχει διαγράψει ο τροχός (γωνιακή μετατόπιση) μέχρι τη χρονική στιγμή $t=4s$.
- 6) Ένα σημείο ενός τροχού διαγράφει γωνία, η οποία σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $\theta=5+10t+2t^2$ rad. Να βρεθούν η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t=3s$.

- 7) Ο δίσκος του σχήματος στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα και στο διάγραμμα δίνεται ο τρόπος που μεταβάλλεται η γωνιακή του ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο.

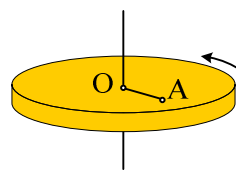


Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λαθεμένες.

- i) Η γωνιακή ταχύτητα βρίσκεται πάνω στον άξονα z και έχει φορά προς τα πάνω.
- ii) Ο δίσκος επιβραδύνεται.
- iii) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου έχει μέτρο $0,75rad/s^2$, τη διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα πάνω.

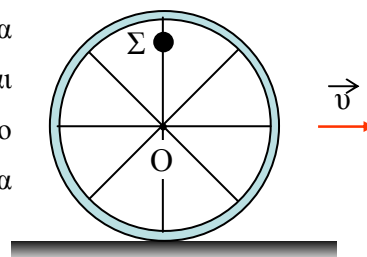
iv) Στο χρονικό διάστημα 0-4s ο δίσκος έχει στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta=10\text{rad}$.

8) Ο δίσκος του σχήματος μπορεί να στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z και ηρεμεί. Ένα σημείο του A απέχει κατά 0,5m από το κέντρο του O. Για $t=0$ ο δίσκος αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0,4\text{rad/s}^2$. Να βρεθούν για την χρονική στιγμή $t=5\text{s}$:



- i) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.
- ii) Η γραμμική ταχύτητα του σημείου A.
- iii) Η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου A.
- iv) Η γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος (γωνιακή μετατόπιση).

9) Ο τροχός ενός κάρου έχει μάζα $M=10\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,8\text{m}$, ενώ ένα σώμα Σ μάζας $m_1=10\text{kg}$, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, είναι προσδεδεμένο σε απόσταση $r=0,6\text{m}$ από τον άξονα O του τροχού. Το κάρο κινείται με ταχύτητα $v=1,6\text{m/s}$ και ο τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.

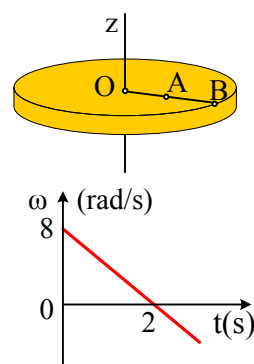


- i) Σε πόσο χρόνο ο τροχός ολοκληρώνει μια περιστροφή;
- ii) Ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη ταχύτητα του σώματος Σ;
- iii) Ποια η v_{cm} τη στιγμή που το σώμα Σ βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνά από τον άξονα O του τροχού, όπως στο σχήμα;

10) Ένας κύλινδρος ακτίνας 0,1m αρχίζει να περιστρέφεται για $t=0$, γύρω από τον σταθερό άξονά του με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση 5rad/s^2 . Για τη χρονική στιγμή $t=3\text{s}$, να βρεθούν:

- i) Η γωνιακή ταχύτητα.
- ii) η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειάς του.
- iii) η ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης ενός σημείου στην περιφέρειά του.
- iv) Πόσες περιστροφές έχει κάνει από 0-3s;

11) Ο δίσκος του σχήματος ακτίνας $R=2\text{m}$ είναι οριζόντιος και στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, που διέρχεται από το κέντρο του. Το σημείο A βρίσκεται στο μέσον της ακτίνας OB. Στο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου, σε συνάρτηση με το χρόνο.

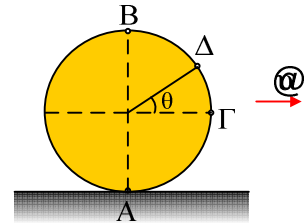


- i) Σχεδιάστε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_1=3\text{s}$.
- ii) Ποιες οι ταχύτητες των σημείων A και B για $t=0$;

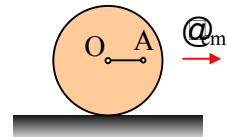
- iii) Κατά ποια γωνία έχει στραφεί η ακτίνα OB μέχρι $t=2s$;
- iv) Ποιος ο ρθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας το σημείο A για $t=1s$;

12) Ένας τροχός ακτίνας R κλίνεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα $10m/s$.

- i) Να βρεθούν οι ταχύτητες των σημείων A, B, Γ και Δ (η γωνία $\theta=30^\circ$).
- ii) Ποια γωνία σχηματίζει η AΔ με την ταχύτητα το σημείο Δ;
- iii) Με ποιο άλλο τρόπο θα μπορούσατε να υπολογίσετε την ταχύτητα το σημείο Δ;

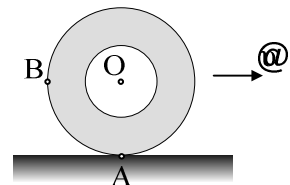


13) Ένα ατοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a=1m/s^2$. Ο τροχός του ατοκινήτου έχει ακτίνα $R=0,5m$, ενώ ένα σημείο A του τροχού απέχει $r=0,4m$ από το κέντρο O. Για τη χρονική στιγμή $t=10s$, ποιο το σημείο A βρίσκεται σε οριζόντια θέση (βλέπε σχήμα), να βρεθούν:



- i) Η ταχύτητα του ατοκινήτου και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.
- ii) Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- iii) Η ταχύτητα του σημείου A.
- iv) Η κατακόρυφη επιτάχυνση του σημείου A.

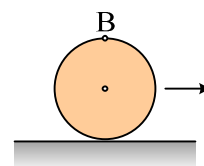
14) Ένα ατοκίνητο κινείται σε χιονισμένο δρόμο και σε μια στιγμή έχει ταχύτητα $15m/s$, ενώ ο τροχός του διαγράφει $\frac{20}{\pi}$ περιστροφές το δευτερόλεπτο. Αν τροχός έχει ακτίνα $R=0,5m$:



- i) Βρείτε την ταχύτητα του σημείου A, επαφής του τροχού με το έδαφος.
- ii) Ο τροχός γλιστράει ή σπινάρει;
- iii) Μια μικρή ποσότητα λάσπης ξεκολλάει την παραπάνω στιγμή από το σημείο B, ποιο βρίσκεται σε οριζόντια θέση. Με ποια αρχική ταχύτητα εκσφενδονίζεται η λάσπη;

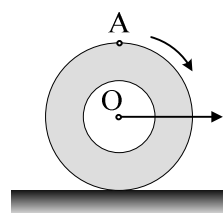
15) Ένα ατοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία για $t=0$ και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a=2m/s^2$. Οι τροχοί του ατοκινήτου έχουν ακτίνα $R=0,4m$ και κλινονται χωρίς να ολισθαίνουν. Ζητούνται:

- i) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης των τροχών.



- ii) Ποια χρονική στιγμή το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας των τροχών είναι ίσο με $\omega=20\text{rad/s}$;
- iii) Πόσες περιστροφές εκτελούν οι τροχοί, μέχρι την παραπάνω χρονική στιγμή;
- iv) Η ταχύτητα με την οποία κινείται το ανώτερο σημείο B του τροχού του αυτοκινήτου, την παραπάνω χρονική στιγμή.
- v) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σημείου B.

16) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση 1m/s^2 , ενώ επειδή ο δρόμος γλιστρά, ο τροχός του αυτοκινήτου, ακτίνας $R=0,5\text{m}$ έχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}=3\text{rad/s}^2$. Σε μια στιγμή, που θεωρούμε $t=0$, το αυτοκίνητο έχει ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$, ενώ ο τροχός στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{rad/s}$.

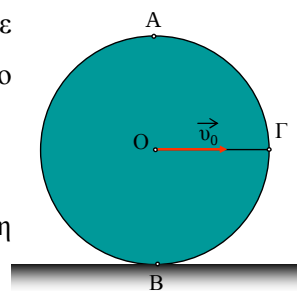


- i) Ποια η ταχύτητα και ποια η οριζόντια επιτάχυνση (για $t=0$) ενός σημείου A στην περιφέρεια του τροχού που βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, όπως στο σχήμα.
- ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του αυτοκινήτου και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$.
- iii) Ποια η ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με τον δρόμο την παραπάνω χρονική στιγμή;

17) Στο σχήμα φαίνεται ο τροχός ενός αυτοκινήτου που κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$ σε οριζόντιο δρόμο. Το ανώτερο σημείο A του τροχού έχει ταχύτητα $v_1=15\text{m/s}$.

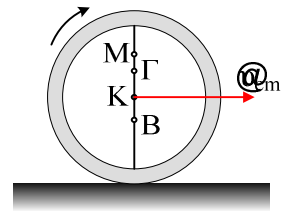
Ποιες προτάσεις είναι σωστές ή και ποιες λάθος:

- i) Η μέγιστη γραμμική ταχύτητα ενός σημείου του τροχού είναι ίση με 5m/s .
- ii) Μεταξύ της ταχύτητας του αυτοκινήτου v_0 και της γωνιακής ταχύτητας του τροχού ισχύει η σχέση $v_0=2\omega R$.
- iii) Η ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος (σημείο B) έχει μηδενική ταχύτητα.
- iv) Ο τροχός του αυτοκινήτου σπινάρει.
- v) Για την ταχύτητα του σημείου Γ, που βρίσκεται στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας ισχύει $v_{\Gamma}^2 = 1,25 v_0^2$.
- vi) Δεν υπάρχει σημείο του τροχού με μηδενική ταχύτητα.
- vii) Το σημείο A έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση από το σημείο B.



18) Ο τροχός του σχήματος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, σε οριζόντιο επίπεδο, να βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του όταν:

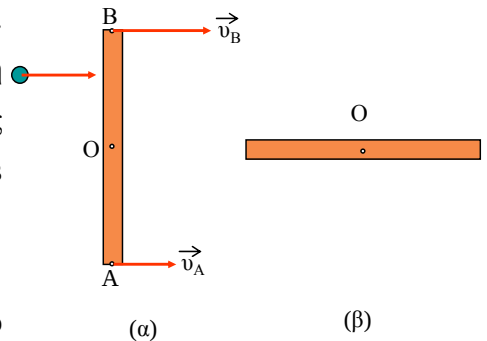
- τα σημεία B και Γ, που ισαπέχουν από το κέντρο K, όταν βρίσκονται στην κατακόρυφο διάμετρο, έχουν αντίστοιχα ταχύτητες με μέτρα $v_B=15\text{m/s}$ και $v_\Gamma=25\text{m/s}$.
- Το σημείο M, που βρίσκεται στο μέσο της ακτίνας, όταν βρίσκεται στην κατακόρυφο διάμετρο έχει ταχύτητα μέτρου $v=30\text{m/s}$.



19) Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη ηρεμεί μια ομογενής σανίδα μήκους 4m.

Σε μια στιγμή $t=0$ ένα κινούμενο υλικό σημείο Σ, συγκρούεται με τη σανίδα με αποτέλεσμα, αμέσως μετά την κρούση τα άκρα A και B της σανίδας να αποκτήσουν ταχύτητες $v_A=20\text{m/s}$ και $v_B=40\text{m/s}$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα (α).

- Ποια η ταχύτητα του μέσου O της σανίδας.
- Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σανίδας, γύρω από το κέντρο μάζας της O.
- Σε πόσο χρόνο για πρώτη φορά η σανίδα θα βρεθεί στη θέση του σχήματος β;
- Για τη θέση (β):
 - Ποιο είναι το άκρο A και ποιο το B;
 - Το άκρο A ή το B έχει μεγαλύτερη ταχύτητα;
 - Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου O και του άκρου A της σανίδας.

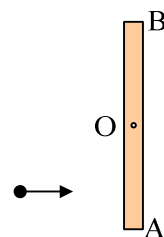
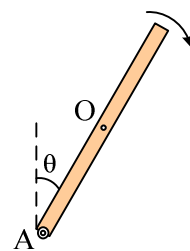


20) Μια ράβδος μήκους $\ell = \frac{20}{\pi}\text{m}$ στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A. Σε μια στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία $\theta=30^\circ$ έχοντας γωνιακή ταχύτητα $\omega=\pi\text{ rad/s}$ ο άξονας σπάει και η ράβδος κινείται ελεύθερα. Μετά από χρόνο $t=2\text{s}$:

από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A. Σε μια στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία $\theta=30^\circ$ έχοντας γωνιακή ταχύτητα $\omega=\pi\text{ rad/s}$ ο άξονας σπάει και η ράβδος κινείται ελεύθερα. Μετά από χρόνο $t=2\text{s}$:

- Πόσο έχει πέσει κατακόρυφα το μέσον O της ράβδου;
- Ποια η οριζόντια μετατόπιση του μέσου της ράβδου O;
- Σχεδιάστε στο σχήμα τη θέση της ράβδου. $g=10\text{m/s}^2$.
- Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής ράβδος AB μήκους

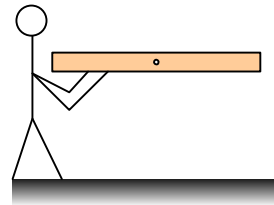
$\ell = \frac{12}{\pi}\text{m}$. Σε μια στιγμή μια κινούμενη σφαίρα κτυπά ελαστικά τη



ράβδο με αποτέλεσμα να αποκτήσει $v_{cm}=4\text{m/s}$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega=\pi/4\text{ rad/s}$. Μετά από χρόνο $t=2\text{s}$ να υπολογίστε:

- v) Τη μετατόπιση του μέσου O της ράβδου.
- vi) Την ταχύτητα του άκρου A της ράβδου,

- 21) Ένας άνθρωπος αρπάζει μια ομογενή ράβδο μήκους 40cm από ένα τυχαίο σημείο της και την πετάει στον αέρα, με τέτοιο τρόπο ώστε το άκρο της ράβδου που είναι πλησιέστερα προς αυτόν να έχει ταχύτητα μηδέν τη στιγμή που η ράβδος φεύγει από τα χέρια του. Αν η ράβδος συμπληρώσει δύο περιστροφές πριν την ξαναπιιάσει ο άνθρωπος στο ίδιο ύψος απ' όπου την άφησε, να αποδείξετε ότι το ύψος που φτάνει το κέντρο μάζας της ράβδου είναι ίσο με $h=0,4\cdot\pi\text{ (m)}$



Ροπές – Ισορροπία

3.5. Ζεύγος δυνάμεων.

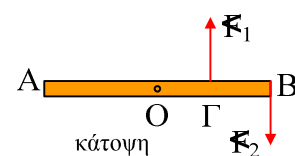
Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε κάθε σύστημα από δύο παράλληλες δυνάμεις με το ίδιο μέτρο και αντίθετης φοράς.

Τα χαρακτηριστικά ενός τέτοιου συστήματος δυνάμεων είναι:

- 1) Έχει ροπή $\tau = F \cdot d$ ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου στο οποίο ανήκουν.
- 2) Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.
Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, να μην μπορεί ένα ζεύγος δυνάμεων να αντικατασταθεί από μια δύναμη και να προκαλεί περιστροφή του σώματος πάνω στο οποίο ασκείται.

Παράδειγμα 5ο:

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται μια ράβδος μήκους $l=4\text{m}$, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το μέσον της O . Ασκούμε πάνω της δύο οριζόντιες δυνάμεις με ίσα μέτρα $F_1=F_2=20\text{N}$, όπως στο σχήμα, όπου $(OG)=(GB)$.



- i) Βρείτε την συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής.
- ii) Υπολογίστε την οριζόντια δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα.
- iii) Πόση η συνολική ροπή των δυνάμεων F_1-F_2 ως προς το άκρο A ;
- iv) Για να μην περιστραφεί η ράβδος ασκούμε πάνω της οριζόντια δύναμη F_3 στο άκρο A , παράλληλη προς τις F_1, F_2 .
 - a) Να σχεδιάστε την δύναμη F_3 .
 - b) Πόση οριζόντια δύναμη δέχεται τώρα η ράβδος από τον άξονα;

Λύση

i) Αν F η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής, έχουμε

$$\tau_{ολ} = \tau_F + \tau_1 + \tau_2 = F \cdot 0 + F_1 \cdot (OG) - F_2 \cdot (OB) = 20N \cdot 1m - 20N \cdot 2m = -20N \cdot m.$$

Στην πραγματικότητα ροπή έχει το ζεύγος των δυνάμεων F_1 και F_2 , οπότε θα μπορούσαμε να πάρουμε:

$$\tau = -|F_1| \cdot d = -20N \cdot 1m = -20N \cdot m.$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι με την επίδραση των δύο δυνάμεων η ράβδος τείνει να περιστραφεί με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

ii) Επειδή η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, προφανώς δεν έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει μεταφορική κίνηση.

$$\text{Άρα } \Sigma F = 0 \rightarrow F + F_1 - F_2 = 0 \rightarrow F = 0.$$

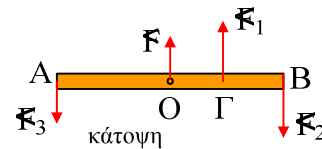
Δηλαδή η ράβδος δεν δέχεται δύναμη από τον άξονα περιστροφής,

iii) Ως προς το σημείο A έχουμε:

$$\tau_{ολ} = F_1 \cdot (AG) - F_2 \cdot (AB) = 20N \cdot 3m - 20N \cdot 4m = -20Nm.$$

Βλέπουμε ότι η ροπή του ζεύγους είναι ίδια είτε υπολογίζεται ως προς το O, είτε ως προς το A.

iv) Για να μην περιστρέφεται η ράβδος, θα πρέπει να ασκηθεί μια δύναμη στο άκρο A, η οποία να προκαλεί ροπή $+20Nm$ και να εξουδετερώνει τη ροπή του ζεύγους.



Άρα η φορά της είναι αυτή του διπλανού σχήματος και αφού η ράβδος δεν στρέφεται:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_O = 0 &\rightarrow -F_3 \cdot (AO) - F_1 \cdot (OA) + F_2 \cdot (OB) = 0 \rightarrow \\ &-F_3 \cdot 2 - 20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 \rightarrow F_3 = 10N. \end{aligned}$$

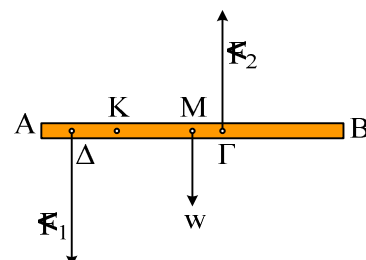
Αφού η ράβδος δεν μεταφέρεται $\Sigma F = 0 \rightarrow F + F_1 - F_3 - F_2 = 0 \rightarrow F = 10N$ δηλαδή τώρα η ράβδος δέχεται δύναμη από τον άξονα.

Προσέξτε ότι η δύναμη F σχηματίζει ζεύγος δυνάμεων με την F_3 .

Δηλαδή για εξουδετερωθεί η δράση του ζεύγους των δυνάμεων $F_1 - F_2$ απαιτήθηκε η εξάσκηση ενός νέου ζεύγους δυνάμεων και όχι μια μόνο δύναμη.

Εφαρμογή 5'' :

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους $\ell = 8m$ και βάρους $w = 100N$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο K όπου



$AK = 2m$. Στη ράβδο ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις με μέτρα $F_1 = F_2 = 80N$, όπως στο σχήμα. Η ράβδος δεν στρέφεται.

Να βρεθούν:

- i) Η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $F_1 - F_2$.
- ii) Η απόσταση ($\Gamma\Delta$).
- iii) Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής.

3.6. Ισορροπία στερεού.

Η συνθήκη ισορροπίας ενός στερεού είναι:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0 \quad (2)$$

- 1) Η συνθήκη (1) εξασφαλίζει ότι ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα δεν θα αποκτήσει επιτάχυνση, οπότε όσον αφορά τη μεταφορική κίνηση, θα συνεχίζει να ηρεμεί.
- 2) Η εξίσωση (2) μας εξασφαλίζει ότι αν ένα στερεό που αρχικά δεν στρέφεται, δεν θα αρχίσει να περιστρέφεται λόγω άσκησης ροπής.
- 3) Από τη στιγμή όμως που ισχύει η εξίσωση (1) αν ασκούνται ροπές αυτές θα οφείλονται σε ζεύγος ή ζεύγη δυνάμεων. Αλλά η ροπή ζεύγους είναι πάντα ίση με το γινόμενο του μέτρου της μιας δύναμης επί την μεταξύ τους απόσταση $\tau = FKd$ και δεν έχει σημασία το σημείο ή ο άξονας περιστροφής. Άρα η εξίσωση (2) ισχύει ως προς οποιοδήποτε σημείο.
- 4) Αν σε ένα στερεό σώμα ασκούνται n δυνάμεις και οι $(n-1)$ από αυτές διέρχονται από ένα σημείο Σ , τότε και η τελευταία από αυτές θα διέρχεται από το ίδιο σημείο Σ , μιας και θα πρέπει να ισχύει η σχέση (2) ως προς το σημείο Σ .

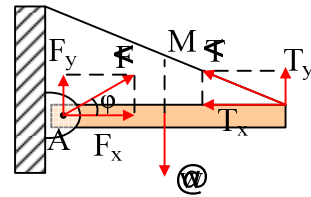
Παράδειγμα 6ο:

Μια ομογενής ράβδος μήκους $4m$ και βάρους $100N$ ισορροπεί οριζόντια, όταν στο άκρο της A αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άλλο της άκρο είναι δεμένο με νήμα που σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με τη ράβδο.

- i) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.
- ii) Βρείτε την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης F που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση.
- iii) Ποια είναι η κατεύθυνση της δύναμης F ;

Λύση

- i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος του w , η τάση του νήματος T και μια δύναμη F από την άρθρωση, η οποία έστω ότι έχει κατεύθυνση όπως στο σχήμα,



Αναλύουμε τις δυνάμεις T και F σε δύο συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0 \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3) ως προς το άκρο A παίρνουμε:

$$T_y \cdot (AB) - w \cdot (AO) = 0 \rightarrow T_y \cdot 4 = 100 \cdot 2 \rightarrow T_y = 50 \text{ N}$$

$$\text{Όμως } T_y = T \sin 30^\circ \rightarrow T = 100 \text{ N.}$$

- ii) Ερχόμενοι τώρα στην εξίσωση (2) θα έχουμε $F_y + T_y = w \rightarrow F_y = 50 \text{ N}$.

Ενώ από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$F_x - T_x = 0 \rightarrow F_x = T \cos 30^\circ = 50\sqrt{3} \text{ N.}$$

- iii) Για να βρούμε την κατεύθυνση της δύναμης F υπολογίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ϕ , που σχηματίζει με την ράβδο και έχουμε:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

άρα η γωνία $\phi = 30^\circ$, ίση δηλαδή και με τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με τη ράβδο.

Αυτό θα έπρεπε να το περιμένουμε, διότι αν ο φορέας του βάρους τέμνει το νήμα στο σημείο M, τότε επειδή η ράβδος ισορροπεί θα ισχύει $\Sigma \tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο, άρα και ως προς το σημείο M.

Συνεπώς:

$$T \cdot 0 + w \cdot 0 + F \cdot x = 0 \rightarrow x = 0$$

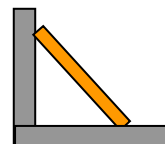
όπου x η απόσταση του φορέα της δύναμης F από το σημείο M.

Βλέπουμε λοιπόν ότι και οι τρεις δυνάμεις διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Εφαρμογή 6'':

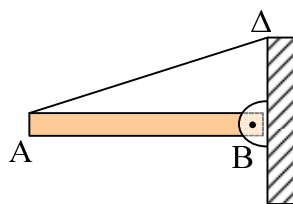
Μια ομογενής σκάλα στηρίζεται σε λείο κατακόρυφο τοίχο, όπως στο σχήμα.

Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα, χωρίς να κάνετε υπολογισμούς.



Εφαρμογή 6'':

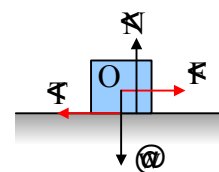
Μια ομογενής δοκός μήκους 2m και βάρους 100N ισορροπεί οριζόντια δεμένη στο ένα της άκρο με νήμα, ενώ στο άλλο της άκρο υπάρχει άρθρωση. Να βρείτε:



- i) Τη ροπή της τάσης του νήματος ως προς την άρθρωση στο B.
- ii) Τη ροπή της δύναμης που ασκεί η άρθρωση:
 - α) Ως προς το άκρο A.
 - β) Ως προς το σημείο πρόσδεσης του νήματος στον τοίχο, σημείο Δ.

3.7. Στατική τριβή και τριβή ολίσθησης.

Έστω ότι πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα μάζας m. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω του μια οριζόντια δύναμη F και το σώμα δεν μετακινείται. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του, η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N , η ασκούμενη δύναμη F και αφού το σώμα ηρεμεί, πρέπει να ασκείται πάνω του και μια δύναμη τριβής T , όπως στο σχήμα. Αφού το σώμα ισορροπεί $\Sigma F_x = 0 \rightarrow T = F$.



Η τριβή αυτή ονομάζεται **στατική** και έχει μέτρο όσο είναι το μέτρο της δύναμης F που τείνει να κινήσει το σώμα. Αν αυξάνουμε σιγά – σιγά το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F , κάποια στιγμή το σώμα τείνει να κινηθεί. Τότε η στατική τριβή παίρνει τη μέγιστη τιμή της που ονομάζεται **οριακή** στατική τριβή για την οποία ισχύει:

$$T_{op} = \mu_s \cdot N$$

Όπου μ_s ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής.

Αν το σώμα ολισθαίνει (γλιστράει), τότε η τριβή ονομάζεται **τριβή ολίσθησης** για την οποία ισχύει:

$$T = \mu \cdot N$$

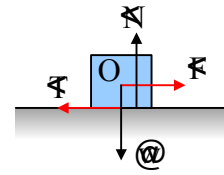
Όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο λίγο μικρότερο από την οριακή τριβή δηλαδή συνήθως $\mu < \mu_s$.

Αν όμως δεν δίνονται διαφορετικές τιμές για τους δύο συντελεστές θα παίρνουμε σιωπηλά ότι $\mu_s = \mu$.

Παράδειγμα 7ο:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύβος ακμής $a=1\text{m}$ και μάζας $m=50\text{kg}$ ο οποίος ηρεμεί σε ένα οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,2$. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη μέτρου $F=60\text{N}$, ο φορέας της οποίας διέρχεται από το κέντρο του κύβου.



- i) Να υπολογίσετε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- ii) Πόσο απέχει ο φορέας της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου από το κέντρο O του κύβου; $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

- i) Επειδή το σώμα ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα $\Sigma F_y=0 \rightarrow N=W=mg=500\text{N}$. Επειδή $\mu=\mu_s$ υπολογίζουμε τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που είναι ίση και με την τριβή ολίσθησης $T_{ολ}=\mu N=0,2 \cdot 500\text{N}=100\text{N}$. Η ασκούμενη όμως δύναμη F έχει μέτρο μόνο 60N , άρα προφανώς δεν είναι ικανή να μετακινήσει τον κύβο. Άρα ο κύβος ισορροπεί και στον άξονα x , οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow T_{στ}=F=60\text{N}.$$

- ii) Αφού ο κύβος ηρεμεί θα πρέπει (εκτός της ισορροπίας των δυνάμεων) και η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο μάζας του κυλίνδρου O, να είναι ίση με μηδέν.

$$\tau_w + \tau_F + \tau_N + \tau_T = 0 \rightarrow w \cdot 0 + F \cdot 0 + N \cdot x - T \cdot a/2 = 0, \quad (1) \text{ όπου } x \text{ η απόσταση του φορέα της}$$

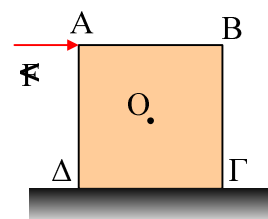
$$\text{κάθετης αντίδρασης από το κέντρο O του κύβου. Άρα } x = \frac{Ta}{2N} = 0,06\text{m} = 6 \text{ cm}.$$

Παρατηρήσεις:

- 1) Προσέξτε ότι ο φορέας της N δεν διέρχεται από το κέντρο O του κύβου. Όταν μεγαλώνει η ασκούμενη δύναμη F , θα μεγαλώνει και η στατική τριβή και από τη σχέση (1) συμπεραίνεται ότι ο φορέας της κάθετης αντίδρασης απομακρύνεται από το κέντρο O.
- 2) Βέβαια η μέγιστη απόσταση που μπορεί να μετακινηθεί ο φορέας της αντίδρασης είναι ίση με $a/2$ δηλαδή να ασκείται στην κάτω δεξιά κορυφή του κύβου. Από κει και πέρα ο κύβος ανατρέπεται.

Εφαρμογή 7':

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας κύβος ακμής $a=1\text{m}$ και μάζας $m=30\text{kg}$, ο οποίος εμφανίζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής

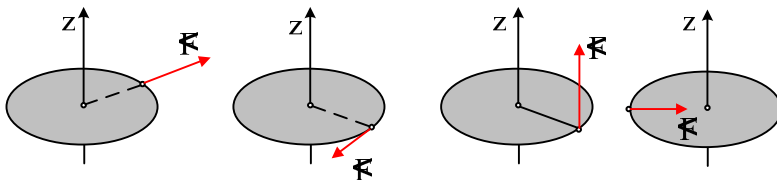


$\mu = \mu_s = 0,6$. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης μέτρου $F = 60\text{N}$ στην κορυφή A, όπως στο σχήμα.

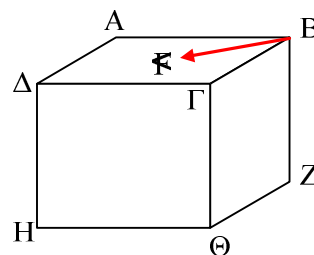
- i) Υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κύβο, καθώς και τη ροπή καθεμιάς ως προς το κέντρο O του κύβου,
 - ii) Αν αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης F ποια η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει, χωρίς να ανατραπεί ο κύβος; $g = 10\text{m/s}^2$.
-

Ασκήσεις – Προβλήματα

- 1) Σε ποιες από τις επόμενες περιπτώσεις η ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα z είναι μηδέν.

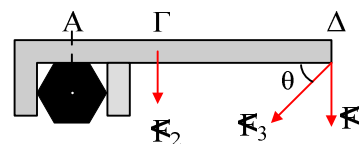


- 2) Δίνεται ο κύβος του σχήματος πλευράς $a=2\text{m}$. Μια οριζόντια δύναμη $F=10\text{N}$ ασκείται στην κορυφή B και κατευθύνεται προς την κορυφή Δ . Να βρείτε την ροπή της δύναμης και να σχεδιάστε το διάνυσμά της, ως προς τις κορυφές του κύβου:



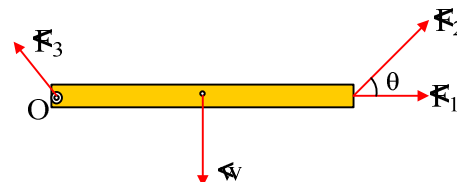
α) Δ , β) Γ , γ) H , δ) Θ .

- 3) Για να μπορέσουμε να ξεβιδώσουμε μια βίδα, χρησιμοποιούμε ένα κλειδί, ασκώντας στο άκρο του Δ , μια δύναμη $F_1=20\text{N}$, όπως στο σχήμα. Βρείτε το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε στο κλειδί, για να επιφέρουμε το ίδιο αποτέλεσμα, αν:



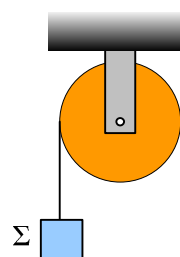
- i) Η δύναμη είναι η F_2 και ασκείται στο σημείο Γ , όπου $(\Gamma\Delta)=3(A\Gamma)$.
ii) Η δύναμη είναι η F_3 και ασκείται στο άκρο Δ όπου η γωνία $\theta=30^\circ$.

- 4) Μια δοκός μήκους $\ell=4\text{m}$ και βάρους $w=50\text{N}$ δέχεται τις δυνάμεις του σχήματος, ενώ μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Αν $F_1=50\text{N}$, $F_2=80\text{N}$ και $F_3=40\text{N}$, ενώ $\theta=30^\circ$:



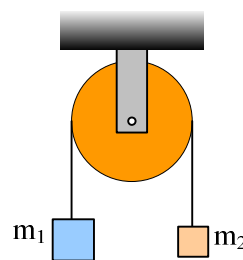
- i) Να βρείτε την συνολική ροπή που ασκείται στην δοκό, ως προς τον άξονα περιστροφής της O .
ii) Προς ποια κατεύθυνση τείνει να περιστραφεί η δοκός;

- 5) Τυλίγουμε γύρω από μια τροχαλία ακτίνας $R=0,2\text{m}$ ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου συνδέεται ένα σώμα Σ μάζας $m=2\text{kg}$ και αφήνεται να κινηθεί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα Σ είναι $a=4\text{m/s}^2$, ζητούνται:

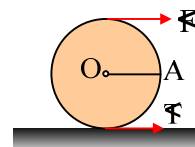


- i) Η τάση του νήματος.
ii) Η συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της. $g=10\text{m/s}^2$.

- 6) Γύρω από μια τροχαλία ακτίνας $R=0,4\text{m}$ περνά ένα αβαρές νήμα, στα δύο άκρα του οποίου δένουμε δύο σώματα με μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ και το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Αν η επιτάχυνση με την οποία κατέρχεται η μάζα m_1 είναι $a=2\text{m/s}^2$ και $g=10\text{m/s}^2$, να βρεθεί η συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της.



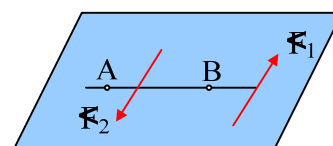
- 7) Ένας κύλινδρος ακτίνας $R=0,5\text{m}$ έχει βάρος $w=100\text{N}$, ενώ δέχεται τις δυνάμεις $F=80\text{N}$ και $T=30\text{N}$, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την συνολική ροπή που ασκείται στον κύλινδρο ως:



- Το κέντρο O του κυλίνδρου.
- Προς το σημείο A, όπου η ακτίνα OA είναι οριζόντια.

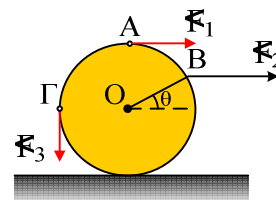
- 8) Δίνονται δύο οριζόντιες δυνάμεις $F_1=F_2=10\text{N}$ όπως στο σχήμα.

Να βρείτε



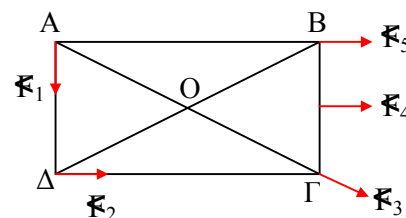
- τη ροπή κάθε δύναμης ως προς τα σημεία A και B του επιπέδου, αν δίνεται ότι η AB είναι κάθετη προς τις δυνάμεις, $AB=1\text{m}$ και η απόσταση του σημείου B από την F_1 είναι $0,2\text{m}$ και από την F_2 $0,8\text{m}$.
- Να σχεδιάσετε τα διανύσματα των παραπάνω ροπών.
- Να βρείτε την συνολική ροπή για τα σημεία A και B.

- 9) Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα $R=0,5\text{m}$ και δέχεται τις ομοεπίπεδες δυνάμεις $F_1=F_2=F_3=10\text{N}$, όπως στο σχήμα, όπου $\theta=30^\circ$.



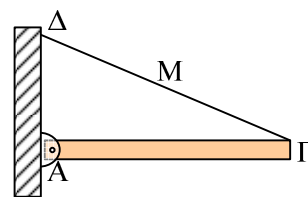
- Να υπολογίσετε τη ροπή κάθε δύναμης ως προς το κέντρο O του τροχού. Ποια η διεύθυνση και η φορά κάθε ροπής;
- Βρείτε τη συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο Γ;

- 10) Σε δύο σημεία A και Γ μιας ράβδου που απέχουν 10cm , ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις $F_1=100\text{N}$ και $F_2=150\text{N}$, που έχουν αντίθετη φορά. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ράβδος για να ισορροπεί οριζόντια; Πόση δύναμη δέχεται η ράβδος από το σημείο στήριξης; Πόση είναι η συνισταμένη των δύο παραπάνω δυνάμεων;



- 11) Δίνεται το ορθογώνιο ABΓΔ με πλευρές 5m και 8m . Αν κάθε δύναμη έχει μέτρο 10N να υπολογίσετε την ροπή της ως προς το κέντρο O του ορθογωνίου.

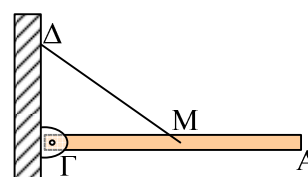
- 12) Η ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μήκος 2m και βάρος 20N και ισορροπεί οριζόντια, όπου στο Α υπάρχει άρθρωση και το άκρο Γ δένεται με νήμα με το σημείο Δ.



Ποιες προτάσεις είναι λάθος.

- Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο Δ είναι -20Nm.
- Η ροπή της τάσης του νήματος ως προς το Δ είναι μηδέν.
- Η ράβδος ΑΓ δέχεται μια δύναμη στο σημείο Α από τον τοίχο F, η ροπή της οποίας ως προς το σημείο Δ, έχει μέτρο 20Nm.
- Η δύναμη F περνά από το μέσο Μ του νήματος ΓΔ.
- Η ροπή της δύναμης F ως προς το Γ είναι +40Nm.

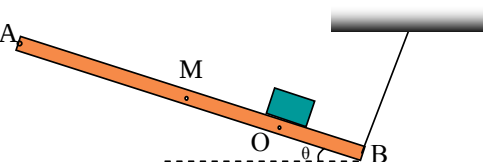
- 13) Η ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μήκος 4m και βάρος 30N και ισορροπεί οριζόντια, όπου στο Γ υπάρχει άρθρωση και το μέσο Μ δένεται με νήμα με το σημείο Δ.



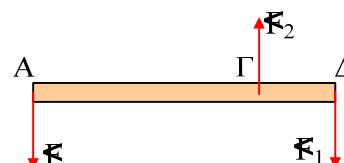
Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος

- Η ράβδος δέχεται 3 δυνάμεις: Το βάρος του στο Μ, την τάση του νήματος Τ και μια δύναμη F από τον τοίχο στο σημείο Γ.
- Η ροπή του βάρους ως προς το Γ είναι +60Nm.
- Η δύναμη F είναι οριζόντια με φορά από το Γ προς το Α.
- Η ροπή της τάσης ως προς το Γ είναι -60Nm.
- Η ροπή της τάσης ως προς το σημείο Α είναι -60Nm.
- Η ροπή της δύναμης F ως προς το Δ είναι -120Nm.

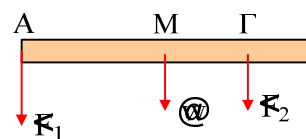
- 14) Η ράβδος ΑΒ μήκους 4m και βάρους 100N μπορεί να στρέφεται γύρω Α από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και ισορροπεί όπως στο σχήμα, δεμένη με νήμα στο άκρο της Β, το οποίο είναι κάθετο σε αυτήν. Κατά μήκος της ράβδου κινείται ένα σώμα Σ μάζας $m_1=5\text{kg}$ με επιτάχυνση $a=2\text{m/s}^2$. Αν η κλίση της σανίδας είναι θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\theta=0,8$, να βρεθούν η τάση του νήματος και οι συνιστώσες της δύναμης που δέχεται η σανίδα από τον άξονα F_x και F_y , όπου η μια έχει την διεύθυνση της σανίδας και η άλλη κάθετη σε αυτήν τη στιγμή που το σώμα περνά από την θέση Ο, απέχοντας 1m από το άκρο Ο. $g=10\text{m/s}^2$.



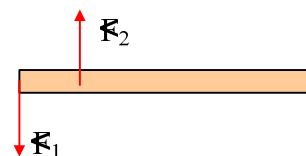
- 15) Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ράβδος του σχήματος για να ισορροπεί οριζόντια, αν $F_1=F_2=10\text{N}$, $F=20\text{N}$ και $\Gamma\Delta=10\text{cm}$.



- 16) Στη ράβδο του σχήματος ασκούνται οι κατακόρυφες δυνάμεις $F_1=200\text{N}$, $F_2=50\text{N}$ ενώ το βάρος της είναι $w=100\text{N}$. Αν $AM=20\text{cm}$ και $MG=10\text{cm}$, να βρεθεί σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ράβδος, ώστε να ισορροπεί οριζόντια.



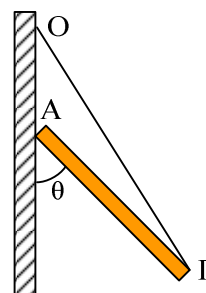
- 17) Τα σημεία εφαρμογής των δύο δυνάμεων του σχήματος απέχουν 10cm . Αν η δύναμη $F_2=100\text{N}$, πόση είναι η δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί στη ράβδο για να ισορροπεί οριζόντια και σε ποιο σημείο πρέπει να ασκηθεί, αν η δύναμη F_1 πάρει τις τιμές:



α) 60N , β) 80N , γ) 90N , δ) 99N και ε) 100N .

- 18) Δυο άνθρωποι Α και Γ μετακινούν δοκό βάρους 120kp και μήκους 4m οριζόντια. Ο Γ κουβαλά την δοκό από το ένα της άκρο και σηκώνει βάρος 40kp . Σε ποιο σημείο κρατά την δοκό ο Α;

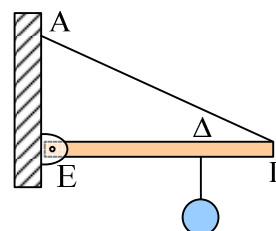
- 19) Ομογενής ράβδος μήκους $\ell=2\text{m}$ και μάζας $m=10\text{kg}$ εφάπτεται με το ένα της άκρο Α σε λείο κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άλλο της άκρο Γ συνδέεται με νήμα με το σημείο Ο του τοίχου, σχηματίζοντας με τον τοίχο γωνία 30° . Να βρεθούν:



- Η γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με τον τοίχο;
- Η τάση του νήματος.
- Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον τοίχο στο σημείο Α.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

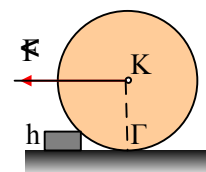
- 20) Στο σχήμα η ράβδος ΕΓ έχει μήκος 80cm και βάρος 60N . Η ράβδος είναι αρθρωμένη στο Ε και ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια του νήματος ΑΓ. Αν στο Δ, όπου $E\Delta=50\text{cm}$, κρεμάσουμε σώμα Σ βάρους 80N , να υπολογιστούν:



- Η τάση του νήματος ΑΓ και
- Η κατακόρυφη και η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στην ράβδο.

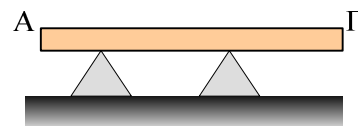
Δίνεται η γωνία $E\Gamma A=30^\circ$.

- 21) Ένας κύλινδρος βάρους 800N και ακτίνας $0,6\text{m}$ ισορροπεί όπως στο σχήμα με την επίδραση της δύναμης F , στηριζόμενος στο οριζόντιο επίπεδο και στο σκαλοπάτι με ύψος $h=0,12\text{m}$, όπου οι επιφάνειες είναι λείες.



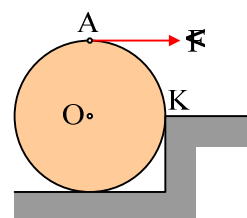
- i) Αν $F=300\text{N}$, αποδείξτε ότι η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το σκαλοπάτι, περνά από το κέντρο K και υπολογίστε την αντίδραση του επιπέδου στο Γ .
- ii) Ποια η ελάχιστη τιμή της F , ώστε ο κύλινδρος να υπερπηδήσει το σκαλοπάτι.

22) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος 10 m και βάρος 800N και στηρίζεται σε 2 υποστηρίγματα που απέχουν από το άκρο A αποστάσεις 2m και 6m . Στην άκρη Γ της ράβδου ασκείται κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα κάτω.



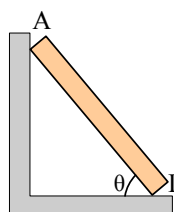
- i) Για ποιες τιμές του μέτρου της F η ράβδος δεν ανατρέπεται;
- ii) Αν $F=100\text{N}$ ποιες οι αντιδράσεις των υποστηριγμάτων;

23) Ένας κύλινδρος ακτίνας $R=0,5\text{m}$ και βάρους $w=200\text{N}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, επαπτόμενος σε κατακόρυφο σκαλοπάτι ύψους $h=R$. Ασκούμε στον κύλινδρο οριζόντια δύναμη $F=80\text{N}$ εφαπτομενικά, όπως στο σχήμα.



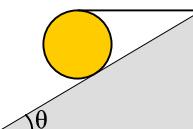
- i) Ποια δύναμη δέχεται ο κύλινδρος από το σκαλοπάτι στο σημείο K ;
- ii) Αν αυξάνουμε σιγά – σιγά το μέτρο της δύναμης F , για ποια τιμή της δύναμης ο κύλινδρος θα αρχίσει να υπερπηδά το σκαλοπάτι;

24) Η ομογενής ράβδος $A\Gamma$ του σχήματος έχει βάρος 400N και ισορροπεί, με $\theta=60^\circ$. Αν ο κατακόρυφος τοίχος είναι λείος, να υπολογίστε:



- i) Την αντίδραση του τοίχου.
- ii) Την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης του δαπέδου στην ράβδο.

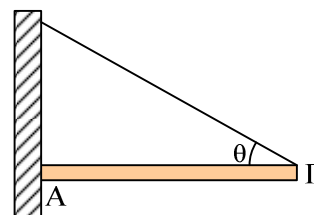
25) Ομογενής σφαίρα βάρους 100N ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^\circ$ δεμένη με οριζόντιο νήμα, όπως στο σχήμα.



Να υπολογιστούν:

- i) Η τάση του νήματος
- ii) Η δύναμη που δέχεται η σφαίρα από το επίπεδο.

26) Ομογενής ράβδος $A\Gamma$ βάρους $w=100\text{N}$ ισορροπεί οριζόντια επαπτόμενη σε κατακόρυφο τοίχο ενώ είναι δεμένη με νήμα που σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τη ράβδο.

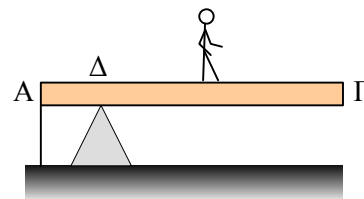


Να βρεθούν:

- i) Η τάση του νήματος.

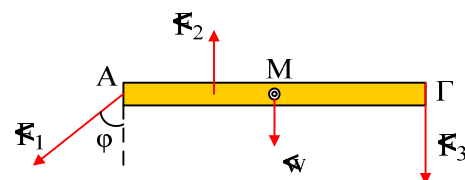
- ii) Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ τοίχου και ράβδου, για να ισορροπεί η ράβδος.

27) Μια ομογενής οριζόντια δοκός ΑΓ μήκους $L=4\text{m}$ και μάζας $m=40\text{kg}$ ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στο σημείο Δ, όπου $(A\Delta)=1\text{m}$, ενώ το άκρο Α δένεται με κατακόρυφο νήμα, το οποίο δένεται στο έδαφος.



- i) Ποια η τάση του νήματος;
 ii) Αν κατά μήκος της σανίδας περπατά ένας άνθρωπος μάζας 60kg , ποια είναι η μέγιστη απόσταση από το άκρο Α που μπορεί να φτάσει χωρίς να σπάσει το νήμα, αν το όριο θραύσεώς του είναι $T_{\theta\rho}=1600\text{N}$; $g=10\text{m/s}^2$.

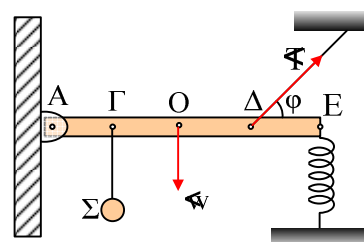
28) Η ράβδος ΑΓ μήκους 40cm και βάρους $w=40\text{N}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσον της Μ. Δίνονται ότι $F_1=100\text{N}$, $\varphi=60^\circ$ η δύναμη F_2 είναι 60N και ασκείται στο μέσο του ΑΜ και η ράβδος ισορροπεί οριζόντια.



Να βρεθούν οι ροπές των δυνάμεων F_1 και F_2 , ως προς το Μ.

- i) Υπολογίστε το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης F_3 .
 ii) Πόση είναι η ροπή ως προς το σημείο Α, της δύναμης F που ασκεί ο άξονας στο Μ;
 iii) Να βρεθούν οι συνιστώσες F_x , F_y της δύναμης F .
 iv) Βρείτε την ροπή της δύναμης F , ως προς το σημείο Ρ, στο οποίο τέμνονται οι φορείς των δυνάμεων F_1 , F_2 .
 v) Πόση είναι η απόσταση του σημείου Ρ από τον φορέα της δύναμης F ;

29) Ομογενής ράβδος βάρους $w=100\text{N}$ ισορροπεί οριζόντια όπως στο σχήμα, όπου το σώμα Σ έχει βάρος $w_1=200\text{N}$. Αν το νήμα σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με την ράβδο και η τάση του νήματος είναι $T=320\text{N}$, ενώ $ΑΓ=ΓΟ=ΟΔ=ΔΕ=1\text{m}$, να βρεθούν:

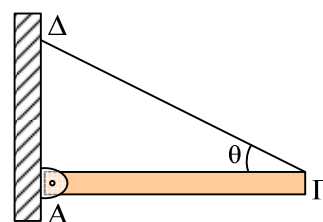


- i) Οι ροπές του βάρους και της τάσης ως προς το σημείο Ε.
 ii) Η ένδειξη του δυναμόμετρου .
 iii) Η δύναμη που ασκείται στην ράβδο στην άρθρωση Α.
 iv) Πόση είναι η ροπή της δύναμης που ασκείται στο Α, ως προς το σημείο Κ που τέμνονται οι φορείς του βάρους Β και της τάσης του νήματος.

30) Η ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μήκος 3m και βάρος 400N και ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια του νήματος ΓΔ που σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τη ράβδο.

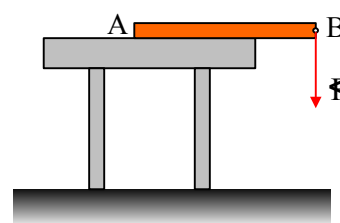
Να βρεθούν:

- Η ροπή του βάρους και της τάσης του νήματος ως προς τα σημεία Α και Δ.
- Η τάση του νήματος.
- Η δύναμη F που ασκείται στην ράβδο από τον τοίχο στο σημείο Α.
- Η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο Δ, καθώς και η απόσταση του Δ από το φορέα της F.



31) Μια ομογενής ράβδος ΑΒ είναι τοποθετημένη πάνω σε ένα τραπέζι έτσι, ώστε τα $\frac{3}{4}$ της να ακουμπά στο τραπέζι. Στο άκρο Β της ράβδου ασκούμε μια συνεχώς αυξανόμενη κατακόρυφη δύναμη F, με φορά προς τα κάτω. Όταν το μέτρο της δύναμης αυτής γίνει $F=100\text{N}$, το άκρο Α της ράβδου αρχίζει να σηκώνεται.

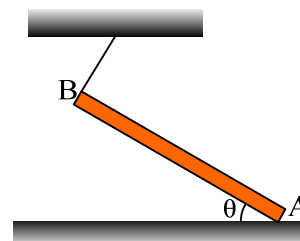
Αν $g=10\text{m/s}^2$, να βρείτε τη μάζα της ράβδου.



32) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει βάρος 200N και ισορροπεί δεμένη στο άκρο της Β με νήμα, που είναι κάθετο σε αυτήν, σχηματίζοντας με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\theta=45^\circ$.

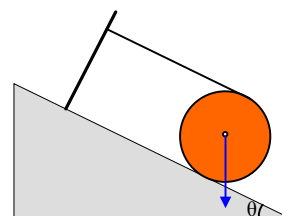
Βρείτε την τάση του νήματος.

- Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ ράβδου και επιπέδου για να επιτυγχάνεται η παραπάνω ισορροπία;
- Αν ο επίπεδο ήταν λείο, να σχεδιάστε ένα σχήμα για την ισορροπία της ράβδου και να υπολογίστε την τάση του νήματος στην περίπτωση αυτή.

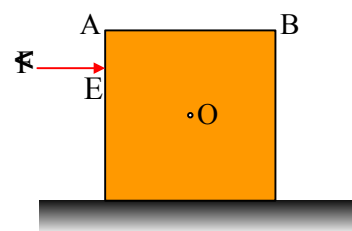


33) Ένας κύλινδρος ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^\circ$ με την βοήθεια νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω του και είναι παράλληλο προς το επίπεδο.

- Να αποδείξετε ότι το επίπεδο δεν είναι λείο.
- Να δείξετε ότι η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο έχει φορά προς τα πάνω και έχει το ίδιο μέτρο με την τάση του νήματος.
- Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής για να υπάρχει ισορροπία;
 $g=10\text{m/s}^2$.

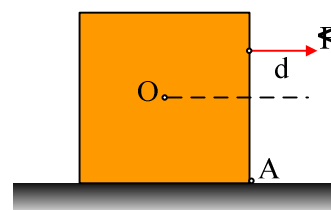


34) Ένας κύβος πλευράς 1m και μάζας $m=40\text{kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης F σε σημείο E, όπου $(AE)=0,1\text{m}$, όπως στο σχήμα.



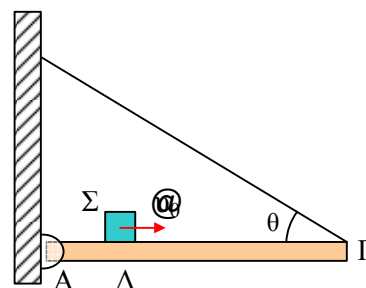
- i) Να βρεθούν οι ροπές όλων των δυνάμεων ως προς το κέντρο O του κύβου, όταν:
 - α) $F=0$, β) $F=100\text{N}$, γ) $F=300\text{N}$.
- ii) Ποια η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η δύναμη $<F$, χωρίς να ανατρέπεται ο κύβος; $g=10\text{m/s}^2$.

35) Ο κύβος του σχήματος έχει ακμή $a=1\text{m}$ και βάρος $w=1000\text{N}$ και ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,2$. Ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα, όπου $d=0,3\text{m}$.



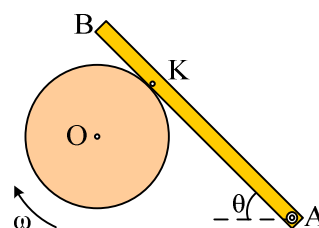
- i) Αν $F=100\text{N}$, να βρείτε και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο. Να υπολογίσετε την συνολική ροπή των δυνάμεων, ως προς το κέντρο O και ως προς την κορυφή A.
- ii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις αν $F=300\text{N}$;
- iii) Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης F . Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει, χωρίς να ανατραπεί ο κύβος; $g=10\text{m/s}^2$.

36) Μια ομογενής οριζόντια δοκός βάρους $w_1=100\text{N}$ και μήκους 4m είναι αρθρωμένη στο άκρο της A, ενώ στο άκρο της Γ είναι δεμένη με νήμα που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\theta=45^\circ$. Πάνω στη δοκό ολισθαίνει ένα σώμα Σ, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, μάζας $m=4\text{kg}$ και για $t=0$ περνά από το σημείο Δ, όπου $(A\Delta)=1\text{m}$ με ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$, όπως στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ και της δοκού είναι $\mu=0,5$, να βρείτε:



- i) Τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό για $t=0$.
- ii) Πόσο πρέπει να είναι το όριο θραύσεως του νήματος, ώστε να μην σπάσει κατά την κίνηση του σώματος Σ.
 $g=10\text{m/s}^2$.

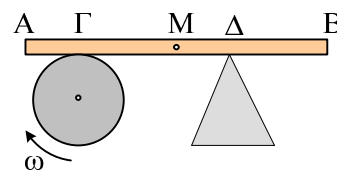
37) Η ομογενής ράβδος AB μήκους $\lambda=4\text{m}$ και βάρους 90N μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο του A, ενώ ακουμπά σε περιστρεφόμενο κύλινδρο σε σημείο του K, όπου $(BK)=1\text{m}$. Η ράβδος παρουσιάζει με τον κύλινδρο συντελεστή τριβής



ολίσθησης $\mu=0,5$ και σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$.

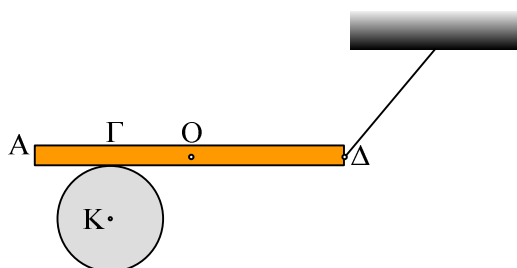
- i) Πόση τριβή δέχεται η ράβδος από τον κύλινδρο στο σημείο K;
- ii) Ποια η συνιστώσα της δύναμης F , που δέχεται η ράβδος στο σημείο A, κατά μήκος της ράβδου και ποια η συνιστώσα της σε κάθετη διεύθυνση;

38) Η ομογενής δοκός AB μήκους 6m και βάρους 300N ισορροπεί οριζόντια, όπως στο σχήμα, στηριζόμενη σε έναν κύλινδρο και σε ένα τρίποδο. Δίνονται $(AG)=1\text{m}$ και $(\Delta B)=2\text{m}$ ενώ ο κύλινδρος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\text{rad/s}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκού και κυλίνδρου είναι $\mu=0,4$.



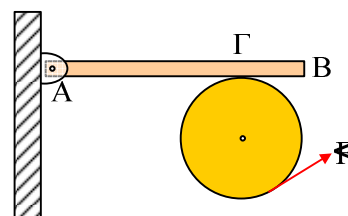
- i) Ποιες οι κατακόρυφες δυνάμεις που δέχεται η δοκός από τον κύλινδρο και από το τρίποδο.
- ii) Υπολογίστε την τριβή που ασκείται στη δοκό στα σημεία στήριξης.
- iii) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τρίποδου και δοκού για την παραπάνω ισορροπία;
- iv) Αν αυξήσουμε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου θα μεταβληθούν οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό;

39) Η ομογενής δοκός ΑΔ του σχήματος έχει μήκος 4m και μάζα 30kg, ισορροπεί δε οριζόντια, όπως στο σχήμα, δεμένη στο ένα της άκρο σε νήμα, ενώ στηρίζεται σε περιστρεφόμενο κύλινδρο σε σημείο Γ, όπου $(AG)=1\text{m}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκού και κυλίνδρου είναι $\mu=0,5$.



- i) Ποια η φορά περιστροφής του κυλίνδρου;
- ii) Ποια η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την οριζόντια διεύθυνση;

40) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος 2m και μάζα $m=3\text{kg}$ και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε κύλινδρο ακτίνας $R=1\text{m}$ και



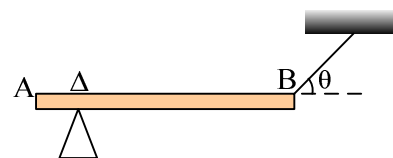
μάζας 20kg, ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος συμπίπτει με τον άξονά του, στο σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=1,5m, ενώ το άλλο του άκρο έχει αρθρωθεί σε κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου είναι $\mu=0,5$ ενώ αρχικά ο κύλινδρος ηρεμεί.

- i) Βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στα σημεία Α και Γ.
- ii) Για $t=0$ ασκούμε εφαπτομενικά στον κύλινδρο δύναμη σταθερού μέτρου $F=20\text{N}$, όπως στο σχήμα, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=4\text{s}$, οπότε παύει να ασκείται.
 - a) Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά ο κύλινδρος.
 - b) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στην ράβδο από την άρθρωση στο σημείο Α στο διάστημα από 0-4s.
 - c) Ποια χρονική στιγμή ο κύλινδρος σταματά να στρέφεται και κατά ποια συνολικά γωνία έχει περιστραφεί;

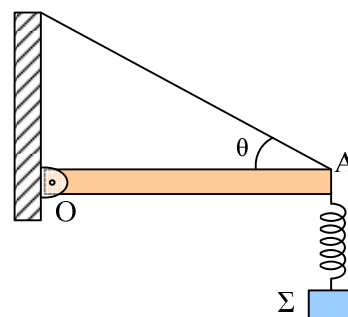
Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- 41) Μια ράβδος ΑΒ μήκους $l=4\text{m}$ και βάρους $w=30\text{N}$ ισορροπεί οριζόντια δεμένη στο ένα της άκρο με νήμα, το οποίο σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τον ορίζοντα και στηριζόμενη σε σημείο Δ, όπου (ΑΔ)=1m.

- i) Ποια η τάση του νήματος;
- ii) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ στηρίγματος και ράβδου, ώστε να επιτυγχάνεται η ισορροπία;



- 42) Η ομογενής δοκός ΟΑ μήκους L και μάζας 4kg είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άλλο της άκρο δένεται με νήμα από τον τοίχο, το οποίο σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με την δοκό. Στο άκρο Α κρέμεται με ελατήριο σταθεράς $k=8K\pi^2=80\text{N/m}$ ένα σώμα Σ μάζας $m=2\text{kg}$, το οποίο ισορροπεί.



- i) Να βρείτε την τάση του νήματος.
- ii) Εκτρέπουμε το σώμα Σ κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 10cm και για $t=0$ το αφήνουμε να κινηθεί. Πόση είναι η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Δυναμική Στερεού

3.8. Θεμελιώδης νόμος της δυναμικής για την στροφική κίνηση.

- 1) Το πρώτο που πρέπει να ξεκαθαρίζουμε είναι αν το στερεό εκτελεί μόνο στροφική ή σύνθετη κίνηση.
 - i) Αν η κίνηση είναι μόνο στροφική τότε $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$ (1).
 - ii) Αν η κίνηση είναι σύνθετη, εκτός από την εξίσωση (1) για να μελετήσουμε την μεταφορική κίνηση του στερεού, θα βρίσκουμε και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας από της εξίσωση $\Sigma F = m \cdot a_{cm}$. (2)
- 2) Θα πρέπει με προσοχή να υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- 3) Αν η ροπή ή οι ροπές που επιταχύνουν το στερεό είναι σταθερές, το στερεό θα αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, οπότε όσον αφορά της στροφική κίνηση, αυτή θα είναι ομαλά επιταχυνόμενη.

Σε κάθε άλλη περίπτωση μπορούμε να βρούμε στιγμιαία την τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης αλλά δεν θα την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε παραπέρα γωνιακή ταχύτητα ή γωνία στροφής.

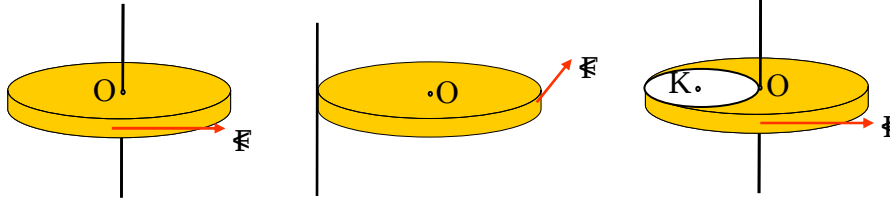
Παράδειγμα 8ο:

Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος ακτίνας $R=0,4\text{m}$ και μάζας $M=4\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, όταν πάνω του ασκείται εφαπτομενικά δύναμη σταθερού μέτρου $F=16\text{N}$.

Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά στις εξής περιπτώσεις:

- i) Ο άξονας είναι κατακόρυφος και διέρχεται από το κέντρο του Ο.

- ii) Ο άξονας είναι κατακόρυφος και διέρχεται από το άκρο μιας ακτίνας του Α.
 iii) Ο άξονας είναι κατακόρυφος και διέρχεται από το κέντρο του, αλλά έχει αφαιρεθεί από τον δίσκο ένας μικρότερος δίσκος ακτίνας $r=0,2m$, όπως στο σχήμα.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$.

Λύση

- i) Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{MR} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

- ii) Εφαρμόζοντας το θεώρημα Steiner υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Α.

$$I = I_{cm} + MR^2 = \frac{1}{2} M \cdot R^2 + M \cdot R^2 = \frac{3}{2} M \cdot R^2 = 1,5 \cdot 4 \cdot 0,16 \text{ kgm}^2 = 0,96 \text{ kgm}^2.$$

$$\text{Οπότε έχουμε } \Sigma \tau = I_A \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 13,3 \text{ rad/s}^2.$$

Παρατηρούμε ότι επειδή ο άξονας περιστροφής δεν περνά από το κέντρο μάζας, μεγαλώνει η ροπή αδράνειας, με αποτέλεσμα να μειώνεται η γωνιακή επιτάχυνση.

- iii) Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας του τμήματος που παραμένει μετά την αφαίρεση ενός τμήματος, σκεφτόμαστε ως εξής: Η ροπή αδράνειας όλου του δίσκου είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας του τμήματος που αφαιρείται και της ροπής αδράνειας του τμήματος που παραμένει μετά την αφαίρεση. Δηλαδή:

$$I_{ολ, O} = I_{αφ, O} + I_{1, O} \rightarrow I_{1, O} = I_{ολ, O} - I_{αφ, O}. \quad (1)$$

Η ολική ροπή αδράνειας του αρχικού δίσκου είναι ίση με:

$$I_{ολ} = \frac{1}{2} M \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,4^2 = 0,32 \text{ kgm}^2.$$

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας του αφαιρούμενου τμήματος, πρέπει να βρούμε αρχικά τη μάζα του τμήματος που αφαιρείται.

Έστω x το πάχος του δίσκου. Τότε ο όγκος του είναι $V = \pi R^2 \cdot x$ και αν ρ η πυκνότητα του υλικού, τότε η μάζα δίνεται από την σχέση $M = \pi R^2 \cdot x \cdot \rho$ (2).

Όμοια η μάζα m_1 του δίσκου που αφαιρούμε θα δίνεται από τη σχέση $m_1 = \pi R_1^2 \cdot x \cdot \rho$ (3)

Με διαίρεση της (3) με την (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{m_1}{M} = \frac{R_1^2}{R^2}$$

και επειδή $R_1=R/2$ παίρνουμε $m_1=1/4 M = 1\text{kg}$.

Έτσι η ροπή αδράνειας του δίσκου που αφαιρέθηκε ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O, θα υπολογιστεί με εφαρμογή του νόμου του Steiner και θα έχουμε:

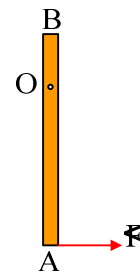
$$I_{\alpha\phi, O} = \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2 + m_1 \cdot R_1^2 = \frac{3}{2} m_1 R_1^2 = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 0,2^2 \text{ kgm}^2 = 0,06 \text{ kgm}^2.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε $I_1 = 0,32 \text{ kgm}^2 - 0,06 \text{ kgm}^2 = 0,26 \text{ kgm}^2$.

$$\text{Οπότε τελικά } \Sigma\tau = I_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{FR}{I_1} = 24,6 \cdot \text{gm}^2.$$

Εφαρμογή 8' :

Μια ομογενής σανίδα μήκους $\ell = 6\text{m}$ και μάζας 10g μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από ένα σημείο O, όπου $(BO)=2\text{m}$. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στο άκρο A μια δύναμη σταθερού μέτρου $F=30\text{N}$ η οποία είναι πάντα κάθετη στη σανίδα.



- Πόσο είναι το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης που αποκτά η σανίδα αμέσως μετά (για $t=0^+$);
- Ποια η αντίστοιχη γωνιακή επιτάχυνση τη στιγμή που η σανίδα θα γίνει οριζόντια; Δίνεται η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς άξονα κάθετο στη σανίδα που διέρχεται

από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m \ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

3.9. Σταθερός άξονας και κέντρο μάζας.

Αν ο σταθερός άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας, τότε το στερεό δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση οπότε $\Sigma F=0$, μιας και το κέντρο μάζας παραμένει ακίνητο.

Αν όμως ο σταθερός άξονας περιστροφής περνά από κάποιο άλλο σημείο, τότε το κέντρο μάζας εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα, για την οποία θα εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό.

Παράδειγμα 9ο:

Μια ομογενής δοκός μήκους $l=4\text{m}$ και μάζας $M=12\cdot g$ μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ένα της άκρο A και ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια κατακόρυφου νήματος, το οποίο είναι δεμένο στο άλλο της άκρο B.

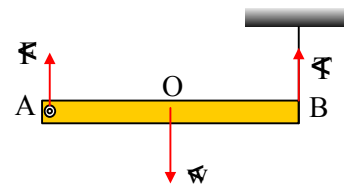
- Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στη δοκό από τον άξονα.
- Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος:
Βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά η δοκός
Πόση δύναμη ασκεί ο άξονας στη δοκό;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{3} m l^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

- Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό είναι το βάρος της, η τάση του νήματος και μια δύναμη F από τον άξονα. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0 \quad (3)$$



Από την εξίσωση (1) έχουμε $F_x + T_x + w_x = 0 \rightarrow F_x = 0$

Χρησιμοποιώντας της (3) ως προς το άκρο B έχουμε:

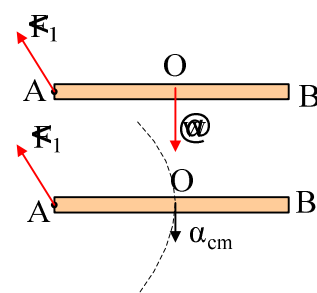
$$w \cdot (OB) - F \cdot (AB) = 0 \rightarrow 120 \cdot 2 - F \cdot 4 = 0 \rightarrow F = 60\text{N}.$$

- Μόλις κόψουμε το νήμα στη δοκό ασκούνται το βάρος της και η δύναμη F_1 από τον άξονα.

- Ορίζουμε θετική φορά, αυτή της περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.² Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για τη στροφική κίνηση, γύρω από τον άξονα περιστροφής έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad w \cdot (AO) = \frac{1}{3} m l^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2l} = 3,75\text{rad/s}^2.$$



- Το κέντρο O της δοκού εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής με γραμμική ταχύτητα $v_{cm} = \omega \cdot R$ και επιτρόχια επιτάχυνση $a_{επ} = a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \rightarrow$

² Το κάνουμε αυτό για να υπολογίσουμε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης και να μην μπλέξουμε με αλγεβρικές τιμές, οπότε κινδυνεύουμε να πέσουμε σε λάθη, κυρίως όταν χρησιμοποιήσουμε εξισώσεις όπως $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$

$$a_{cm} = 3,75 \cdot 2 \text{ m/s}^2 = 7,5 \text{ m/s}^2.$$

Οπότε από την δυναμική της κυκλικής κίνησης για το κέντρο μάζας Ο έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \frac{v^2}{R} \rightarrow F_x = 0 \text{ και}$$

$$\Sigma F_y = m \cdot a_y \rightarrow w - F_{1y} = m \cdot a_{cm} \rightarrow F_{1y} = mg - ma_{cm} = 30 \text{ N}.$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που δέχεται η δοκός από τον άξονα είναι και πάλι κατακόρυφη, αλλά μικρότερη από πριν που η ράβδος ισορροπούσε.

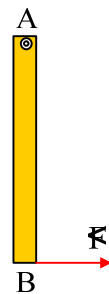
Εφαρμογή 9^η :

Μια ομογενής ράβδος μήκους 2m και μάζας 3·g μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο Α και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω της μια οριζόντια δύναμη $F=20\text{N}$ στο άκρο της Β.

- Πόση γωνιακή επιτάχυνση αποκτά η ράβδος;
- Βρείτε την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F .
- Η κίνηση της ράβδου είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτή και

$$\text{διέρχεται από το μέσον της } I = \frac{1}{12} m \ell^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

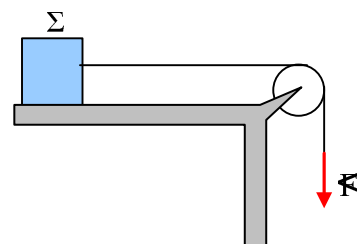


3.10. Και αν έχουμε ένα σύστημα σωμάτων;

Προσέχουμε με ποιες σχέσεις θα συνδέσουμε τα φυσικά μεγέθη του ενός σώματος με μεγέθη του άλλου. Σχέσεις όπως $v = \omega R$ και $a_{cm} = a_{γων} R$ δεν θεωρούνται δεδομένες και όπου ισχύουν θα πρέπει να αποδεικνύονται.

Παράδειγμα 10ο:

Το σώμα Σ του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m_1 = 2 \cdot g$ και ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Δένουμε το σώμα στο άκρο νήματος, το οποίο αφού το περάσουμε από μια τροχαλία μάζας $m_2 = 2 \cdot g$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$, ασκούμε στο άλλο του άκρο μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη $F = 10 \text{ N}$. Το νήμα δεν γλιστράει στην τροχαλία. Ζητούνται:



- i) Η επιτάχυνση του σώματος Σ.
- ii) Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- iii) Πόσες περιστροφές έχει πραγματοποιήσει η τροχαλία μέχρι τη στιγμή που αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega=30\text{rad/s}$.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ ενώ για την τροχαλία $I=\frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και στην τροχαλία, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Για το σώμα Σ:

Στον άξονα y ισορροπεί άρα $\Sigma F_y=0 \rightarrow N=w=20\text{N}$.

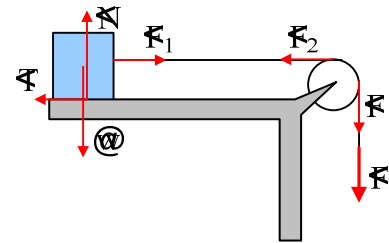
Ενώ στον x $\Sigma F_x = m \cdot a_1 \rightarrow F_1 - T = m a_1 \rightarrow F_1 - \mu N = m_1 a_1$ (1)

Για την τροχαλία:

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, παίρνουμε:

$$FR - F_2R = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow FR - F_2R = \frac{1}{2} m_2 R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F - F_2 = \frac{1}{2} m_2 R \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$



Προσέξτε ότι οι δυνάμεις που ασκεί το νήμα στην τροχαλία είναι διαφορετικές στις δυο πλευρές της. Μόνο αν η τροχαλία θεωρείται αβαρής οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα.

Επειδή το νήμα είναι αβαρές $F_1=F_2$.

Για να βρούμε μια σχέση που να συνδέει την κίνηση του σώματος Σ με την κίνηση της τροχαλίας, δουλεύουμε ως εξής:

Έστω ότι η τροχαλία στρέφεται κατά γωνία $d\theta$. Τότε τα νήμα που μετακινείται κατά την φορά της κίνησης έχει μήκος $dl=R \cdot d\theta$ και το σώμα Σ θα μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά $ds=R \cdot d\theta$. $\rightarrow$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{R \cdot d\theta}{dt} \rightarrow v_{\Sigma} = R \cdot \omega_{\text{τροχ.}}$$

Η σχέση αυτή θυμίζει την γνωστή σχέση $v=\omega R$, αλλά να προσέξουμε ότι εδώ συνδέει τη ταχύτητα του σώματος Σ με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τροχαλίας.

Στην ίδια σχέση καταλήγουμε αν σκεφτούμε ως εξής.

Κάθε σημείο του σχοινιού έχει μια ορισμένη ταχύτητα v . Αλλά τότε v θα είναι και η ταχύτητα του σώματος Σ και v θα είναι και η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας για την οποία ισχύει $v=\omega R$.

$$\text{Άρα } v_{\Sigma} = \omega \cdot R.$$

Με παραγωγή της σχέσης αυτής παίρνουμε:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} \rightarrow a_{\Sigma} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \rightarrow a_{\Sigma} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3)$$

i) Με πρόσθεση των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε:

$$F_1 - \mu N + F - F_2 = m_1 a_1 + \frac{1}{2} m_2 \cdot a_1 \rightarrow a_1 = \frac{2(F - \mu N)}{2m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}^2.$$

ii) Από τη σχέση (3) παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = a_1/R = 10 \text{ rad/s}^2$.

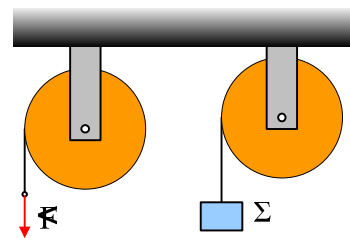
iii) Από την εξίσωση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \rightarrow t = 3 \text{ s}$, οπότε

$\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 = 45 \text{ rad}$. Οπότε ο αριθμός των περιστροφών είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = 7,17 \text{ στροφές.}$$

Εφαρμογή 10^η :

Γύρω από μια τροχαλία με ακτίνα $R=0,1\pi \text{ m}$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και στα άκρα του ασκούμε δύναμη $F=10\text{N}$. Το αποτέλεσμα είναι η τροχαλία να κάνει 20 περιστροφές μέσα σε 20 δευτερόλεπτα. Αν στο άκρο του νήματος δένουμε ένα σώμα Σ βάρους 10N και το αφήνουμε ελεύθερο να πέσει, πόσες περιστροφές θα έκανε η τροχαλία σε 20s; $g=10\text{m/s}^2$.



3.11. Σύνθετη κίνηση στερεού.

Τότε εφαρμόζουμε τις παρακάτω εξισώσεις χωριστά για κάθε κίνηση:

Για την μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot a_{\text{cm}}$ και

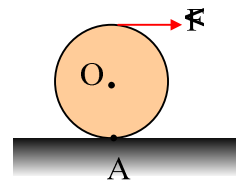
Για την περιστροφική κίνηση: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

Να προσέχουμε να εφαρμόζουμε τις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιώντας τα μέτρα των δυνάμεων και των επιταχύνσεων για να αποφύγουμε πιθανά λάθη.

Παράδειγμα 11ο:

Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο ακτίνας $R=0,4\text{m}$ και μάζας 20g τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κατόπιν τον τοποθετούμε σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τραβώντας το νήμα για $t=0$ ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη $F=20\text{N}$, όπως στο σχήμα.

- i) Υπολογίστε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
 ii) Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;
 iii) Για τη χρονική στιγμή $t_1=10s$ να βρεθούν:
 α) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
 β) Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
 γ) Η ταχύτητα ενός σημείου επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο. Σημείο A.
 δ) Η οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου καθώς και η γωνία περιστροφής του.



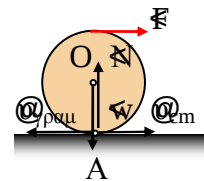
Για τον κύλινδρο δίνεται $I = \frac{1}{2} mR^2$.

Λύση

- i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του η κάθετη αντίδραση και η ασκούμενη μέσω του νήματος δύναμη F.

Για τη μεταφορική κίνηση έχουμε $\Sigma F = ma_{cm}$ και επειδή $\Sigma F_y = 0 \rightarrow$

$$F = m \cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = F/m = 1 \text{ m/s}^2.$$



- ii) Για την στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_{γων} \rightarrow \alpha_{γων} = \frac{2F}{mR} = 5 \text{ rad/s}^2.$$

- iii) Βρήκαμε μια σταθερή επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής.

- α) Η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, άρα
 $v_{cm} = a \cdot t = 1 \cdot 10 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}.$
 β) Η στροφική κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη και κατά αντιστοιχία έχουμε:
 $\omega = \alpha_{γων} \cdot t = 5 \cdot 10 \text{ rad/s} = 50 \text{ rad/s}.$
 γ) Το σημείο A έχει μια ταχύτητα προς τα δεξιά ίση με $v_{cm} = 10 \text{ m/s}$ και μια προς τα αριστερά την γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\pi} = \omega \cdot R = 50 \cdot 0,4 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$. Άρα η ταχύτητα του σημείου A έχει φορά προς τα αριστερά και μέτρο $v = v_{\gamma\pi} - v_{cm} = 10 \text{ m/s}.$
 δ) Ο κύλινδρος εξαιτίας της μεταφορικής του κίνησης διανύει απόσταση:

$$x = x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = 50 \text{ m}$$

Ενώ η γωνία περιστροφής του κατά αντιστοιχία είναι:

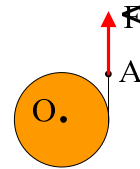
$$\theta = \frac{1}{2} \alpha_{γων} t^2 = 250 \text{ rad}.$$

Σχόλια: 1) Το σημείο A επαφής του κυλίνδρου με το έδαφος έχει ταχύτητα. Άρα ο κύλινδρος ολισθαίνει. Κατά συνέπεια οι εξισώσεις του βιβλίου $v_{cm} = \omega R$ και $a_{cm} = \alpha_{γων} R$ δεν ισχύουν.

- 2) Ενώ ο κύλινδρος έχει μετατοπισθεί κατά 50m σε επαφή με το έδαφος ήρθαν τα σημεία της περιφέρειάς του με μήκος $s = \theta \cdot R = 250 \cdot 0,4\text{m} = 100\text{m}$. Αυτό σημαίνει ότι ο κύλινδρος «σπινάρει».

Εφαρμογή 11^η :

Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας $10\cdot g$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα. Τραβάμε το νήμα ασκώντας στο άκρο του σταθερή κατακόρυφη δύναμη $F=40\text{N}$, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει από ύψος $h=12\text{m}$ από το έδαφος. Ζητούνται:

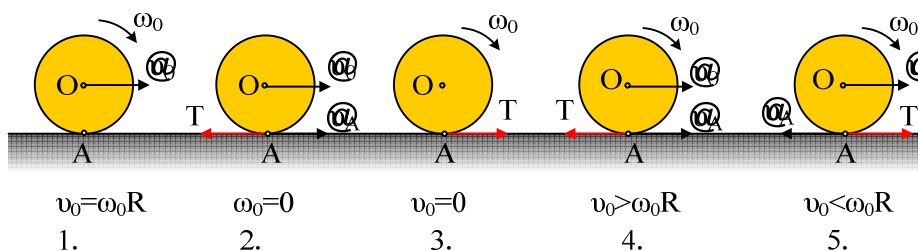


- Η ταχύτητα του κέντρου O του κυλίνδρου όταν φτάνει στο έδαφος.
- Η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή αυτή.
- Το ελάχιστο μήκος του νήματος, ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί η παραπάνω κίνηση.
- Πόσο απέχει από το έδαφος το σημείο A εφαρμογής της δύναμης τη στιγμή που κύλινδρος φτάνει στο έδαφος;

Για τον κύλινδρο δίνεται $I = \frac{1}{2}mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

3.12. Και αν υπάρχει τριβή;

- Πρέπει να ελεγχθεί αν η τριβή είναι στατική ή τριβή ολίσθησης. Αν μας δίνεται ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ή με κάποιον άλλο τρόπο προκύπτει το παραπάνω συμπέρασμα, τότε η τριβή είναι στατική. Και σαν στατική δεν γνωρίζουμε το μέτρο της, το οποίο πρέπει να υπολογιστεί μέσω των εξισώσεων κίνησης.
- Με ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να βρεθεί ποια είναι η κατεύθυνση της τριβής.
 - Μερικές περιπτώσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Στα παραπάνω σχήματα ένας τροχός εκτοξεύεται σε οριζόντιο επίπεδο. Για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε την τριβή, εξετάζουμε την ταχύτητα του σημείου A, που είναι το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος. Η τριβή έχει πάντα αντίθετη φορά από την ταχύτητα του σημείου A.

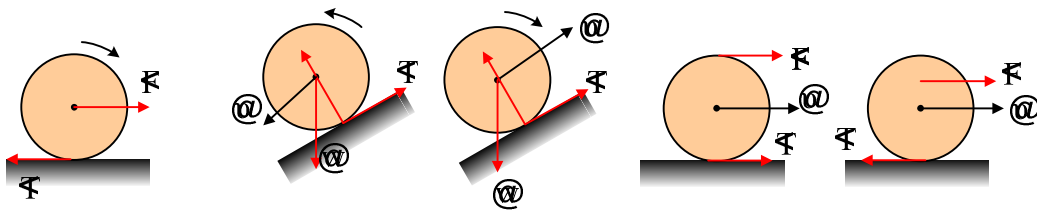
A) Να προσέξουμε το 1. σχήμα. Η ταχύτητα του σημείου A είναι μηδενική και στον τροχό δεν ασκείται τριβή. Πράγμα που σημαίνει ότι ο τροχός θα συνεχίσει να εκτελεί κίνηση ευθύγραμμη ομαλή, όσον αφορά τη μεταφορική, ενώ ταυτόχρονα θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ας υποθέσουμε ότι στο σχήμα 1. η τριβή ήταν προς τα δεξιά. Τότε ο τροχός θα επιταχυνόταν με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας, ενώ ταυτόχρονα λόγω ροπής θα μειωνόταν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Έτσι η βασική σχέση για κύλιση χωρίς ολίσθηση $v_{cm} = \omega \cdot R$ θα έπαυε να ισχύει.

Τι συμβαίνει αν υποθέσουμε ότι στο σχήμα 1. η τριβή είναι προς τα αριστερά;

B) Τι τριβή έχουμε στις υπόλοιπες περιπτώσεις; Μα αφού το σημείο επαφής A έχει ταχύτητα, ο τροχός ολισθαίνει, άρα η τριβή είναι τριβή ολίσθησης $T = \mu \cdot N$.

ii) Μερικές ακόμη περιπτώσεις

Στο 1. σχήμα ο τροχός επιταχύνεται προς τα δεξιά, άρα η τριβή είναι προς τα αριστερά, αφού το σημείο επαφής τείνει να κινηθεί προς τα δεξιά. Από μια άλλη άποψη για να μπορέσει ο τροχός να περιστραφεί όπως στο σχήμα θα πρέπει η τριβή να είναι προς τα αριστερά, ώστε η ροπή της να προκαλέσει την κατάλληλη γωνιακή επιτάχυνση.



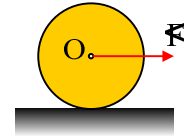
Στο 2. σχήμα ο τροχός κατεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο. Για τους ίδιους λόγους η τριβή έχει φορά προς τα πάνω.

Στο 3. σχήμα ο τροχός ανέρχεται κατά μήκος του επιπέδου, επιβραδυνόμενος. Πρέπει λοιπόν να επιβραδύνεται και όσον αφορά την στροφική του κίνηση. Η μόνη ασκούμενη ροπή είναι αυτή που προκαλεί η τριβή, με αποτέλεσμα η τριβή να έχει φορά προς τα πάνω.

Στα σχήματα 4. και 5 τα πράγματα είναι δύσκολα.... Θα πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης για να καταλήξουμε.

Παράδειγμα 12ο:

Ένας κύλινδρος μάζας 40 g και ακτίνας $R=0,5\text{ m}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στον άξονά του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F μέτρου 60 N , όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Ζητούνται:



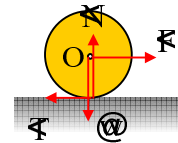
- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Το μέτρο της ασκούμενης τριβής.
- Τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου, ώστε να μπορεί να κυλιέται ο κύλινδρος χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m R^2$ και $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

- i) Στον κύλινδρο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα.

Στον κατακόρυφο άξονα ο κύλινδρος ισορροπεί οπότε $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w = 400\text{ N}$.



Για την μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow F - T = m \cdot a_{\text{cm}} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση και παίρνοντας θετική φορά, αυτήν που στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού, έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\text{γων}} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \quad (2)$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει και η βασική σχέση σύνδεσης μεταξύ γραμμικών και γωνιακών μεγεθών:

$$a_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} \cdot R \quad (3)$$

- ii) Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα η λύση του οποίου μας δίνει τα αναζητούμενα μεγέθη.

Η (2) εξαιτίας της (3) γίνεται $T = \frac{1}{2} m \cdot a_{\text{cm}} \quad (4)$

και με πρόσθεση της (1) και (4) λαμβάνουμε:

$$F = \frac{3}{2} m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow a_{\text{cm}} = \frac{2F}{3m} = 1\text{ m/s}^2.$$

- ii) Από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = a_{\text{cm}}/R = 2\text{rad/s}^2.$$

iii) Από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$T = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = T = \frac{1}{2} 40 \cdot 0,5 \cdot 2 \text{ N} = 20\text{N}.$$

iv) Αφού θέλουμε ο κύλινδρος να μην ολισθαίνει, πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, δηλαδή μικρότερη ή ίση με την μέγιστη τιμή της στατικής που ονομάζεται οριακή τριβή. Έτσι:

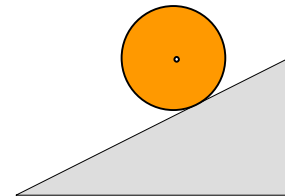
$$T \leq T_{\text{op}} \quad \text{ή} \quad T \leq \mu_s \cdot N \quad \text{ή}$$

$$\mu_s \geq \frac{T}{N} \quad \text{τότε} \quad \mu_s \geq 0,05$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής είναι $\mu_s = 0,05$.

Εφαρμογή 12^η :

Ένας κύλινδρος ακτίνας $R=0,4\text{m}$ για $t=0$, αφήνεται να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως $\theta=30^\circ$, οπότε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Ζητούνται:



- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Το μέτρο της ασκούμενης τριβής, αν η μάζα του κυλίνδρου είναι ίση με $20 \cdot g$.
- Ο αριθμός των περιστροφών του κυλίνδρου μέχρι τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$.

$$\text{Δίνεται για τον κύλινδρο } I = \frac{1}{2} mR^2 \text{ και } g=10\text{m/s}^2.$$

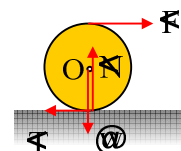
Παράδειγμα 13ο:

Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας $m=40 \cdot g$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κατόπιν τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,2$. Τραβώντας το νήμα ασκούμε στον κύλινδρο μια σταθερή οριζόντια δύναμη $F=120\text{N}$.

- Ποια η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- Βρείτε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- Αν το μέτρο της δύναμης ήταν $F=300\text{N}$, ποια η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου;

$$\text{Δίνεται για τον κύλινδρο } I = \frac{1}{2} mR^2 \text{ και } g=10\text{m/s}^2.$$

Λύση



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.

Γιατί η τριβή είναι προς τα αριστερά;

Η αλήθεια είναι ότι δεν μπορούμε να προβλέψουμε τη φορά της. Έστω λοιπόν ότι είναι προς τα αριστερά

Δουλεύουμε με τα μέτρα των δυνάμεων και των ροπών.

Στον κατακόρυφο άξονα ο κύλινδρος ισορροπεί $\rightarrow \Sigma F = 0 \rightarrow N = w = 400 \text{ N}$.

Για την μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow F - T = m \cdot a_{\text{cm}} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση και παίρνοντας θετική φορά, αυτήν που στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού, έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R + T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F + T = \frac{1}{2} m \cdot R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Τι κάνει ο κύλινδρος; Κυλιέται μόνο ή και ολισθαίνει; Η εκφώνηση δεν αναφέρει.

Ας υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει οπότε θα ισχύει και η βασική σχέση σύνδεσης μεταξύ γραμμικών και γωνιακών μεγεθών:

$$a_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3)$$

- i) Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα η λύση του οποίου μας δίνει τα αναζητούμενα μεγέθη.

$$\text{Η (2) εξαιτίας της (3) γίνεται } F + T = \frac{1}{2} m \cdot a_{\text{cm}} \quad (4)$$

και με πρόσθεση της (1) και (4) λαμβάνουμε:

$$2F = \frac{3}{2} m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow a_{\text{cm}} = \frac{4F}{3m} \quad (5) \rightarrow a_{\text{cm}} = 4 \text{ m/s}^2.$$

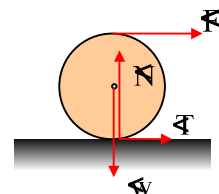
Από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = a_{\text{cm}} / R = 8 \text{ rad/s}^2.$$

- ii) Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$T = F - m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow T = 120 - 40 \cdot 4 \text{ N} = -40 \text{ N}.$$

Επειδή η τριβή προέκυψε αρνητική, σημαίνει ότι η τριβή έχει φορά προς τα δεξιά. Το σωστό σχήμα δηλαδή είναι αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Άλλωστε από τη σχέση (5) φαίνεται ότι η επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη από αυτή που θα μπορούσε να προκαλέσει μόνη της η δύναμη F. Θα πρέπει να υπάρχει και άλλη δύναμη προς τα δεξιά,



Το ερώτημα που ανακύπτει είναι αν είναι σωστή η υπόθεση που κάναμε, ότι ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Το ελέγχουμε υπολογίζοντας το μέτρο της οριακής στατικής τριβής.

$$T_{op} = \mu_s \cdot N = 0,2 \cdot 400\text{N} = 80\text{N}$$

Προφανώς η τριβή που βρήκαμε είναι στατική, αφού $40\text{N} < 80\text{N}$, οπότε δεν υπάρχει ολίσθηση.

iii) Για τιμή της δύναμης $F=300\text{N}$ και με την υπόθεση ότι ισχύουν όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις βρίσκουμε:

$$a_{cm} = \frac{4F}{3m} = 10\text{m/s}^2 \text{ και } T = F - m \cdot a_{cm} = 300\text{N} - 40 \cdot 10\text{N} = -100\text{N}$$

Δηλαδή μέτρου 100N με φορά προς τα δεξιά. Όμως η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής υπολογίσαμε ότι είναι 80N , άρα ο κύλινδρος δεν μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Αφού όμως ο κύλινδρος ολισθαίνει η τριβή έχει μέτρο $T_{ολ}=T_{op}=80\text{N}$, οπότε:

Για τη μεταφορική κίνηση:

$$F+T = m \cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F+T}{m} = 9,5\text{ m/s}^2$$

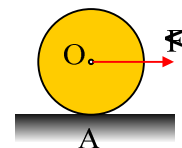
Ενώ για τη στρωφική κίνηση:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F \cdot R - T \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων} \rightarrow \alpha_{γων} = \frac{2(F-T)}{mR} = 22\text{rad/s}^2.$$

Ας προσέξουμε ότι τώρα $a_{cm} \cdot \alpha_{γων} \cdot R$ πράγμα αναμενόμενο αφού ο κύλινδρος ολισθαίνει.

Εφαρμογή 14^η :

Ένας κύλινδρος μάζας 20g και ακτίνας $R=0,4\text{m}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,15$. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στον άξονά του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F μέτρου 120N , όπως στο σχήμα. Ζητούνται:

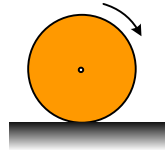


- Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Το μέτρο της ασκούμενης τριβής.
- Η ταχύτητα ενός σημείου επαφής του κυλίνδρου με το έδαφος (σημείο A) τη χρονική στιγμή $t=6\text{s}$.

$$\text{Δίνεται για τον κύλινδρο } I = \frac{1}{2} m R^2 \text{ και } g=10\text{m/s}^2.$$

Εφαρμογή 15'' :

Ένας τροχός μάζας 40 g και ακτίνας $R=0,5\text{ m}$ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=60\text{ rad/s}$. Σε μια στιγμή ο τροχός αφήνεται σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Αν ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} mR^2$ και

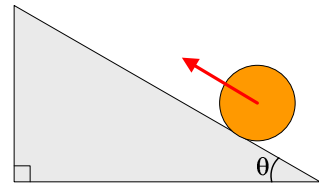


$g=10\text{ m/s}^2$ ζητούνται:

- i) Η γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) που θα αποκτήσει.
- ii) Η επιτάχυνση του άξονα του τροχού.
- iii) Μετά από πόσο χρόνο ο τροχός θα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και πόσο θα έχει στο μεταξύ μετατοπισθεί ο άξονάς του;
- iv) Πόσες περιστροφές έκανε ο τροχός μέχρι να πάψει την ολίσθησή του;

Εφαρμογή 16'' :

Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας 20 g και ακτίνας $R=0,2\text{ m}$ ανεβαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου κλίσεως $\theta=30^\circ$. Σε μια στιγμή ο άξονάς του έχει ταχύτητα v και ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



- i) Βρείτε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- ii) Ποια η αντίστοιχη γωνιακή επιτάχυνση;
- iii) Υπολογίστε τη στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.

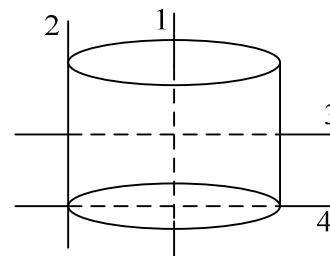
Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{ m/s}^2$.

Ασκήσεις – Προβλήματα

- 1) Ο κύλινδρος του σχήματος μπορεί να στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 \text{ rad/s}$ γύρω από έναν από τους άξονες 1, 2, 3, 4.

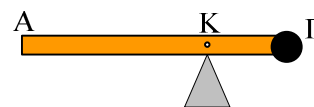
Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

- i) Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα 1 είναι μικρότερη από την αντίστοιχη ως προς τον άξονα 2.
- ii) Ως προς τον άξονα 3 έχει ροπή αδράνειας μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ως προς τον άξονα 4.
- iii) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια έχει όταν στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, γύρω από τον άξονα 4, παρά γύρω από τον άξονα 3.



- 2) Δίνεται μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους 8m και μάζας 3·g. Στο άκρο της Γ προσκολλάται μια σφαίρα, που θεωρείται σημειακή, μάζας 1kg.

- i) Σε ποιο σημείο Κ πρέπει να στηρίζουμε την ράβδο για να ισορροπεί οριζόντια;
- ii) Να εξετασθεί ως προς την ορθότητά της η πρόταση: «το κέντρο μάζας του συστήματος ράβδος-σφαίρα, βρίσκεται στην κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο Κ»
- iii) Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στην ράβδο και διέρχεται από το σημείο Κ



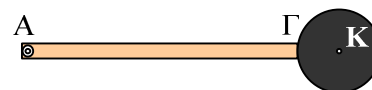
Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα

κάθετο προς αυτήν που διέρχεται από το μέσον της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2$ και

$g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 3) Δίνεται μια ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους 2m και μάζας 6·g. Στο άκρο της Γ προσκολλάται μια ομογενής σφαίρα, ακτίνας $R = 0,5$, μάζας 5·g, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο Α και είναι κάθετος προς την ράβδο.

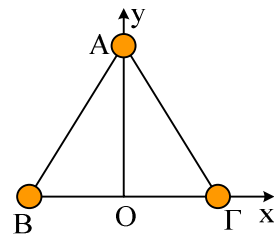
Δίνονται για την σφαίρα ως προς άξονα μια διάμετρό της $I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$



ενώ για άξονα κάθετο προς την ράβδο που περνά από το μέσον της

$$I = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

- 4) Τρεις σφαίρες, μάζας m η καθεμία, είναι τοποθετημένες στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a , όπως στο σχήμα. Προσδιορίστε τη ροπή αδράνειας ως προς τους άξονες x, y, z όπου ο άξονας z περνά από το μέσο O της $B\Gamma$ και είναι κάθετος στο επίπεδο $AB\Gamma$.

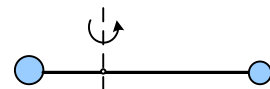


- 5) Δύο μάζες M και m συνδέονται με μια αβαρή ράβδο μήκους L , όπως στο σχήμα.

- i) Για ένα άξονα κάθετο στην ράβδο, να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας όταν:

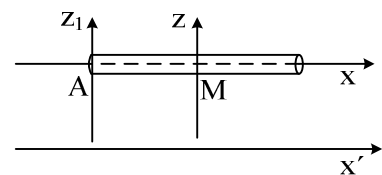
α) Ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας C .

β) Διέρχεται από σημείο O που απέχει απόσταση d από το κέντρο μάζας C .



- ii) Γύρω από ποιον από όλους τους παράλληλους αυτούς άξονες έχουμε την ελάχιστη ροπή αδράνειας;

- 6) Στο επίπεδο του χαρτιού βλέπεται μια λεπτή ομογενή κυλινδρική ράβδο μήκους $\ell = 4\text{m}$ και μάζας 3kg . Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα:



- i) x , κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της ράβδου.

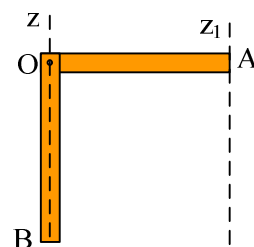
- ii) x' ο οποίος είναι παράλληλος στον άξονα x απέχοντας 1m από αυτόν.

- iii) z , ο οποίος είναι κάθετος στην ράβδο και διέρχεται από το μέσον της M .

- iv) z_1 ο οποίος διέρχεται από το άκρο A της ράβδου και είναι κάθετος σ' αυτήν.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2$.

- 7) Δίνονται δύο ομογενείς κυλινδρικοί ράβδοι μήκους $\ell = 2\text{m}$ και μάζας 3kg οι οποίες έχουν καρφωθεί, έχοντας κοινό το άκρο τους O , όπως στο σχήμα. Να βρείτε την ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς:



- i) Άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που διέρχεται από το άκρο O .

- ii) Τον άξονα z κατά μήκος της ράβδου OB .

- iii) Τον άξονα z_1 ο οποίος είναι παράλληλος στον z και διέρχεται από το άκρο A της OA .

Δίνεται η ροπή μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται

$$\text{από το μέσον της } I = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

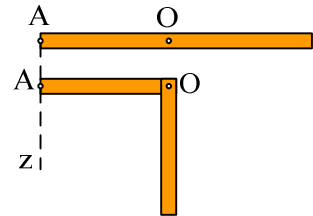
8) Μια ομογενής δοκός έχει μήκος $\ell = 4\text{m}$ και μάζα $m = 6\text{kg}$.

i) Βρείτε την ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο προς τη δοκό που διέρχεται:

- Από το μέσον της O
- Από το άκρο της A.

ii) Κόβουμε τη δοκό στη μέση και τα δυο κομμάτια τα ενώνουμε όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα:

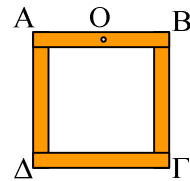
- Κάθετο στο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο O.
- Κάθετο στο επίπεδο που διέρχεται από το άκρο A.
- Τον άξονα z που διέρχεται από το άκρο A και είναι παράλληλος προς το ένα κομμάτι.



Δίνεται η ροπή μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από

$$\text{το μέσον της } I = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

9) Τέσσερις ομογενείς λεπτοί ράβδοι μήκους $\ell = 1\text{m}$ και μάζας 3kg η καθεμιά, έχουν καρφωθεί και σχηματίζουν ένα τετράγωνο «κάδρο» πλευράς 1m . Το τετράγωνο που σχηματίζεται, κρέμεται στον τοίχο από το μέσο O της πλευράς του AB.

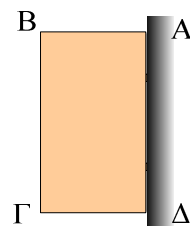


i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του τετραγώνου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το O και είναι κάθετος στο επίπεδο του κάδρου. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο προς αυτήν που διέρχεται από το

$$\text{μέσον της } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

ii) Πόση είναι η ροπή αδράνειας του ίδιου τετραγώνου ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από την πλευρά AΔ;

10) Δίνεται μια πόρτα με πλευρές $AB = 1\text{m}$ και $AΔ = 2\text{m}$, μάζας 20kg . Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς άξονα που διέρχεται από τη πλευρά AΔ. Να θεωρήσετε ότι η πόρτα αποτελείται από μικρές σανίδες, η μια δίπλα στην άλλη, ενώ δίνεται ότι η ροπή μιας ομογενούς ράβδου μήκους ℓ και μάζας m , ως προς άξονα που

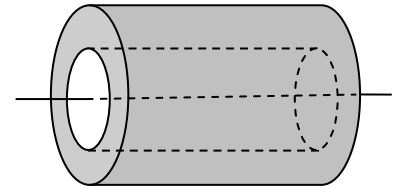


διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος προς αυτήν δίνεται από

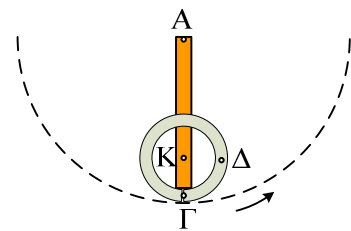
$$\text{τη σχέση } I_{cm} = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

- 11) Δίνεται ένα κυλινδρικό κέλυφος, εσωτερικής ακτίνας $r=0,3\text{m}$ και εξωτερικής $R=0,4\text{m}$, μάζας $m=4\text{kg}$. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του κελύφους, ως προς τον άξονα x , ο οποίος διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.



- 12) Μια λεπτή στεφάνη μάζας $m_1=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ συνδέεται με μια ομογενή ράβδο μήκους $\ell=4\text{m}$ και μάζας $m_2=3\text{kg}$. Το σύστημα στρέφεται οριζόντια γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο A , όπως στο σχήμα. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με 208J .

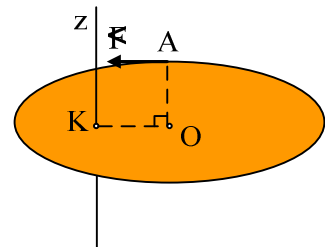


- Ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής;
- Βρείτε τις ταχύτητες των σημείων Γ και Δ και σχεδιάστε τις στο σχήμα. (Η ακτίνα της στεφάνης $K\Delta$ είναι κάθετη στη ράβδο)

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος

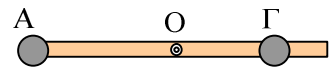
$$\text{διέρχεται από το μέσον της } I = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

- 13) Η ομογενής οριζόντια πλατφόρμα του σχήματος έχει μάζα 40g και ακτίνα $R=4\text{m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z , με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F=12\text{N}$, η οποία ασκείται διαρκώς σε σημείο A της περιφέρειας της πλατφόρμας, όπου η ακτίνα OA είναι κάθετη στην KO . Αν $KO=1\text{m}$, ενώ για την πλατφόρμα και για άξονα κάθετο στο επίπεδό της που διέρχεται από το κέντρο της $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$, ζητούνται:

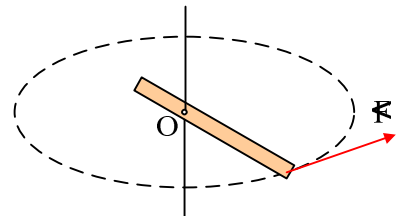


- Η συνολική ροπή που ασκείται στην πλατφόρμα, ως προς τον άξονα περιστροφής της;
- Ο άξονας z δεν περνάει από το κέντρο μάζας της πλατφόρμας. Ισχύει στην περίπτωση αυτή ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης;
- Πόση είναι η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο της πλατφόρμας O ;

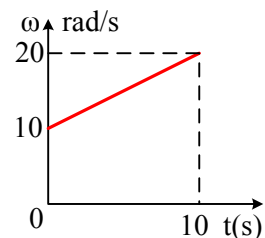
- 14) Αβαρής ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από το μέσον της O, όπως στο σχήμα. Στο A, όπου $OA=1\text{m}$ δένεται μικρή σφαίρα μάζας $1\cdot g$ και στο Γ, όπου $OG=0,8\text{m}$, άλλη σφαίρα μάζας m και η ράβδος ισορροπεί.



- Ποια η μάζα m ;
 - Αν η μάζα $m=5\text{kg}$, ποια η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σύστημα, αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί; $g=10\text{m/s}^2$.
- 15) Μια ομογενής κυλινδρική ράβδος μήκους $\ell=4\text{m}$ και μάζας 12kg μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από σημείο O, που απέχει απόσταση 3m από το άκρο της A. Ασκούμε στη ράβδο μια σταθερού μέτρου οριζόντια δύναμη $F=10\text{N}$ με διεύθυνση κάθετη στη ράβδο, για $t=0$. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα, ο οποίος διέρχεται από το μέσον της, δίνεται από τη σχέση $I=\frac{1}{12}m\ell^2$, και



- $g=10\text{m/s}^2$ ζητούνται:
- Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
 - Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά η ράβδος.
 - Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που έχει εκτελέσει 10 περιστροφές.
- 16) Κυκλικός δακτύλιος μάζας $m=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα κάθετο στο επίπεδο του που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{ rad/s}$. Στο δακτύλιο ασκείται σταθερού μέτρου δύναμη F που είναι συνεχώς εφαπτομένη στην περιφέρεια του δακτυλίου. Έτσι η γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου σε συνάρτηση του χρόνου φαίνεται στο σχήμα.



- Να υπολογιστούν:
 - ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{ s}$.
 - το μέτρο της δύναμης.
 - τη γωνιακή μετατόπιση του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως $t=10\text{ s}$.
 - ο αριθμός των στροφών του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως t .
- Αν η δύναμη αλλάξει φορά να υπολογιστούν:
 - ο χρόνος που ο δακτύλιος σταματάει.

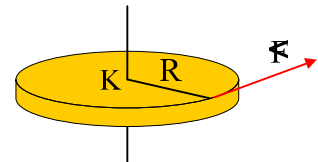
β. ο αριθμός των στροφών του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή t_0
 $= 0$ μέχρι που σταματάει.

iii) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:
 α. της γωνιακής ταχύτητας.

β. της γωνιακής επιτάχυνσης.

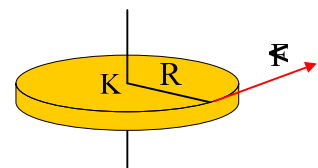
γ. της ροπής που ασκείται στον δακτύλιο.

17) Ένας δίσκος μάζας M και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου, με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 60\text{rad/s}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ασκούμε στο δίσκο δύναμη F σταθερού μέτρου $F=10\text{N}$, η οποία εφάπτεται συνεχώς στην περιφέρεια του δίσκου, με αποτέλεσμα ο δίσκος να σταματήσει στιγμιαία τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$. Να υπολογίσετε:



- i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.
- ii) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$.
- iii) Τη γωνία κατά την οποία στρέφεται ο δίσκος στο παραπάνω χρονικό διάστημα.
- iv) Τον αντίστοιχο αριθμό περιστροφών του δίσκου.
- v) Τη ροπή αδράνειας του δίσκου.
- vi) Να γίνει η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=15\text{s}$.

18) Ένας δίσκος μάζας M και ακτίνας R έχει ροπή αδράνειας $I=2\cdot g\cdot\text{m}^2$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ο δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 5\text{rad/s}$. Τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{s}$ ασκούμε στο δίσκο δύναμη F σταθερού μέτρου $F=10\text{N}$, η οποία εφάπτεται συνεχώς στην περιφέρεια του δίσκου, με αποτέλεσμα ο δίσκος τη χρονική στιγμή $t_1=15\text{s}$ αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega=45\text{rad/s}$. Να υπολογιστούν:



- i) Η ακτίνα και η μάζα του δίσκου.
- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$.
- iii) Η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή t_0 έως τη στιγμή $t=15\text{s}$.

iv) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:

- α) της γωνιακή επιτάχυνσης,
- β) της γωνιακής ταχύτητας και
- γ) της γωνίας στροφής του δίσκου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου $I = \frac{1}{2} MR^2$.

19) Κυκλικός δίσκος μάζας $M=2\cdot g$ και ακτίνας $R=0,4m$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και ηρεμεί. Για $t=0$ ασκούνται στο δίσκο δύο δυνάμεις F_1 και F_2 που έχουν σταθερά μέτρα και εφάπτονται συνεχώς της περιφέρειας του δίσκου, με αποτέλεσμα ο δίσκος να αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}=5\text{rad/s}^2$. Τη χρονική στιγμή $t_1=10s$ καταργείται η δύναμη F_1 οπότε ο δίσκος σταματά τη χρονική στιγμή $t_2=25s$. Να υπολογίσετε:

- i) Τα μέτρα των δυνάμεων F_1 και F_2 .
- ii) Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο δίσκος.
- iii) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t=20s$.
- iv) Τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου από $t=0$ μέχρι τη στιγμή $t=25s$.

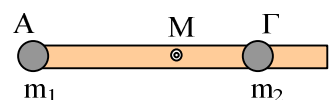
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου $I = \frac{1}{2} MR^2$.

20) Κυκλικός τροχός μάζας $20\cdot g$ και ακτίνας $0,5m$ έχει την μάζα του συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του και στρέφεται γύρω από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα 100rad/s . Με την βοήθεια οριζόντιας ράβδου, ασκούμε στην περιφέρεια του τροχού κάθετη δύναμη $F=100N$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ ράβδου και τροχού είναι $0,1$.

- i) Μετά πόσο χρόνο από την εφαρμογή του "φρένου" θα σταματήσει ο τροχός;
- ii) Πόσες περιστροφές θα κάνει ο τροχός;

21) Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=4m$ μάζας 10 kg μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσον της M και ισορροπεί οριζόντια όταν πάνω της δεθούν 2 άλλες μάζες $m_1=2\text{kg}$ και m_2 , σε απόσταση $MA=2m$ και $M\Gamma=1m$ όπως στο σχήμα.

- i) Πόση είναι η μάζα m_2 ;



- ii) Αν κρατώντας οριζόντια την ράβδο μετακινήσουμε την m_2 ώστε $M\Gamma=2m$ και μετά αφήσουμε το σύστημα να κινηθεί, ποια η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει αμέσως μόλις αφεθεί;

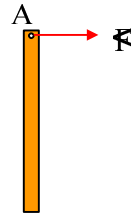
Για την ράβδο η ροπή αδράνειας ως προς το μέσον M δίνεται από την

$$\text{σχέση } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2. \quad g=10\text{m/s}^2.$$

- 22) Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής σανίδα μάζας 2kg. Σε μια στιγμή στο άκρον της A ασκείται δύναμη $F=2\text{N}$, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την επιτάχυνση που αποκτά το σημείο A για $t=0^+$.

Η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς άξονα που είναι κάθετος σε

$$\text{αυτήν και περνάει από το μέσον της } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

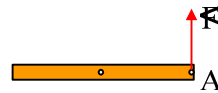


- 23) Μια ομογενής σανίδα μήκους $\ell = 6\text{m}$ και μάζας $m=2\text{g}$ αφήνεται για $t=0$ από οριζόντια θέση να κινηθεί, ενώ μέσω νήματος ασκείται πάνω της κατακόρυφη δύναμη $F=10\text{N}$, όπως στο σχήμα. Να βρεθούν για τη χρονική στιγμή $t=0^+$:

- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σανίδας.
- Η γωνιακή της επιτάχυνση.
- Η επιτάχυνση του σημείου A.

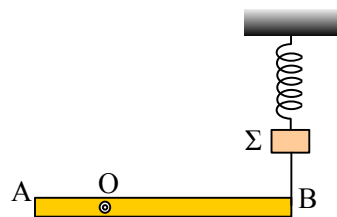
Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και για τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς

$$\text{άξονα που διέρχεται από το μέσον της } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2.$$



- 24) Η ομογενής ράβδος AB έχει μήκος $\ell=4\text{m}$ και μάζα $M=6\text{kg}$, μπορεί δε να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο O, όπου $(AO)=1\text{m}$ και ισορροπεί οριζόντια όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ έχει μάζα 1kg και το ελατήριο έχει σταθερά $k=100\text{N/m}$.

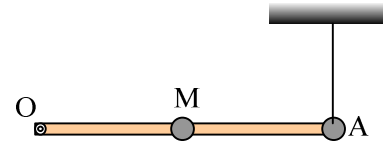
- Βρείτε την δύναμη που δέχεται η ράβδος από το νήμα.
- Σε μια στιγμή $t=0$ κόβουμε το νήμα που συνδέει τη ράβδο με το σώμα Σ.
 - Πόση γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει η ράβδος αμέσως μετά;
 - Βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, $y=f(t)$, για την ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα Σ, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω.



Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και για τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς

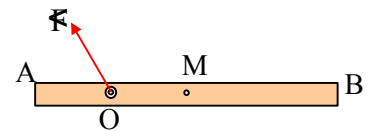
άξονα που διέρχεται από το μέσον της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m\ell^2$.

- 25) Αβαρής ράβδος μήκους 1m μπορεί να στρέφεται γύρω από το ένα της άκρο O, ενώ από το άλλο δένεται με κατακόρυφο νήμα και ισορροπεί οριζόντια, όπως στο σχήμα. Στην ράβδο δένονται 2 σώματα με μάζα 1kg το καθένα, το ένα στο μέσο M και το άλλο στο άκρο A.



- Ποια η τάση του νήματος.
- Ποια γωνιακή ταχύτητα θα αποκτήσει το σύστημα, αμέσως μόλις κοπεί το νήμα. $g=10\text{m/s}^2$.

- 26) Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=2\text{m}$ και μάζας $m=10\text{g}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το σημείο O, όπου $(AO)=0,5\text{m}$. Αφήνουμε την ράβδο από μια ορισμένη θέση, οπότε τη στιγμή που γίνεται οριζόντια, όπως στο σχήμα, έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega=3\text{rad/s}$. Για την θέση αυτή ζητούνται:

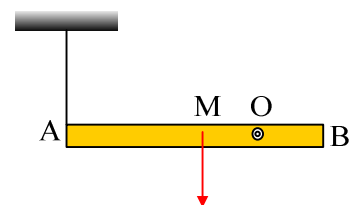


- Η ταχύτητα του μέσου M της ράβδου.
- Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
- Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του μέσου M της ράβδου.
- Η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης $>F$ που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- 27) Η ομογενής δοκός AB μήκους 4m και μάζας 3g, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο O, όπου $(OB)=1\text{m}$. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι δεμένο στο άκρο A.

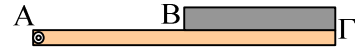


- Βρείτε την τάση του νήματος και την δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής στο σημείο O.
- Σε μια στιγμή $t=0$, κόβουμε το νήμα. Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει η δοκός και πόση δύναμη δέχεται από τον άξονα περιστροφής για $t=0$;

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m \ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

28) Δίνεται ένα δοκάρι ΑΓ μήκους 2m και μάζας $3 \cdot g$, πάνω στο οποίο έχουμε καρφώσει ένα μικρότερο δοκάρι μήκους 1m και μάζας $3 \cdot g$, όπως στο σχήμα. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται γύρω από το άκρο Α και αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση.

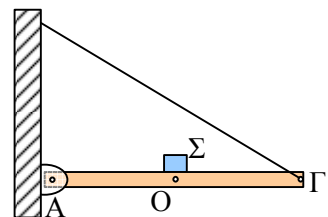


- Υπολογίστε την ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής.
- Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά το σύστημα;
- Πόση θα ήταν η ροπή αδράνειας του συστήματος αν ο άξονας περιστροφής περνούσε από το άκρο Γ;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σε αυτή

δίνεται από τη σχέση: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2$.

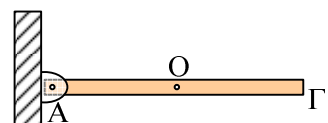
29) Η ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα $M = 3 \text{ kg}$, μήκος $\ell = 4 \text{ m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο Α και ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια νήματος, το οποίο σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\theta = 30^\circ$. Στο μέσον Ο της ράβδου τοποθετούμε ένα μικρό σώμα Σ μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$.



- Να υπολογίσετε την τάση του νήματος
- Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα.
 - Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου αμέσως μετά.
 - Ποια η δύναμη που ασκεί το σώμα Σ στη ράβδο αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος;

Δίνεται για την ράβδο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2$. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

30) Η ομογενής ράβδος του σχήματος, έχει μήκος $\ell = 3 \text{ m}$, είναι αρθρωμένη σε κατακόρυφο τοίχο και συγκρατείται σε οριζόντια θέση. Σε μια στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί. Αμέσως μετά ($t = 0^+$):



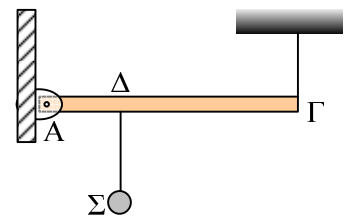
- Βρείτε την επιτάχυνση του άκρου Γ και του μέσου Ο της ράβδου.

- ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης των διαφόρων σημείων της ράβδου, σε συνάρτηση με την απόστασή τους από το άκρο Α.
- iii) Αν στο άκρο Γ είχαμε τοποθετήσει ένα μικρό νόμισμα, τι κίνηση θα πραγματοποιούσε όταν αφήναμε τη ράβδο να κινηθεί;
- iv) Ποια η μέγιστη απόσταση από τον άξονα περιστροφής, στην οποία θα πρέπει να τοποθετηθεί το νόμισμα για να ξεκινήσει την κίνησή του μαζί με τη ράβδο;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο

οποίος διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m \ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 31) Μια ομογενής οριζόντια δοκός ΑΓ μάζας $m = 10 \text{ g}$ και μήκους 6 m είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, ενώ στο άκρο της Γ είναι δεμένη με κατακόρυφο νήμα. Στο σημείο Δ της δοκού, όπου $(A\Delta) = 2 \text{ m}$, έχουμε κρεμάσει με νήμα μια σφαίρα Σ μάζας $m_1 = 6 \text{ g}$, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή κόβεται το νήμα στο άκρο Γ. Για αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να βρεθούν:

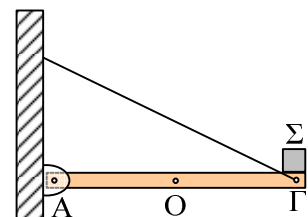


- i) Η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού και
- ii) Η επιτάχυνση της σφαίρας Σ.
- iii) Αν $(A\Delta) = 5 \text{ m}$ ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις σας;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα ο

οποίος διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m \ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

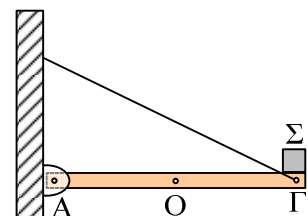
- 32) Η ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα $M = 3 \text{ kg}$ και μήκος $\ell = 4 \text{ m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο Α και ισορροπεί σε οριζόντιο θέση με τη βοήθεια νήματος. Στο άκρο Γ έχουμε τοποθετήσει ένα υλικό σημείο Σ, μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα.



- i) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ θα χάσει της επαφή με τη σανίδα.
- ii) Βρείτε την αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Δίνεται για την ράβδο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2$. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 33) Η ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα m και μήκος ℓ και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο Α και



ισορροπεί σε οριζόντιο θέση με τη βοήθεια νήματος. Στο άκρο Γ έχουμε τοποθετήσει ένα νόμισμα. Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.

- i) Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο στο άκρο Α είναι κατακόρυφη.
- ii) Η ροπή της δύναμης που ασκείται στο Α, ως προς το άκρο Γ είναι

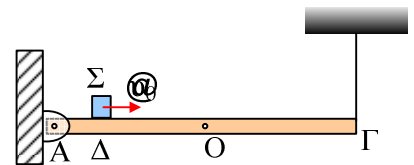
$$\text{ίση με } \tau = - \frac{mg\ell}{2}.$$

- iii) Αν για $t=0$, κόψουμε το νήμα, τότε:

- a) Το νόμισμα θα χάσει την επαφή με την δοκό.
- b) Η δοκός θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}$ για $t=0$.

$$\text{Για την ράβδο } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m\ell^2.$$

34) Μια ομογενής οριζόντια δοκός ΑΓ μάζας $m_1=10\text{kg}$ και μήκους 6m είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, ενώ στο άκρο της Γ είναι δεμένη με κατακόρυφο νήμα, το όριο θραύσεως του οποίου είναι $T_{\theta\rho}=100\text{N}$. Πάνω στη δοκό ολισθαίνει ένα σώμα Σ, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, μάζας $m_2=6\text{kg}$ και για $t=0$ περνά από το σημείο Δ, όπου $(A\Delta)=1\text{m}$ με ταχύτητα $v_0=7\text{m/s}$, όπως στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ και της δοκού είναι $\mu=0,6$, να βρείτε:



- i) Για $t=0$, να βρεθούν:
 - a) Η τάση του νήματος.
 - b) Η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο άκρο της Α.
- ii) Ποια χρονική στιγμή θα κοπεί το νήμα;
- iii) Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ αμέσως μόλις κοπεί το νήμα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

35) Δύο ομογενείς δοκοί Δ_1 και Δ_2 του ίδιου μήκους $\ell=3,5\text{m}$ και μάζες m και $2m$ αντίστοιχα, είναι κολλημένες στο ένα τους άκρο, οπότε δημιουργείται μια νέα ράβδος, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α. Φέρνουμε το

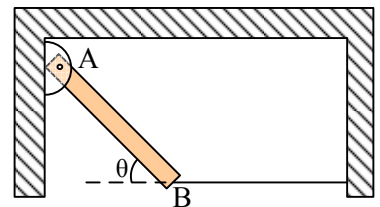


σύστημα σε οριζόντια θέση και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Αν η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος προς αυτήν δίνεται από την εξίσωση $I =$

$$\frac{1}{12} m \ell^2, \text{ ενώ } g = 10 \text{ m/s}^2:$$

- i) Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της, σε συνάρτηση με τη μάζα m και το μήκος : της δοκού Δ_1 .
- ii) Βρείτε την αρχική γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά το σύστημα.
- iii) Ποια η αρχική επιτάχυνση του άκρου B της δοκού Δ_2 ;

36) Μια ομογενής δοκός μήκους 4m και μάζας 30·g ισορροπεί όπως στο σχήμα, όπου το άκρο A αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άλλο της άκρο B δένεται μέσω οριζόντιου νήματος σε άλλον τοίχο. Η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον ορίζοντα έχει $\eta\mu\theta = 0,6$

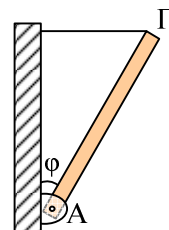


- i) Βρείτε την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η δοκός στο σημείο A από την άρθρωση.
- ii) Αν σε μια στιγμή κόψουμε το νήμα, τότε αμέσως μετά:
 - a) Πόση η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά η δοκός;
 - b) Βρείτε την αρχική επιτάχυνση του σημείου B και σχεδιάστε την στο σχήμα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο σ' αυτήν

$$\text{άξονα που διέρχεται από το μέσον της } I = \frac{1}{12} m \ell^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

37) Μια ομογενής ράβδος μήκους : και μάζας $m = 0,8 \cdot g$ είναι αρθρωμένη στο άκρο της A, ενώ ισορροπεί όπως στο σχήμα, όταν το άλλο της άκρο Γ, συνδέεται μέσω οριζόντιου νήματος με τον κατακόρυφο τοίχο. Η γωνία φ που σχηματίζει η ράβδος με τον τοίχο, έχει $\eta\mu\varphi = 0,6$.



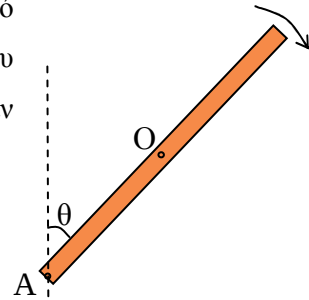
- i) Ποια η οριζόντια και ποια η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο σημείο A;
- ii) Σε μια στιγμή κόβεται το νήμα. Για τη στιγμή αυτή, αμέσως μετά, να βρεθούν:
 - a) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της ράβδου,
 - b) Η επιτάχυνση του σημείου Γ;

$$\text{Για την ράβδο } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

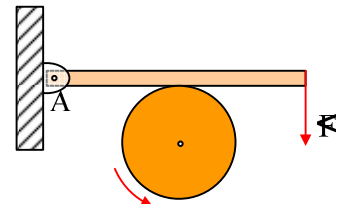
- 38) Μια ομογενής ράβδος μήκους 1m στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα της άκρο Α. Τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, όπου $\sin\theta=0,8$, δεν δέχεται δύναμη από τον άξονα περιστροφής.

Ζητούνται για τη θέση αυτή:

- Η επιτάχυνση του μέσου Ο της ράβδου
- Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής,
- Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

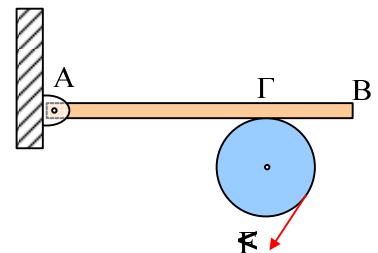


- 39) Ένας κύλινδρος μάζας $M=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$ στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του, χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Προκειμένου να σταματήσουμε τον κύλινδρο εφαρμόζουμε φρένο μέσω αβαρούς ράβδου μήκους $\ell=1\text{m}$. Ο κύλινδρος ακουμπά στο μέσον της ράβδου. Στο άκρο της ράβδου εφαρμόζουμε κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F=20\text{N}$ και ο τροχός σταματάει σε χρόνο $t=10\text{s}$. Να υπολογίσετε:



- Η κατακόρυφη δύναμη N που ασκείται στον κύλινδρο από τη ράβδο.
- Η δύναμη της τριβής μεταξύ κυλίνδρου και ράβδου, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τους είναι $\mu=0,2$.
- Την δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση.
- Η αρχική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου ω_0 .
- Ο αριθμός των περιστροφών του κυλίνδρου μέχρι να σταματήσει. Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

- 40) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος : και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε κύλινδρο ακτίνας $R=1\text{m}$ και μάζας 20kg , ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος συμπίπτει με τον άξονά του, στο σημείο Γ, όπου $(AG) = \frac{3}{4} \ell$, ενώ το άλλο του άκρο έχει αρθρωθεί σε κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου είναι $\mu=0,25$ ενώ αρχικά ο κύλινδρος ηρεμεί. Για $t=0$ ασκούμε εφαπτομενικά στον κύλινδρο δύναμη σταθερού μέτρου $F=20\text{N}$, όπως στο σχήμα, οπότε σε χρόνο 4s ο κύλινδρος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega=6\text{rad/s}$.



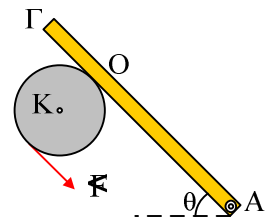
Ζητούνται:

- Η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο κατά την περιστροφή του;
- Η μάζα της ράβδου.

iii) Η δύναμη που ασκείται στην ράβδο από την άρθρωση.

Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

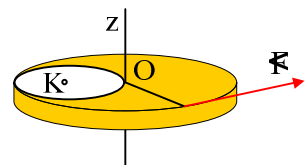
- 41) Η ράβδος ΑΓ του σχήματος μάζας 3 kg και μήκους ℓ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, στηρίζεται δε σε κύλινδρο στο σημείο Ο, όπου $(OA) = \frac{3}{4}\ell$, σχηματίζοντας γωνία $\theta = 60^\circ$ με τον ορίζοντα. Ο κύλινδρος έχει μάζα 4 kg , ακτίνα $R = 0,5 \text{ m}$ και ηρεμεί.



- i) Βρείτε τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον κύλινδρο στο σημείο Ο;
- ii) Πόση δύναμη δέχεται η ράβδος από τον κύλινδρο στο σημείο Ο;
- iii) Για $t = 0$ ασκούμε στον κύλινδρο εφαπτομενικά μια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 6 \text{ N}$, όπως στο σχήμα.
 - a) Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
 - b) Ποια η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου για $t = 10 \text{ s}$;
- iv) Αν για $t = 10 \text{ s}$ σταματήσει να ασκείται η δύναμη F στον κύλινδρο, σε πόσο χρόνο θα σταματήσει η περιστροφή του;

Δίνονται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου $\mu = 0,5$, ο κύλινδρος μπορεί να στρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονά του, για τον οποίο $I = \frac{1}{2} m R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

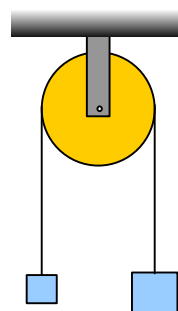
- 42) Δίνεται ένας ομογενής δίσκος μάζας 8 kg και ακτίνας $R = 1 \text{ m}$. Ο δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Για $t = 0$ ασκούμε πάνω του εφαπτομενικά μια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 15 \text{ N}$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ αποσπάται από τον δίσκο ένας μικρότερος δίσκος κέντρου Κ και ακτίνας $R_1 = 0,5 \text{ m}$, όπως στο σχήμα. Ζητούνται:



- i) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου για $t_1 = 4 \text{ s}$.
- ii) Η γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_2 = 7 \text{ s}$.
- iii) Πόσες περιστροφές έχει πραγματοποιήσει ο δίσκος μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 ;

Δίνεται η ροπή ενός δίσκου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} m R^2$.

- 43) Στο αυλάκι της ακίνητης τροχαλίας μάζας $M = 4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ έχει τυλιχθεί αβαρές νήμα όπου στα δύο άκρα του έχουν δεθεί δύο σώματα με αντίστοιχες μάζες $m_2 = 2m_1$ όπως στο σχήμα. Αρχικά



τα κέντρα μάζας των δύο σωμάτων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και το νήμα είναι τεντωμένο. Αφήνουμε το σύστημα των σωμάτων ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ οπότε μετά από ορισμένο χρόνο που τα σώματα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $h = 50 \text{ cm}$, η τροχαλία έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 \text{ rad/s}$.

Να υπολογίσετε:

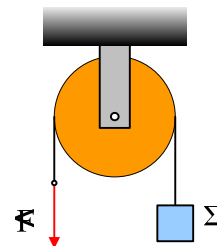
- το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.
- το μέτρο της επιτάχυνσης που κινούνται τα σώματα.
- το μέτρο της δύναμης που τείνεται κάθε τμήμα του νήματος.
- η μάζα κάθε σώματος.
- το μέτρο της δύναμης που ασκείται από τον άξονα περιστροφής στην τροχαλία.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{2} MR^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 44) Το σώμα Σ του διπλανού σχήματος έχει μάζα 5 kg και δένεται με αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου ασκούμε για $t=0$, μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη $F=64 \text{ N}$, αφού προηγουμένως περάσει από μια τροχαλία. Το νήμα δεν γλιστράει στην τροχαλία. Αν η τροχαλία έχει μάζα 4 kg και ακτίνα $R=0,4 \text{ m}$, ζητούνται:

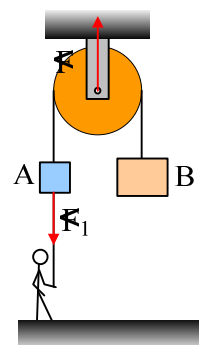
- Η επιτάχυνση του σώματος.
- Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- Η γωνία που έχει περιστραφεί η τροχαλία μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=4 \text{ s}$.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10 \text{ m/s}^2$.



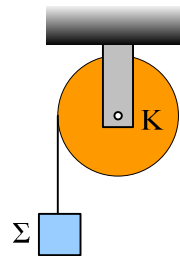
- 45) Στο διπλανό σχήμα η τροχαλία έχει μάζα $M=10 \text{ kg}$, ενώ τα σώματα A και B έχουν μάζες $m_1=5 \text{ kg}$ και $m_2=15 \text{ kg}$ και το νήμα είναι αβαρές. Το σύστημα ισορροπεί.

- Πόση δύναμη F_1 ασκεί ο άνθρωπος μέσω νήματος στο σώμα A και πόση δύναμη F ασκείται στον άξονα της τροχαλίας;
- Σε μια στιγμή ο άνθρωπος αφήνει το νήμα και το σύστημα κινείται.
 - Πόση επιτάχυνση αποκτούν τα σώματα A και B;
 - Μετά από πόσο χρόνο τα σώματα A και B θα απέχουν $d=4 \text{ m}$;
 - Πόση είναι τώρα η δύναμη F που ασκείται στον άξονα της τροχαλίας;



Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

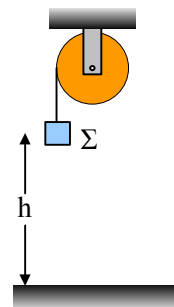
- 46) Στην τροχαλία του σχήματος ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$, τυλίγεται αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου δένεται σώμα Σ μάζας $m = 1 \text{ kg}$. Η τροχαλία μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο της K . Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο, οπότε αποκτά ταχύτητα 4 m/s σε χρονικό διάστημα $t = 2 \text{ s}$.



- Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ και την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- Βρείτε την τάση του νήματος.
- Πόση είναι η κινητική ενέργεια της τροχαλίας την παραπάνω χρονική στιγμή;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

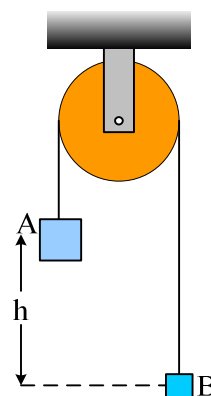
- 47) Γύρω από μια τροχαλία ακτίνας $R = 0,5 \text{ m}$, δένεται ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένεται ένα σώμα Σ μάζας 1 kg , το οποίο για $t = 0$ αφήνεται να κινηθεί από ύψος $h = 5 \text{ m}$ από το έδαφος, όπως στο σχήμα. Το σώμα φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$.



- Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος Σ είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του.
- Πόση είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της;
- Πόση είναι τελικά η κινητική ενέργεια της τροχαλίας;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 48) Στο αυλάκι της τροχαλίας του διπλανού σχήματος έχει τυλιχθεί ένα αβαρές νήμα στα άκρα του οποίου έχουμε κρεμάσει δύο σώματα A και B με μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$ αντίστοιχα. Τα δύο σώματα συγκρατούνται ώστε να απέχουν κατακόρυφη απόσταση $h = 5 \text{ m}$. Σε μια στιγμή αφήνουμε τα σώματα να κινηθούν, οπότε μέχρι να απέχουν ξανά κατακόρυφα 5 m μεταξύ τους, η τροχαλία έχει κάνει $N = 40/\pi$ στροφές έχοντας αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 80 \text{ rad/s}$.



Να υπολογιστούν:

- Η επιτάχυνση κάθε σώματος.
- Η τάση κάθε νήματος.
- Η ακτίνα της τροχαλίας.
- Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

v) Η μάζα της τροχαλίας.

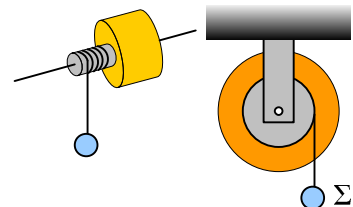
vi) Η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα.

Δίνεται ότι η τροχαλία στρέφεται χωρίς τριβές, το νήμα δεν γλιστράει στο αυλάκι της, ενώ $I = \frac{1}{2} MR^2$.

49) Το ομοαξονικό σύστημα των κυλίνδρων του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα. Ο μικρός κύλινδρος έχει μάζα 2kg και ακτίνα $r=0,1\text{m}$, ενώ ο μεγάλος έχει ακτίνα $R=0,2\text{m}$. Το σώμα Σ έχει μάζα $m=2\cdot g$, είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του μικρού κυλίνδρου. Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο, οπότε διανύει απόσταση $d=4\text{m}$ σε χρονικό διάστημα $t=2\text{s}$. Να βρείτε:

- Την τάση του νήματος,
- τη γωνιακή επιτάχυνση των κυλίνδρων,
- τη μάζα M του μεγάλου κυλίνδρου.

Δίνονται η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

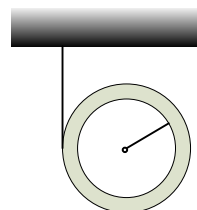


50) Στην περιφέρεια ενός σωλήνα με λεπτά τοιχώματα, ακτίνας $R=0,2\text{m}$, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο. Για $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο τον σωλήνα να πέσει κατακόρυφα, ενώ ο άξονάς του διατηρείται συνεχώς οριζόντιος.

Να βρείτε:

- την γωνιακή του επιτάχυνση,
- τη γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$,
- πόσο έχει κατέβει ο σωλήνας στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

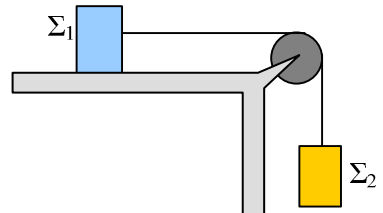
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



51) Το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες $m_1=m_2=2\text{kg}$ συνδέονται με αβαρές νήμα το οποίο διέρχεται από το αυλάκι ομογενούς τροχαλίας μάζας $m_3=1\text{kg}$ και ακτίνας R , όπως στο σχήμα. Το σύστημα είναι ακίνητο και τα νήματα τεντωμένα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ_2 .

- Αν σε χρόνο $\Delta t=3\text{s}$ η τροχαλία περιστρέφεται κατά γωνία $\theta=27\text{rad}$, ενώ μεταξύ του σώματος Σ_1 και του οριζοντίου επιπέδου δεν υπάρχει τριβή, να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της επιτάχυνσης κάθε σώματος.



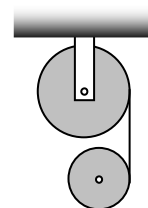
- b) Τα μέτρα των δυνάμεων που τείνονται τα δύο νήματα.
 c) Την ακτίνα της τροχαλίας.
 ii) Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ_1 και του οριζοντίου επιπέδου είναι $\mu=0,5$ πόση η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2} MR^2$.

- 52) Η μεγάλη τροχαλία του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M=3\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και κρέμεται από σταθερό σημείο. Η μικρή τροχαλία έχει μάζα $m=1\text{kg}$ και ακτίνα $r=0,1\text{m}$ και για $t=0$ αφήνεται και πέφτει κατακόρυφα καθώς το αβαρές νήμα ξετυλίγεται και από τις δύο τροχαλίες. Να βρεθούν:

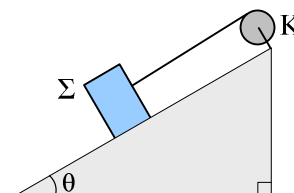
- i) Οι γωνιακές επιταχύνσεις των δύο τροχαλιών,
 ii) η τάση του νήματος και
 iii) η ταχύτητα της μικρής τροχαλίας την χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$.

Οι τροχαλίες θεωρούνται κυλινδρικά σώματα με $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

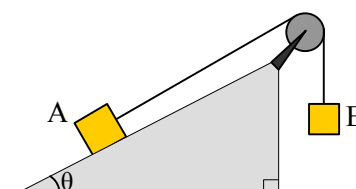


- 53) Ένα σώμα Σ μάζας 10kg είναι δεμένο σε νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω από ένα τροχό ακτίνας 10cm , όπως στο σχήμα. Αφήνοντας το Σ να κινηθεί, αποκτά επιτάχυνση 2m/s^2 , σε λείο κεκλιμένο επίπεδο με κλίση $\theta=30^\circ$. Αν ο τροχός στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του K , χωρίς τριβές:

- i) Ποια η τάση του νήματος.
 ii) Ποια η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και ποια η αιτία που αποκτά ο τροχός γωνιακή επιτάχυνση; Ποια η ροπή αδράνειας του τροχού;
 iii) Ποια η κινητική ενέργεια του τροχού 2s μετά την στιγμή που αφέθηκε να κινηθεί το σώμα Σ ; $g=10\text{m/s}^2$.



- 54) Στη διάταξη του διπλανού σχήματος τα σώματα A και B με μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ αντίστοιχα, είναι δεμένα στα άκρα αβαρούς νήματος, που περνάει από το αυλάκι τροχαλίας μάζας $M=6\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,4\text{m}$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά της που περνά από το κέντρο της. Αρχικά το σύστημα ηρεμεί. Σε μια στιγμή αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί. Αν η κλίση του



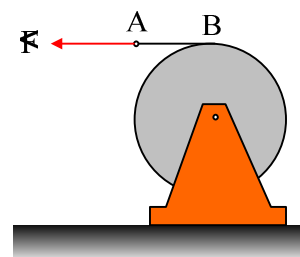
επίπεδο είναι $\theta=30^\circ$, $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2} MR^2$:

- i) Αν το επίπεδο είναι λείο να βρεθούν:
 - a) Η επιτάχυνση κάθε σώματος.
 - b) Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- ii) Αν σε απόσταση $x=1\text{m}$ από την αρχική θέση του σώματος A το επίπεδο γίνεται τραχύ, με αποτέλεσμα μεταξύ του σώματος A και του επιπέδου ο συντελεστής τριβής ολίσθησης να είναι $\mu=0,8$, να υπολογίσετε:
 - a) Το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης της τροχαλίας.
 - b) Το χρόνο που το σύστημα σταματά.
 - c) Τον αριθμό των περιστροφών της τροχαλίας.

55) Ο τροχός του σχήματος έχει μάζα $m=4\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του K. Ο άξονας στηρίζεται σε βάση, η οποία είναι τοποθετημένη σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Η βάση μαζί με τον άξονα και τα στηρίγματα έχουν μάζα $M=6\text{ kg}$. Γύρω από τον τροχό είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου το τραβάμε με σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=30\text{N}$, για $t=0$. Να βρείτε:

- i) Την επιτάχυνση a της βάσης.
- ii) Την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- iii) Την ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή $t=5\text{s}$
- iv) Την επιτάχυνση του σημείου A, εφαρμογής της δύναμης F.

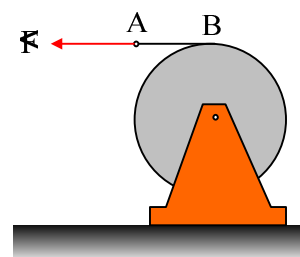
Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.



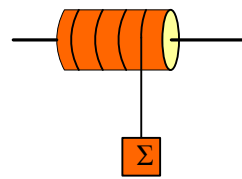
56) Ο τροχός του σχήματος έχει μάζα $m=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του K. Ο άξονας στηρίζεται σε βάση, η οποία είναι τοποθετημένη σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η βάση μαζί με τον άξονα και τα στηρίγματα έχουν μάζα $M=9\text{kg}$. Γύρω από τον τροχό είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου το τραβάμε με σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=40\text{N}$. Να βρείτε:

- i) Την επιτάχυνση a της βάσης.
- ii) Την επιτάχυνση του σημείου A, εφαρμογής της δύναμης F.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$.



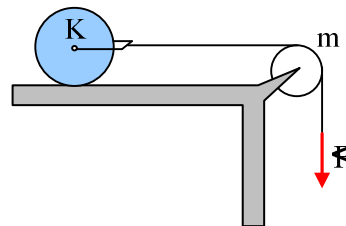
57) Γύρω από κύλινδρο μάζας $M=3\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$, ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα Σ μάζας $m=1\text{kg}$, το οποίο για $t=0$ αφήνουμε να πέσει. Για τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$, να βρεθούν:



- i) Η επιτάχυνση του σώματος Σ . Πώς επηρεάζεται η τιμή της από την ακτίνα του κυλίνδρου;
- ii) Η ταχύτητα και η απόσταση που έχει διανύσει το σώμα Σ .
- iii) Η γωνιακή επιτάχυνση και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
- iv) Η γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί ο κύλινδρος.
- v) Η μείωση της δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ .
- vi) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος Σ και του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 ;

Για τον κύλινδρο: $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ $g=10\text{m/s}^2$.

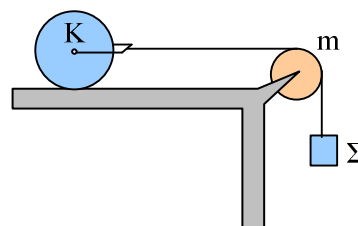
58) Στο αυλάκι της τροχαλίας του σχήματος, μάζας $m=2\text{kg}$ και ακτίνας $r=0,1\text{m}$, περνά ένα αβαρές σχοινί, που στο ένα του άκρο του είναι δεμένο το κέντρο K του τροχού ακτίνας $R=0,3\text{m}$ και μάζας $M=4\text{kg}$ και στο άλλο ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη $F=30\text{N}$. Το σχοινί δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας και ο τροχός κυλίζει στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.



- i) Αν το σημείο εφαρμογής της δύναμης F κατέβει κατά dx :
 - a) Πόσο θα μετακινηθεί ο τροχός;
 - b) Κατά ποια γωνία θα περιστραφεί η τροχαλία και κατά ποια ο τροχός;
- ii) Ποια η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας,
- iii) Ποια η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και ποια η επιτάχυνση του κέντρου του τροχού;
- iv) Όταν ο τροχός έχει ολοκληρώσει δύο περιστροφές, πόσες περιστροφές έχει πραγματοποιήσει η τροχαλία;

Δίνονται για την τροχαλία $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m r^2$, για τον τροχό $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

59) Στο αυλάκι της τροχαλίας του σχήματος, μάζας $m=2\text{g}$ και ακτίνας $r=0,1\text{m}$, περνά ένα αβαρές σχοινί, που στο ένα του άκρο του είναι δεμένο ένα σώμα Σ μάζας $m_1=3\text{kg}$ και στο άλλο το κέντρο K του τροχού ακτίνας $R=0,3\text{m}$ και μάζας $M=4\text{kg}$. Αν το σχοινί δεν γλιστρά



στο αυλάκι της τροχαλίας και ο τροχός κυλιέται στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει, να βρείτε:

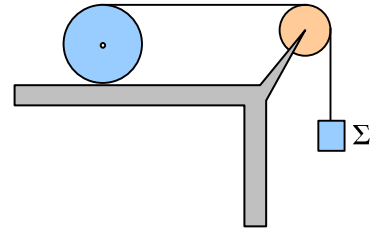
- Την επιτάχυνση του σώματος Σ ,
- τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας,
- τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

Δίνονται για την τροχαλία $I_{cm} = \frac{1}{2} m r^2$, για τον τροχό $I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

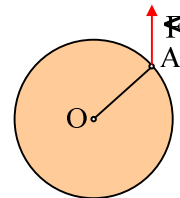
60) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο, μάζας $m = 4 \text{ kg}$, είναι τυλιγμένο ένα αβαρές νήμα, το οποίο περνά από τροχαλία και έχει δεμένο στο άλλο άκρο του ένα σώμα Σ , μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$. Αν η μάζα της τροχαλίας είναι αμελητέα και όταν αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο, να βρείτε:

- Την επιτάχυνση του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου και να αποδείξετε ότι το σώμα Σ έχει διπλάσια επιτάχυνση από τον άξονα περιστροφής.
- Την τάση του νήματος
- Τις τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου για τις οποίες δεν έχουμε ολίσθηση.

Για τον κύλινδρο $I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.



61) Ο κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα $m = 20 \text{ kg}$, ακτίνα $R = 0,4 \text{ m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονά συμμετρίας του, που περνά από το κέντρο O της βάσης του. Σε μια στιγμή δέχεται κατακόρυφη δύναμη $F = 10 \text{ N}$ σε σημείο A της περιφέρειάς του, όπου η ακτίνα OA σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με τον ορίζοντα. Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

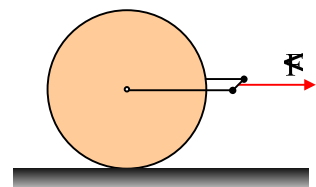


Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις για την θέση αυτή:

- Η ροπή της F ως προς τον άξονα του κυλίνδρου είναι ίση με $2 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- Ο κύλινδρος θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\upsilon} = 1,25 \text{ rad/s}^2$.
- Η κατακόρυφη δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από τον άξονα είναι ίση με 200 N .

Η ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο A είναι ίση με μηδέν.
 $g = 10 \text{ m/s}^2$.

62) Ένας κύλινδρος μάζας 10 kg και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή ασκείται πάνω του οριζόντια δύναμη $F = 45 \text{ N}$,

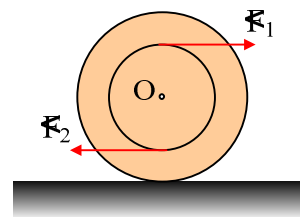


όπως στο σχήμα. Αν ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ζητούνται:

- i) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- ii) Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- iii) Η Τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- iv) Ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου, ώστε να εξασφαλίζεται η παραπάνω κύλιση.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

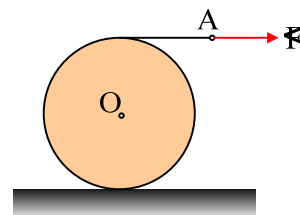
- 63) Ένας τροχός ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή, δέχεται μέσω κατάλληλου μηχανισμού, ένα ζεύγος οριζοντίων σταθερών δυνάμεων με μέτρα $F_1 = F_2 = 30 \text{ N}$, οι οποίες ασκούνται σε σημεία που απέχουν απόσταση $r = R/2$ από το κέντρο του τροχού, οπότε αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Η μάζα του τροχού είναι ίση με 20 kg και η ακτίνα του $R = 0,4 \text{ m}$.



- i) Σχεδιάστε στο σχήμα την ασκούμενη τριβή και δικαιολογήστε την κατεύθυνσή της.
- ii) Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, καθώς και την επιτάχυνση του κέντρου O του τροχού.
- iii) Ποια η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής για να μπορεί να κυλιέται με τον παραπάνω τρόπο ο τροχός;

Δίνεται για τον τροχό, ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

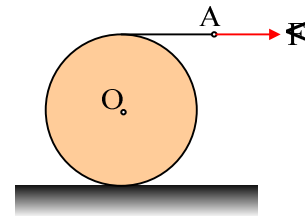
- 64) Γύρω από τον τροχό του σχήματος, μάζας $m = 2 \text{ kg}$, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο A του οποίου, ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 3 \text{ N}$. Αν ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ενώ η ροπή αδράνειάς του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} m R^2$, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.



- i) Ο τροχός θα αποκτήσει μεγαλύτερη επιτάχυνση, από αυτήν που θα αποκτούσε ένα άλλο σώμα, ίσης μάζας, το οποίο θα ολίσθαινε σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση της δύναμης F .
- ii) Ο τροχός αποκτά επιτάχυνση $a_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$.
- iii) Το σημείο A , εφαρμογής της δύναμης F έχει επιτάχυνση 4 m/s^2 .
- iv) Στον τροχό ασκείται στατική τριβή με φορά προς τα δεξιά.

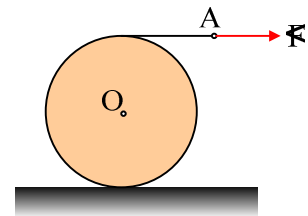
- ν) Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι μεγαλύτερος από 0,05.

65) Γύρω από τον τροχό του σχήματος, μάζας $m=4\text{kg}$, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο A του οποίου, ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη $F=15\text{N}$. Αν ο τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, ενώ η ροπή αδράνειάς του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} mR^2$.



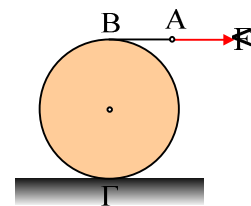
- Βρείτε την επιτάχυνση του κέντρου του τροχού.
- Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής της οριακής στατικής τριβής μεταξύ τροχού και οριζοντίου επιπέδου;
- Ποια η ταχύτητα του τροχού τη στιγμή που το άκρο A του νήματος έχει μετακινηθεί κατά $x_A=20\text{m}$;

66) Ένας κύλινδρος μάζας $m=4\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $F=6\text{N}$, η οποία ασκείται εφαπτομενικά στον κύλινδρο, όπως στο σχήμα. Ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.



- Ποια η επιτάχυνση που αποκτά ο κύλινδρος;
- Να υπολογιστεί το μέτρο της τριβής που ασκείται στον κύλινδρο και να αποδείξετε ότι έχει φορά προς τα δεξιά.
- Πόση είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, όταν έχει κυλήσει κατά απόσταση $d=4\text{m}$;
Για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$.

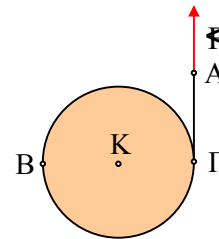
67) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας 40kg και ακτίνας $R=0,5\text{m}$, ο οποίος ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα. Για $t=0$ ασκούμε στο άκρο A του νήματος μια σταθερή οριζόντια δύναμη $F=50\text{N}$. Ζητούνται:



- Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$.
- Η ταχύτητα και η οριζόντια επιτάχυνση των σημείων B και Γ, τη χρονική στιγμή t_1 , όπου το B είναι το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου και το σημείο Γ, το σημείο επαφής με το επίπεδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} mR^2$.

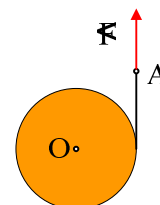
68) Γύρω από έναν κύλινδρο μάζας $m=20\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκούμε στο άκρο του νήματος A μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη $F=100\text{N}$, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε ελεύθερο το κύλινδρο να κινηθεί κατακόρυφα, όπως στο σχήμα. Να βρεθούν:



- i) Η επιτάχυνση του κέντρου K του κυλίνδρου.
- ii) Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- iii) Τη χρονική στιγμή $t_1=4\text{s}$:
 - a) Ποια η ταχύτητα πτώσης του κυλίνδρου;
 - b) Ποια η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου;
 - c) Ποια η κατακόρυφη επιτάχυνση και ποια η ταχύτητα των σημείων B και Γ, τα οποία είναι στα άκρα μιας οριζόντιας διαμέτρου του κυλίνδρου;
 - d) Πόσο έχει ανέβει το άκρο A του νήματος;

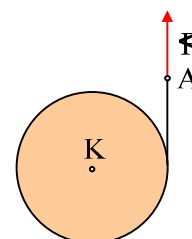
Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων του $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

69) Τυλίγουμε γύρω από ένα κύλινδρο ένα αβαρές νήμα και ασκώντας στο άκρο του A μια κατακόρυφη δύναμη F τον αφήνουμε να κινηθεί. Η μάζα του κυλίνδρου είναι $m=6\text{g}$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του που διέρχεται από το κέντρο της βάσης του O, δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} mR^2$ ενώ $g=10\text{m/s}^2$. Αν το σημείο A κατέβει κατά $y_A=9\text{m}$ σε χρονικό διάστημα $t_1=3\text{s}$ να βρείτε:



- i) Το μέτρο της δύναμης F.
- ii) Πόσο έχει κατέβει ο κύλινδρος στο ίδιο χρονικό διάστημα;
- iii) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου για $t_1=3\text{s}$.

70) Ο κύλινδρος του σχήματος, μάζας $m=1\text{kg}$ και ακτίνας R, έχει τυλιγμένο γύρω του αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο A, του οποίου ασκούμε κατακόρυφη δύναμη F, οπότε το άκρο A αποκτά επιτάχυνση προς τα πάνω $a=2\text{m/s}^2$. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.



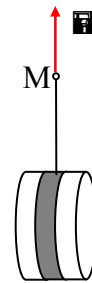
- i) Αν σε χρόνο dt ο κύλινδρος στραφεί κατά $d\theta$, θα ξετυλιχθεί σχοινί μήκους $d\lambda=R \cdot d\theta$.

- ii) Αν σε χρόνο dt το σημείο A ανέβει κατά dy_A , το κέντρο K του κυλίνδρου κατέβει κατά dy_K , θα ισχύει $dy_K = R \cdot d\theta - dy_A$.
- iii) Οι ταχύτητες των σημείων A και K συνδέονται με τη σχέση $v_K = R\omega - v_A$.
- iv) Οι επιταχύνσεις των σημείων A και K συνδέονται με τη σχέση $a_K = R\alpha_{\gamma\omega\gamma} - a_A$ όπου $\alpha_{\gamma\omega\gamma}$ η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- v) Οι επιταχύνσεις των σημείων A και K συνδέονται με τη σχέση:
- vi) $a_A + 3a_K = 2g$
- vii) Η δύναμη F που ασκείται στο σημείο A είναι ίση με $4N$.
- Δίνονται $I_{cm} = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

71) Ο κύλινδρος του σχήματος, μάζας $m = 3 \text{ kg}$ ακτίνας R , έχει τυλιγμένο γύρω του αβαρές σχοινί, το ελεύθερο άκρο του οποίου το τραβάμε προς τα πάνω ασκώντας κατακόρυφη δύναμη F , ενώ ο κύλινδρος μπορεί να κατεβαίνει ή να ανεβαίνει. Να βρείτε την επιτάχυνση a_K του άξονα του κυλίνδρου και την επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής M της δύναμης F , όταν:

- α) $F = 10 \text{ N}$ β) $F = 20 \text{ N}$, γ) $F = 60 \text{ N}$, δ) $F = 120 \text{ N}$

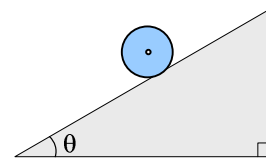
Δίνεται $I = \frac{1}{2} m R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.



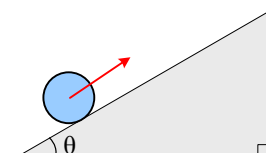
72) Αφήνουμε τον κύλινδρο ακτίνας $R = 0,8 \text{ m}$ του διπλανού σχήματος να κινηθεί κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου, κλίσεως θ , με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή οριακής στατικής τριβής $\mu_s = 0,4$ και συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,3$. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.

- i) Ο κύλινδρος θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους w_x .
- ii) Αν $\theta = 45^\circ$, ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
- iii) Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο κύλινδρος θα πρέπει εφθ $\leq 3\mu_s$.
- iv) Αν για τη γωνία θ ισχύει $\eta\mu\theta = 0,8$, ο κύλινδρος θα αποκτήσει επιτάχυνση κέντρου μάζας $a_{cm} = 6,2 \text{ m/s}^2$ και γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\gamma} = 4,5 \text{ rad/s}^2$.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.



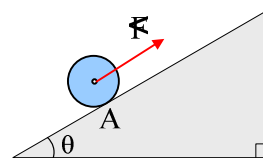
73) Από την βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως θ , όπου $\eta\mu\theta = 0,6$ εκτοξεύεται ένας κύλινδρος με αρχική ταχύτητα $v_0 = 8 \text{ m/s}$ και



γωνιακή ταχύτητα ω_0 , οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Ο κύλινδρος έχει μάζα $m=10\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,4\text{m}$, ενώ η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από την εξίσωση $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- Ποια η αρχική του γωνιακή ταχύτητα;
- Πόσο διάστημα θα διανύσει ο κύλινδρος κατά την άνοδό του, μέχρι να σταματήσει στιγμιαία;
- Πότε δέχεται μεγαλύτερη τριβή ο κύλινδρος, κατά την άνοδο ή την κάθοδο;
- Βρείτε την ταχύτητα του κυλίνδρου τις χρονικές στιγμές $t_1=1\text{s}$ και $t_2=3\text{s}$.

74) Ένας κύλινδρος μάζας $m=10\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$ ηρεμεί στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου, κλίσεως $\theta=30^\circ$ με την επίδραση δύναμης F παράλληλης στο επίπεδο, η οποία ασκείται στον άξονα που συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων, όπως στο σχήμα. Δίνονται οι συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,3$, $g=10\text{m/s}^2$ ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} mR^2$.

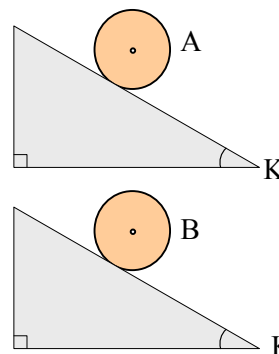


- Βρείτε το μέτρο της δύναμης F και εξηγήστε γιατί δεν ασκείται τριβή στον κύλινδρο.
- Σε μια στιγμή $t=0$ αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F=80\text{N}$, μέχρι τη στιγμή $t_1=5\text{s}$, οπότε η δύναμη F καταργείται.
 - Βρείτε το μέτρο της ασκούμενης τριβής και σχεδιάστε την στο σχήμα για τις χρονικές στιγμές $t_2=3\text{s}$ και $t_3=6\text{s}$.
 - Σε πόση απόσταση από το σημείο Α ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία πριν αρχίζει να κινείται προς τα κάτω, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου;
 - Πόσες περιστροφές έχει εν τω μεταξύ εκτελέσει ο κύλινδρος;

75) Από το ίδιο ύψος δύο όμοιων κεκλιμένων επιπέδων, αφήνονται ταυτόχρονα δύο κύλινδροι να κινηθούν. Ο κύλινδρος Α δεν εμφανίζει τριβή με το επίπεδο, ενώ ο Β εμφανίζει αρκετά μεγάλο συντελεστή τριβής με το δεύτερο επίπεδο και έτσι δεν ολισθαίνει.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες.

- Οι δύο κύλινδροι θα αποκτήσουν την ίδια επιτάχυνση.
- Ο Α κύλινδρος θα φτάσει στην κορυφή Κ του επιπέδου με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτήν του Β κυλίνδρου.

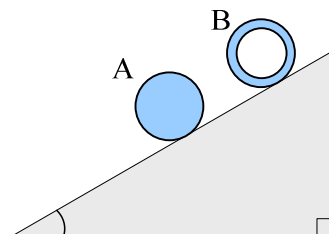


- iii) Εξαιτίας της μεγάλης τριβής που παρουσιάζει ο B κύλινδρος με το επίπεδο, πιθανόν να μην κινηθεί.
- iv) Ο κύλινδρος B θα φτάσει με μικρότερη ταχύτητα στην κορυφή K, επειδή, λόγω τριβής, ένα μέρος της αρχικής δυναμικής ενέργειας, μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.
- v) Για τις ταχύτητες των κέντρων των κυλίνδρων τη στιγμή που φτάνουν στην κορυφή K του κεκλιμένου επιπέδου ισχύει:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{3}{2}$$

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} mR^2$.

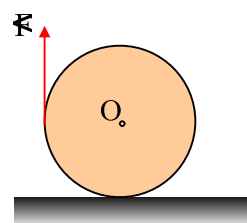
- 76) Σε ένα κεκλιμένο επίπεδο αφήνονται δύο κύλινδροι A και B από το ίδιο υλικό και της ίδιας ακτίνας. Ο A είναι συμπαγής ($I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$), ενώ από τον δεύτερο έχει αφαιρεθεί ένας ομοαξονικός κύλινδρος με αποτέλεσμα η ροπή αδράνειάς του να δίνεται από τη σχέση $I = m \cdot R^2$. Οι κύλινδροι κυλίνουν χωρίς ολίσθηση.



Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.

- i) Μεγαλύτερη ροπή αδράνειας εμφανίζει ο δεύτερος κύλινδρος.
- ii) Ο A κύλινδρος θα αποκτήσει μικρότερη επιτάχυνση.
- iii) Αν μικρύνει η ακτίνα του A κυλίνδρου, θα αυξηθεί η επιτάχυνσή του.
- iv) Μετά από λίγο οι κύλινδροι θα συγκρουστούν.
- v) Αν αυξήσουμε σιγά –σιγά τη γωνία κλίσεως του κεκλιμένου επιπέδου, πρώτος κύλινδρος που θα αρχίσει να ολισθαίνει θα είναι ο A.

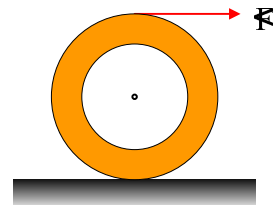
- 77) Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας 4·g ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu_s = \mu = 1/3$. Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα μέσω του οποίου ασκούμε στον κύλινδρο μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη $F = 3N$ όπως στο σχήμα.



- i) Αποδείξτε ότι ο κύλινδρος θα κινηθεί οριζόντια.
- ii) Θεωρώντας ότι ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, βρείτε την επιτάχυνση του άξονά του.

- iii) Αν αυξάνουμε σιγά – σιγά το μέτρο της δύναμης F , ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει χωρίς να ολισθήσει ο κύλινδρος; Ποια είναι τότε η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του κυλίνδρου; Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

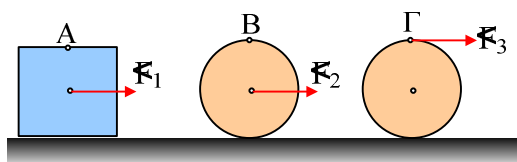
78) Από έναν ομογενή κύλινδρο ακτίνας $R=0,6\text{m}$ και μάζας 18kg αφαιρείται ένα τμήμα του κυλινδρικού σχήματος, με τον ίδιο άξονα και ακτίνας $r=0,4\text{m}$, απομένοντας ένας κυλινδρικός φλοιός. Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=15,5\text{N}$, οπότε αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο.



- Πόση είναι η μάζα του φλοιού;
- Υπολογίστε την ροπή αδράνειας του φλοιού ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- Βρείτε την επιτάχυνση του άξονα.
- Πόση η συνολική κινητική ενέργεια του φλοιού τη χρονική στιγμή $t=5\text{s}$;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων του $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

79) Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν τρία σώματα της ίδιας μάζας M . Το πρώτο είναι ένας κύβος ενώ τα δύο άλλα δύο όμοιοι κύλινδροι της ίδιας ακτίνας R . Σε μια στιγμή $t=0$, ασκούνται πάνω τους τρεις ίσες σταθερές δυνάμεις $F_1=F_2=F_3$, όπως στο σχήμα, όπου οι δύο πρώτες δυνάμεις ασκούνται στα κέντρα των σωμάτων, ενώ η τρίτη ασκείται πάντα στην περιφέρεια του κυλίνδρου.

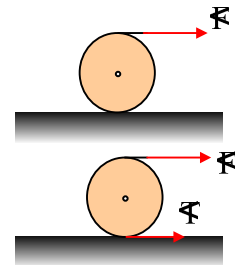


- Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις του κέντρου μάζας των τριών σωμάτων.
- Να συγκρίνετε τις ταχύτητες των σημείων A, B και Γ μετά από χρονικό διάστημα t_1 .
- Για τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{W_{F_1}}{W_{F_2}}$ και $\frac{W_{F_2}}{W_{F_3}}$ όπου W τα αντίστοιχα έργα των δυνάμεων.

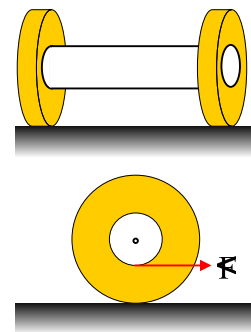
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} mR^2$.

80) Γύρω από δύο όμοιους ομογενείς κυλίνδρους τυλίγουμε αβαρή νήματα. Τοποθετούμε τον πρώτο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και τον δεύτερο σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές. Τραβώντας τα νήματα ασκούμε πάνω τους ίσες δυνάμεις για ίσα χρονικά διαστήματα t_1 , όπως στο σχήμα. Με δεδομένο ότι ο δεύτερος κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, να συγκρίνετε:



- i) Τις επιταχύνσεις των αξόνων των δύο κυλίνδρων.
- ii) Τις ταχύτητες που αποκτούν οι δύο κύλινδροι.
- iii) Τις γωνιακές ταχύτητες των δύο κυλίνδρων.
- iv) Τις οριζόντιες μετατοπίσεις των κέντρων μάζας των κυλίνδρων.
- v) Τις ταχύτητες των σημείων Γ και Δ των σημείων επαφής των δύο κυλίνδρων με το επίπεδο.
- vi) Αν μετά τη χρονική στιγμή t_1 παύει η εξάσκηση των δυνάμεων, να περιγράψετε τις κινήσεις των δύο κυλίνδρων, από κει και πέρα.

81) Δίνεται το σύστημα των δύο τροχών του σχήματος, ακτίνας $R=1\text{m}$, οι οποίοι συνδέονται με κύλινδρο ακτίνας $r=0,5\text{m}$. Η μάζα του συστήματος είναι ίση με 10kg , ενώ η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα του περιστροφής του κυλίνδρου $I=3\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Γύρω από τον κύλινδρο τυλίγουμε αβαρές νήμα, μέσω του οποίου ασκούμε οριζόντια δύναμη $=F$, όπως δείχνεται στο κάτω σχήμα, ενώ οι τροχοί παρουσιάζουν με το έδαφος συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,5$.



- i) Αν $F=35\text{N}$, να βρείτε την επιτάχυνση και τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος.
- ii) Αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της δύναμης F . Ποια είναι η μέγιστη τιμή της δύναμης για την οποία δεν παρατηρείται ολίσθηση;

- iii) Αν $F=112\text{N}$ ποια η επιτάχυνση και ποια η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος; Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος στην περίπτωση αυτή.

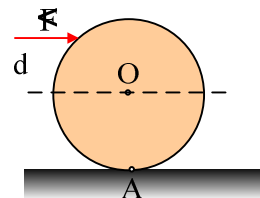
82) Ένας κύλινδρος ακτίνας $R=0,4$ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=300\text{rad/s}$ γύρω από τον άξονα που ενώνει τα κέντρα των δύο βάσεων του. Για $t=0$ αφήνεται σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,4$.

- Ποια η επιτάχυνση και ποια η γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει;
- Να γίνουν τα διαγράμματα $v_{\text{cm}}=f(t)$ και $\omega=f(t)$.

83) Κτυπάμε για $t=0$, μια σφαίρα ακτίνας $R=0,5\text{m}$ οριζόντια σε κατακόρυφη απόσταση d , από το κέντρο της, οπότε αποκτά οριζόντια ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=8\text{rad/s}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σφαίρας και δαπέδου είναι $\mu=0,2$.

- Ποια είναι η ταχύτητα για $t=0^+$ του σημείου επαφής Α της σφαίρας με το επίπεδο;
- Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.
- Ποια επιτάχυνση αποκτά η σφαίρα και τι κίνηση θα εκτελέσει;
- Υπολογίστε την ταχύτητα της σφαίρας, τη στιγμή που θα σταματήσει η ολίσθηση και θα έχουμε μόνο κύλιση.

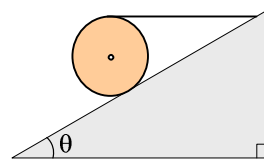
Δίνεται για τη σφαίρα: $I = \frac{2}{5} mR^2$.



84) Ένας κύλινδρος μάζας 2kg ηρεμεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$, δεμένος με οριζόντιο νήμα, που έχει τυλιχθεί γύρω του, όπως στο σχήμα.

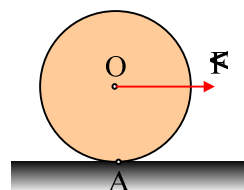
- Να υπολογίσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.
- Ποια η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής, μ_s , ώστε να μπορεί να ισορροπεί ο κύλινδρος.
- Σε μια στιγμή το νήμα κόβεται. Αν $\mu_s=\mu=0,4$, ποια η επιτάχυνση που θα αποκτήσει ο κύλινδρος;

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.



85) Ο τροχός του σχήματος ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,2$, έχει μάζα $10 \cdot g$ και ακτίνα $R=0,5\text{m}$. Για $t=0$ δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης F .

- Τι τιμές μπορεί να πάρει η δύναμη F , ώστε ο τροχός να κυλιέται



χωρίς να ολισθαίνει.

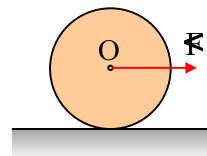
ii) Αν $F=80\text{N}$

- Ποια η επιτάχυνση του κέντρου O του τροχού;
- Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- Ποια η ταχύτητα του σημείου επαφής A του τροχού με το επίπεδο, τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα

περιστροφής του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

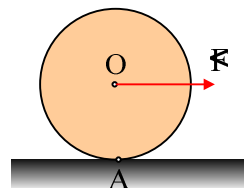
86) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας τροχός, μάζας $m=20\text{g}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ που ηρεμεί σ' οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής ολίσθησης $\mu_s = \mu = 0,2$. Για $t=0$ ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη $F=30\text{N}$.



- Υπολογίστε τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
 - Η τριβή που ασκείται στον τροχό, είναι στατική ή τριβή ολίσθησης;
 - Πόση απόσταση διανύει ο τροχός σε χρονικό διάστημα $t=10\text{s}$;
- Δίνονται για τον τροχό $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

87) **Κυλίνεται μόνο ή και ολισθαίνει;**

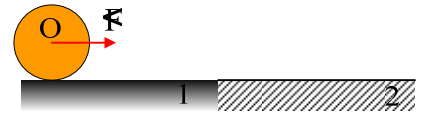
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας τροχός, μάζας $m=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ που ηρεμεί σ' οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής οριακής $\mu_s=0,15$ και ολίσθησης $\mu=0,1$. Για $t=0$ ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη $F=12\text{N}$.



- Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του και δώστε τις εξισώσεις από τις οποίες υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας O και την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- Για να βρούμε αν η τριβή είναι στατική ή ολίσθησης, υποθέτουμε ότι ο τροχός δεν ολισθαίνει. Ποια σχέση συνδέει τις δύο παραπάνω επιταχύνσεις;
- Με βάση την παραπάνω προϋπόθεση, υπολογίστε την τιμή του μέτρου της τριβής. Είναι αποδεκτή η τιμή που υπολογίσατε; Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε;
- Τι κίνηση τελικά εκτελεί το σώμα και ποια η ταχύτητα του σημείου A για $t=2\text{s}$;
- Ποια η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής, ώστε ο τροχός να κυλίνεται μόνο χωρίς να ολισθαίνει;

Δίνονται για τον τροχό $I_{cm} = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

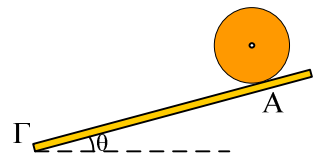
- 88) Ένας τροχός μάζας $m=10\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ είναι ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο (1), απέχοντας απόσταση $d=8\text{m}$ από δεύτερο επίπεδο (2). Για $t=0$ ασκείται στο κέντρο του O μια οριζόντια δύναμη $F=60\text{N}$. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ τροχού και των δύο επιπέδων είναι $\mu_{s1}=\mu_1=0,5$ και $\mu_{s2}=\mu_2=0,1$. Ποια η ταχύτητα του κέντρου O και ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού:



- i) Τη στιγμή που περνά από το ένα επίπεδο στο άλλο.
Τη χρονική στιγμή $t_1=4\text{s}$.

Για τον τροχό $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

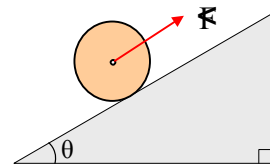
- 89) Ένας κύλινδρος μάζας 2kg και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ παρουσιάζει με μια σανίδα συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,2$. Στηρίζουμε τη σανίδα στο έδαφος με το άκρο της Γ, ώστε να σχηματίζει με το επίπεδο γωνία θ με $\eta\mu\theta=0,3$ και αφήνουμε τον κύλινδρο σε σημείο Α όπου $(AG)=4\text{m}$ να κινηθεί.



- i) Με ποια ταχύτητα φτάνει ο κύλινδρος στο οριζόντιο επίπεδο;
ii) Μεγαλώνουμε την κλίση της σανίδας ώστε $\eta\mu\theta=0,6$. Αφήνουμε τον κύλινδρο να κινηθεί κατά μήκος της σανίδας. Να βρείτε την επιτάχυνση του κέντρου O του κυλίνδρου καθώς και την γωνιακή του επιτάχυνση.

Για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

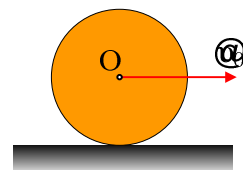
- 90) Μια σφαίρα μάζας $m=2\text{kg}$ αφήνεται σε κεκλιμένο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,5$, ενώ πάνω της ασκείται δύναμη F παράλληλη προς το επίπεδο, όπως στο σχήμα. Αν για την κλίση του επιπέδου $\eta\mu\theta=0,6$, να βρεθεί η επιτάχυνση που θα αποκτήσει, για τις παρακάτω τιμές του μέτρου της δύναμης:



- i) $F_1 = 10\text{N}$
ii) $F_2 = 19\text{N}$
iii) $F_3 = 54\text{N}$

Δίνεται για την σφαίρα $I = \frac{2}{5} \cdot mR^2$.

- 91) Ένας τροχός μάζας 4kg και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα μέτρου 12m/s και χωρίς γωνιακή ταχύτητα, σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,2$. Δίνεται για τον τροχό: $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

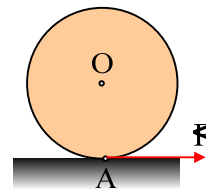


- i) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο τροχό και βρείτε τα μέτρα τους.
- ii) Υπολογίστε την επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού.
- iii) Γιατί ο τροχός θα αρχίσει να στρέφεται; Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει.
- iv) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου για $t=0,4s$;
- v) Αποδείξτε ότι ο τροχός θα επιβραδύνεται μέχρι την χρονική στιγμή $t_1=2s$. Τι κίνηση θα εκτελέσει από κει και πέρα;
- vi) Υπολογίστε την οριζόντια μετατόπιση του τροχού, μέχρι τη στιγμή που σταματά η ολίσθηση. Πόσες περιστροφές έχει πραγματοποιήσει στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

92) Και αν είναι τροχός αυτοκινήτου;.....

- Ένας τροχός αυτοκινήτου μάζας $10kg$, ακτίνας $R=0,4m$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu_s=0,5$ και $\mu=0,4$. Σε μια στιγμή $t=0$, δέχεται σταθερή ροπή ως προς τον άξονά του $\tau = 48N \cdot m$, μέσω του συστήματος κίνησης, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=2s$, οπότε μηδενίζεται. Ας αγνοήσουμε το υπόλοιπο αυτοκίνητο και ας μελετήσουμε την κίνηση του τροχού σαν μεμονωμένο σώμα, θεωρώντας ότι ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.
- i) Σχεδιάστε ένα σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό.
 - ii) Πώς υπολογίζουμε την επιτάχυνση και πώς τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού;
 - iii) Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός κυλίνεται και δεν ολισθαίνει. Με την υπόθεση αυτή ποια η επιτάχυνση που αποκτά ο τροχός και ποια τιμή παίρνει η τριβή; Είναι αποδεκτή η παραπάνω τιμή;
 - iv) Ποια η επιτάχυνση, η ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού για $t_1=2s$;
 - v) Ποια χρονική στιγμή ο τροχός σταματά να ολισθαίνει και κυλίνεται μόνο;
 - vi) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας του κέντρου του τροχού και του μέτρου της γωνιακής του ταχύτητας, σε συνάρτηση με το χρόνο. $g=10m/s^2$.

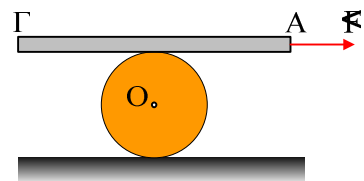
93) Γύρω από το μέσον ενός κυλίνδρου μάζας 10kg και ακτίνας $R=0,4\text{m}$ τυλίγουμε ένα νήμα. Αφήνουμε τον κύλινδρο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και ασκούμε πάνω του μέσω του νήματος σταθερή οριζόντια δύναμη $F=10\text{N}$, όπως στο σχήμα.



- Να περιγράψτε την κίνηση του κυλίνδρου.
- Να βρείτε τις ταχύτητες του κέντρου O και του σημείου επαφής A του κυλίνδρου με το επίπεδο τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$.
- Πόσο είναι το μήκος του νήματος που ξετυλίχθηκε στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

Δίνονται για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

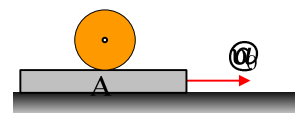
94) Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας ομογενής κύλινδρος ακτίνας $R=1\text{m}$ και μάζας $M=30\text{kg}$ και πάνω του ισορροπεί μια ομογενής ράβδος $ΑΓ$ μάζας $m_1=10\text{kg}$. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκούμε στο άκρο A της ράβδου μια οριζόντια δύναμη F μέτρου $F=60\text{N}$.



Αν ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου είναι $\mu_s=0,4$, ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$, ζητούνται:

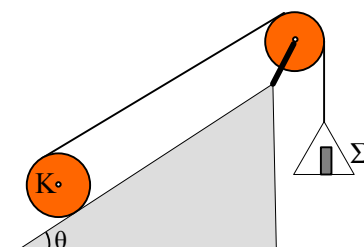
- Η επιτάχυνση της ράβδου.
- Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Η τριβή που ασκείται μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου.

95) Σε λείο οριζόντιο επίπεδο γλιστράει με αρχική ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$ μια σανίδα μάζας $M=10\text{kg}$. Σε μια στιγμή $t=0$, αφήνουμε πάνω της έναν ομογενή κύλινδρο μάζας $m_1=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$, χωρίς αρχική ταχύτητα αλλά και χωρίς να στρέφεται. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κυλίνδρου και σανίδας είναι $\mu=0,1$, ενώ για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$, να βρείτε:



- Την επιβράδυνση της σανίδας.
- Την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- Τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Την ταχύτητα ενός σημείου επαφής του κυλίνδρου με τη σανίδα (σημείο A) τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{s}$.

96) Στο διπλανό σχήμα ο κύλινδρος K ηρεμεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^\circ$, όταν γύρω του έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα, το οποίο



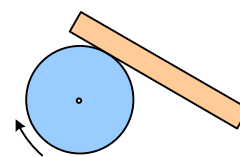
αφού περάσει από τροχαλία μάζας $m_1=4\text{kg}$, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονά της, καταλήγει σε αβαρή δίσκο, πάνω στον οποίο έχουμε τοποθετήσει σταθμά μάζας $m_2=2\text{kg}$. Δίνεται ότι για τον κύλινδρο και την τροχαλία η ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- i) Να υπολογίσετε την στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- ii) Αν στο δίσκο τοποθετήσουμε ένα δεύτερο βαράκι μάζας 1kg , ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται κατά μήκος του επιπέδου χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθεί η επιτάχυνση του άξονά του.

97) Ένας τροχός μάζας 10kg και ακτίνας $R=0,6\text{m}$ στρέφεται γύρω από τον άξονά του εκτελώντας 1200 στροφές το λεπτό. Θέλουμε να ακινητοποιήσουμε τον τροχό σε χρόνο 10s . Για το σκοπό αυτό τον πιέζουμε σταθερά, με την βοήθεια μιας σανίδας. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχού και σανίδας είναι $\mu=\pi/4$, να βρείτε:

- i) Τη γωνιακή επιβράδυνση του τροχού.
- ii) Τον αριθμό των περιστροφών του τροχού, μέχρι να σταματήσει.
- iii) Την δύναμη με την οποία πιέζουμε τον τροχό, μέσω της σανίδας.

Δίνεται ότι για τον τροχό η ροπή αδράνειας $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$



98) Μια σφαίρα αφήνεται να κινηθεί από ύψος h κατά μήκος λείου κεκλιμένου επιπέδου, οπότε φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο μετά από χρόνο t_1 με ταχύτητα v_1 . Αν το επίπεδο δεν ήταν λείο και η σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση, ο απαιτούμενος χρόνος είναι t_2 και η αντίστοιχη ταχύτητά της v_2 .

- i) Για τα χρονικά αυτά διαστήματα ισχύει:

α) $t_1=t_2$ β) $t_1 > t_2$ γ) $t_1 < t_2$

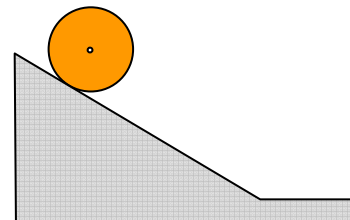
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- ii) Για τις ταχύτητες v_1 και v_2 ισχύει.

α) $v_1 = v_2$ β) $v_1 > v_2$ γ) $v_1 < v_2$

- iii) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Για τη σφαίρα $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5} \cdot mR^2$.



99) Από το ίδιο ύψος h σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, αφήνουμε ταυτόχρονα δύο σφαίρες Α και Β, οι οποίες κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν. Η σφαίρα Α έχει μάζα m και ακτίνα R , ενώ η Β έχει μάζα $3m$ και ακτίνα $R/2$.

i) Για τα χρονικά διαστήματα t_A και t_B που απαιτούνται για να φτάσουν στη βάση του επιπέδου ισχύει:

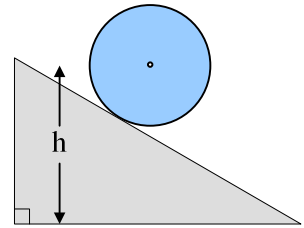
α) $t_A < t_B$ β) $t_A = t_B$ γ) $t_A > t_B$.

ii) Για τις τελικές ταχύτητες v_A και v_B ισχύει:

α) $v_A < v_B$ β) $v_A = v_B$ γ) $v_A > v_B$.

iii) Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Για τη σφαίρα $I_{cm} = \frac{2}{5} \cdot mR^2$.



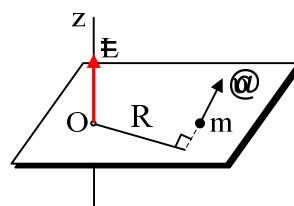
Στροφορμή

3.13. Στροφορμή στερεού και στροφορμή υλικού σημείου.

- 1) Αν έχουμε ένα υλικό σημείο που κινείται με ταχύτητα v , τότε έχει στροφορμή ως προς σημείο ή ως προς άξονα, που υπολογίζεται από την εξίσωση

$$L = mvR$$

Όπου R η απόσταση του φορέα της ταχύτητας από το σημείο ή τον άξονα. Η κατεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζει ο φορέας της ταχύτητας και το σημείο αναφοράς O , ενώ βρίσκεται πάνω στον άξονα, στην περίπτωση που αναφέρεται σε άξονα.



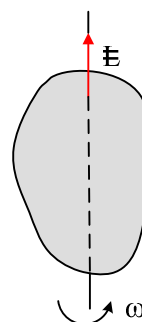
Να τονισθεί ότι: 1) το υλικό σημείο δεν είναι ανάγκη να εκτελεί κυκλική κίνηση.

- 2) Η στροφορμή εξαρτάται από το σημείο αναφοράς. Έτσι στο παράδειγμά μας αν το σημείο ήταν πάνω στον φορέα της ταχύτητας, η στροφορμή θα ήταν μηδέν.

- 2) Αν έχουμε ένα στερεό που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, η στροφορμή θα έχει την κατεύθυνση του άξονα και το μέτρο της θα δίνεται από την εξίσωση:

$$L = I \cdot \omega$$

- i) Αν ο άξονας περιστροφής του στερεού περνά από το κέντρο μάζας του, τότε η στροφορμή ονομάζεται και spin .
- ii) Αν ο άξονας περιστροφής δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού, τότε η στροφορμή του στερεού μπορεί να θεωρηθεί σαν το άθροισμα του spin και της στροφορμής που έχει ένα υλικό σημείο μάζας m το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.



Παράδειγμα 1ο:

Έστω ένας οριζόντιος δίσκος μάζας m και ακτίνας R , ο οποίος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Να υπολογίσετε την στροφορμή του δίσκου ως προς κατακόρυφο άξονα, όταν αυτός:

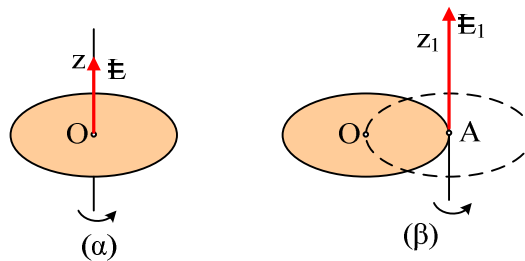
- i) Περνά από το κέντρο O του δίσκου.
 ii) Περνά από ένα σημείο A της περιφέρειας του δίσκου.
 Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο και είναι κάθετος στο επίπεδό του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

Λύση

- i) Για το σχήμα (α) το στερεό στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και έχει στροφορμή:

$$L = I_{cm} \cdot \omega = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \omega \quad (1)$$

- ii) Στο σχήμα (β) το στερεό στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από ένα σημείο A της περιφέρειάς του, οπότε η στροφορμή του είναι:



$$L_1 = I \cdot \omega \quad (2)$$

Όπου I η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z_1 . Αλλά από τον νόμο του Steiner έχουμε:

$I = I_{cm} + mR^2 = \frac{1}{2} m \cdot R^2 + mR^2$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση (2) έχουμε:

$$L_1 = \left(\frac{1}{2} m \cdot R^2 + mR^2 \right) \cdot \omega = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \omega + mR^2 \omega = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \omega + m \cdot \omega R \cdot R \rightarrow$$

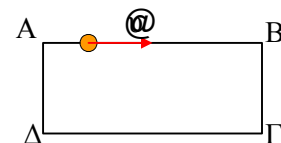
$$L_1 = L_{cm} + m\omega R$$

Άρα η στροφορμή ως προς τον άξονα z_1 είναι ίση με το spin ως προς τον άξονα z συν την στροφορμή ενός υλικού σημείου (του κέντρου μάζας) που εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο A .

Εφαρμογή 1^η :

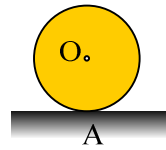
Ένα υλικό σημείο μάζας $0,2\text{kg}$ κινείται εὐθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $v=5\text{m/s}$ πάνω στη πλευρά AB ενός ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $(AB)=3\text{m}$ και $(B\Gamma)=1,5\text{m}$. Να βρείτε:

- i) Τη στροφορμή του σώματος ως προς την κορυφή Γ . Ποια η κατεύθυνση το $\square$ διανύσματος;
 ii) Τη στροφορμή ως προς την κορυφή A το $\square$ ορθογωνίου.



Εφαρμογή 2' :

Ο τροχός ενός αυτοκινήτου, μάζας $m=10\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{ m}$, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα $v=4\text{ m/s}$. Να βρείτε τη στροφορμή του τροχού ως προς :

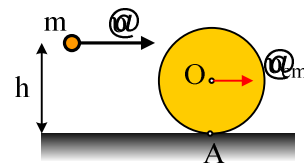


- τον άξονά του που περνά από το κέντρο του O
- άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος (σημείο A).

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του $I=1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Εφαρμογή 3' :

Σε οριζόντιο επίπεδο κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ένας κύλινδρος μάζας $M=10\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,8\text{ m}$ με ταχύτητα $v_{\text{cm}}=20\text{ m/s}$. Ένα βλήμα μάζας $m=0,5\text{ kg}$ κινείται οριζόντια σε ύψος από το έδαφος $h=1\text{ m}$ και με ταχύτητα $v=100\text{ m/s}$. Να βρεθεί η συνολική στροφορμή του συστήματος ως προς:



- Τον άξονα του κυλίνδρου.
- Το σημείο επαφής A του κυλίνδρου με το έδαφος.

Για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M \cdot R^2$.

3.14. Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.

Έχουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ενός στερεού:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau$$

όπου L η στροφορμή του στερεού και $\Sigma \tau$ το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό, ως προς τον σταθερό άξονα περιστροφής του στερεού.

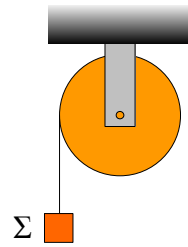
Υπάρχει όμως και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\text{εξ}}$$

όπου L η ολική στροφορμή του συστήματος των σωμάτων και $\Sigma \tau_{\text{εξ}}$ το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα.

Παράδειγμα 2ο:

Ο κύλινδρος του σχήματος έχει τυλιγμένο γύρω του ένα αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο ένα σώμα μάζας Σ μάζας $m_1=2\text{kg}$. Ο κύλινδρος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονά του που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων. Σε μια στιγμή, $t=0$, αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί.



Δίνονται: Η ακτίνα του κυλίνδρου $R=0,4\text{m}$, η μάζα του κυλίνδρου $M=4\text{kg}$, τριβές δεν υπάρχουν, ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής $I= \frac{1}{2} M \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Να βρείτε:

- Την επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα Σ .
- Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας στον κύλινδρο.
- Για τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$ ζητούνται:
 - Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.

Λύση

Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος του w_1 και η τάση του νήματος T . Αφού το νήμα είναι αβαρές το νήμα ασκεί και στον κύλινδρο δύναμη με μέτρο T . Στον κύλινδρο ασκούνται επίσης το βάρος του W και μια δύναμη F από τον άξονα, όπως στο σχήμα.

Για το σώμα Σ έχουμε $w-T= m_1 a_1$ (1) όπου a_1 η επιτάχυνση του σώματος.

Για τον κύλινδρο $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $TR= \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2) και επειδή

$$a_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \text{ (βλέπε παράδειγμα 10)}$$

$$\text{έχουμε } T= \frac{1}{2} M a_1 \text{ (3)}$$

- Από τις εξισώσεις (1) και (3) παίρνουμε $m_1 g = (\frac{1}{2} M + m_1) a_1 \rightarrow$

$$a_1 = 5\text{m/s}^2.$$

- Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση, οπότε $\Sigma F = 0 \rightarrow$

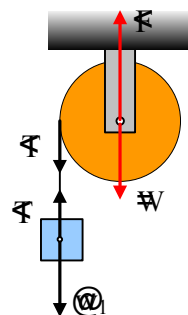
$w + T + F = 0$ και επειδή το βάρος και η τάση του νήματος είναι κατακόρυφες δυνάμεις, κατακόρυφη θα είναι και η δύναμη F .

$$\text{Οπότε } F = Mg + T = Mg + \frac{1}{2} M a_1 \rightarrow$$

$$F = 50\text{N}$$

- Από την εξίσωση $a_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ έχουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = a_1 / R = 12,5\text{rad/s}^2$.

$$\text{Οπότε } \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t = 25\text{rad/s}.$$



Η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στον κύλινδρο είναι η τάση του νήματος για την οποία έχουμε $T = \frac{1}{2} Ma_1 = 10\text{N}$. Έτσι για τον κύλινδρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = T \cdot R = 4 \text{kgm}^2/\text{s}^2$$

Με διεύθυνση αυτή του άξονα και φορά κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και φορά προς τον αναγνώστη.

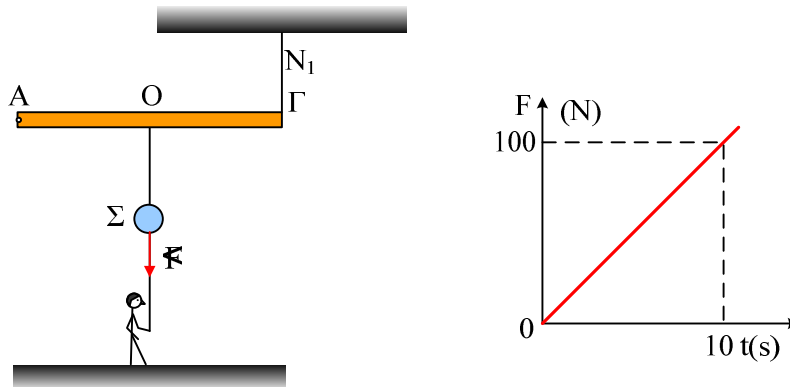
Ενώ η μόνη εξωτερική δύναμη για το σύστημα των σωμάτων που ασκεί ροπή είναι το βάρος του σώματος Σ. Έτσι για το σύστημα έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\text{εξ}} = m_1 g \cdot R = 8 \text{kgm}^2/\text{s}^2.$$

Με διεύθυνση επίσης αυτή του άξονα και φορά κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και φορά προς τον αναγνώστη.

Εφαρμογή 4^η :

Μια ομογενής δοκός ΑΓ μήκους $\ell = 4\text{m}$ και μάζας $M = 30\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, ενώ είναι δεμένη με κατακόρυφο νήμα N_1 στο άκρο της Γ, με όριο θραύσεως $T_{100} = 400\text{N}$ και ισορροπεί οριζόντια. Στο μέσον της Ο κρέμεται μέσω νήματος μια σφαίρα Σ μάζας $m_1 = 2\text{kg}$. Ένας άνθρωπος ασκεί στη σφαίρα, μέσω νήματος, μια κατακόρυφη δύναμη F , το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διπλανό διάγραμμα.



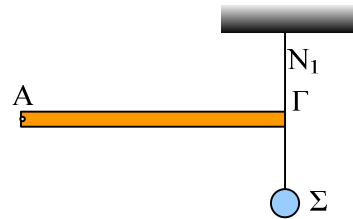
- i) Ποια χρονική στιγμή t_1 θα κοπεί το νήμα N_1 ;
- ii) Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος:
 - a) Βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση της δοκού.
 - b) Ποια η επιτάχυνση της σφαίρας;
 - c) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο Α:
 - α) Του σώματος Σ
 - β) Της ράβδου.

γ) Του συστήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = 1/3 M\ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Εφαρμογή 5'' :

Μια ομογενής δοκός ΑΓ μήκους $\ell = 4\text{m}$ και μάζας $M = 30\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, ενώ είναι δεμένη με κατακόρυφο νήμα N_1 στο άκρο της Γ και ισορροπεί οριζόντια. Στο άκρο Γ κρέμεται μέσω νήματος μια σφαίρα Σ μάζας $m_1 = 2\text{kg}$. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα N_1 . Για τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο Α:



- i) Του σώματος Σ
- ii) Της ράβδου.
- iii) Του συστήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = 1/3 M\ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

3.15. Διατήρηση της στροφορμής.

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής μπορεί να εφαρμόζεται είτε για ένα σώμα, είτε για ένα σύστημα σωμάτων.

Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να είναι μηδέν, ενώ στη δεύτερη η συνισταμένη των ροπών **των εξωτερικών δυνάμεων** πρέπει να είναι μηδέν.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, όπως στην περίπτωση μιας κρούσης, εφαρμόζεται η αρχή διατήρησης της στροφορμής, ακόμη και αν υπάρχουν εξωτερικές ροπές, επειδή η δράση τους στη διάρκεια της κρούσης, θεωρείται αμελητέα.

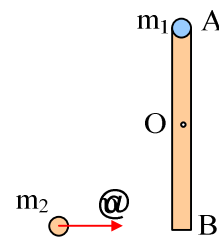
Παράδειγμα 3ο:

Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα ΑΒ μήκους $\ell = 4\text{m}$ και μάζας $M = 2,8\text{kg}$, ενώ στο ένα της άκρο Α έχει στερεωθεί μια σημειακή μάζα $m_1 = 0,1\text{kg}$. Ένα βλήμα μάζας $m_2 = 0,1\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v = 30\text{m/s}$ και σφηνώνεται στο άλλο άκρο Β της σανίδας. Να βρεθούν:

- i) Η ταχύτητα του κέντρου Ο της σανίδας μετά την κρούση.
 ii) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας σανίδας ως προς κάθετο σε αυτήν

$$\text{άξονα που περνά από το μέσον της } I = \frac{1}{12} M \ell^2.$$



Λύση

- i) Επειδή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα Σανίδα-σώματα m_1 - m_2 είναι μηδενική, θα ισχύει για το σύστημα η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$P_{\text{αρχ}} = P_{\text{τελ}} \quad \text{ή}$$

$$m_2 \cdot v = (M + m_1 + m_2) \cdot v_k \quad \text{ή}$$

$$v_k = 1 \text{ m/s.}$$

Η ταχύτητα που βρήκαμε είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος μετά την κρούση, που λόγω συμμετρίας είναι το μέσον Ο της σανίδας.

- ii) Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής, ο οποίος είναι ένας κατακόρυφος άξονας που περνά από το μέσον Ο της ράβδου. Συνεπώς ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα. Έτσι έχουμε:

$$m_2 v \cdot (OB) = I_{\text{ολ}} \cdot \omega_k \quad \text{ή} \quad m_2 v \cdot \ell/2 = \left(\frac{1}{12} M \ell^2 + m_1 \frac{\ell^2}{4} + m_2 \frac{\ell^2}{4} \right) \omega_k \quad \text{ή}$$

$$6m_2 v \ell = (M + 6m_1) \ell^2 \cdot \omega_k \quad \text{ή}$$

$$\omega_k = \frac{6m_1 v}{(M + 6m_1) \ell} = 1,3 \text{ rad/s.}$$

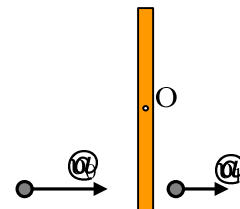
Εφαρμογή 6' :

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής σανίδα μήκους 4m και μάζας 3kg. Ένα βλήμα μάζας 0,2kg κινείται οριζόντια και σε διεύθυνση κάθετη προς τη σανίδα με ταχύτητα $v_0 = 200 \text{ m/s}$, κτυπά τη σανίδα σε σημείο που απέχει 0,2m από το ένα της άκρο, την διαπερνά και εξέρχεται με ταχύτητα $v_1 = 50 \text{ m/s}$. Ζητούνται:

- i) Η ταχύτητα του κέντρου Ο της σανίδας.
 ii) Η γωνιακή ταχύτητα της σανίδας.

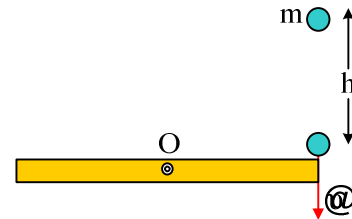
Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας σανίδας ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το

$$\text{μέσον της } I = \frac{1}{12} M \ell^2.$$



Παράδειγμα 4ο:

Μια ομογενής ράβδος μάζας $M=3\text{kg}$ και μήκους $\ell=4\text{m}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της O και ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Από ύψος $h=3,2\text{m}$ αφήνεται να πέσει μια σημειακή μάζα $m=1\text{kg}$ η οποία κτυπά στο άκρο της ράβδου και προσκολλάται. Βρείτε τη



γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος, αμέσως μετά την πρόσκρουση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το

μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Βρίσκουμε αρχικά με ποια ταχύτητα η μάζα m κτυπά τη ράβδο. Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο το οποίο βρίσκεται η δοκός, σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και παίρνουμε:

$$U_{\text{αρχ}} + K_{\text{αρχ}} = U_{\text{τελ}} + K_{\text{τελ}} \quad \text{ή}$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2. \quad \text{ή } v = \sqrt{2gh} = 8\text{m/s}.$$

Παρότι στη διάρκεια της κρούσης ασκείται στη μάζα m το βάρος της, εξωτερική δύναμη, που ως προς τον άξονα περιστροφής, έχει ροπή, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής, δεχόμενοι ότι είναι πολύ μικρή η διάρκεια της κρούσης. Έτσι παίρνουμε:

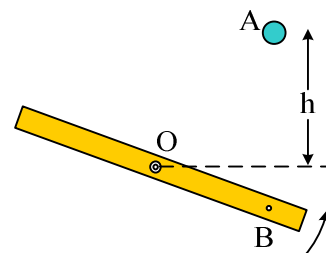
$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \quad \text{ή } mv \cdot \frac{\ell}{2} = I_{\text{ολ}} \cdot \omega \quad \text{ή}$$

$$mv \cdot \frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{12} M \ell^2 + m \frac{\ell^2}{4} \right) \omega \quad \text{ή } 6mv \ell = (M+3m) \ell^2 \cdot \omega \quad \text{ή}$$

$$\omega = \frac{6mv}{(M+3m)\ell} = 2\text{rad/s}.$$

Εφαρμογή 7^η :

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=4\text{m}$ και μάζας 12kg στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της O , με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=4\text{rad/s}$ αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού. Από ένα σημείο A που βρίσκεται σε ύψος $h=1,25\text{m}$ πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το O , αφήνουμε για $t=0$ μια σφαίρα Σ μάζας $m_1=2\text{kg}$ να πέσει ελεύθερα. Η σφαίρα



συγκρούεται πλαστικά με τη ράβδο, τη στιγμή που ήταν σε οριζόντια θέση και σε σημείο B, όπου (OB)=1,5m. Ζητούνται:

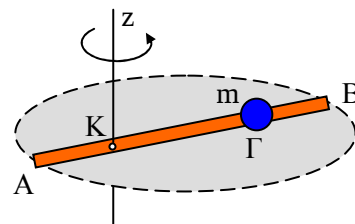
- i) Για τη χρονική στιγμή $t=0,2s$:
 - a) Η ολική στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου.
 - b) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου:
 - 1) της ράβδου
 - 2) της σφαίρας
 - 3) του συστήματος ράβδος – σφαίρα.
- ii) Αν η κρούση διαρκεί απειροελάχιστα, για αμέσως μετά την κρούση:
 - c) Ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος;
 - d) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής, του συστήματος;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το

$$\text{μέσον της } I = \frac{1}{12} M\ell^2.$$

Ασκήσεις – Προβλήματα

- 1) Η ομογενής ράβδος AB μήκους $l=2\text{m}$ και μάζας $M=6\text{kg}$, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=8\text{rad/s}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το σημείο K, όπου $(AK)=0,5\text{m}$, διαγράφοντας οριζόντιο επίπεδο. Μια μάζα $m=2\text{kg}$ είναι στερεωμένη στη θέση Γ, όπου $(\Gamma B)=0,5\text{m}$. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.

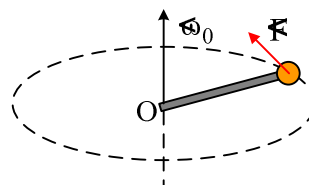


- i) Η ράβδος έχει στροφορμή ως προς τον άξονα z κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με $16\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.
- ii) Η ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς τον άξονα z είναι ίση με $5,5\cdot\text{g}\cdot\text{m}^2$.
- iii) Σε μια στιγμή η μάζα m, αρχίζει να γλιστρά κατά μήκος της ράβδου και σταματά στο σημείο B. Κατά τη διάρκεια της κίνησης αυτής:
 - a) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος είναι σταθερός.
 - b) Η κινητική ενέργεια της μάζας m αυξάνεται.
 - c) Το σύστημα θα αποκτήσει τελικά γωνιακή ταχύτητα $\omega_2=5,5\text{rad/s}$.
 - d) Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

$$\text{διέρχεται από το μέσον της } I = \frac{1}{12} M l^2.$$

- 2) Σφαίρα μικρών διαστάσεων και μάζας $m=0,1\text{kg}$ είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους $l=1\text{m}$ που περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άλλο άκρο της O, διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=5\text{rad/s}$. Για $t_0=0$ ασκούμε στη σφαίρα οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F=10\text{N}$, η οποία είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο. Ζητούνται:

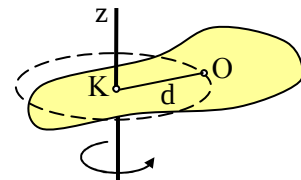


- i) Η στροφορμή της σφαίρας τις χρονικές στιγμές:
 - α) $t_0=0$ και β) $t=4\text{s}$
- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας τις χρονικές στιγμές:
 - α) $t_0=0$ και β) $t=4\text{s}$

iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της στροφορμής της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίσετε:

- Την κλίση της καμπύλης $L=f(t)$.
- Τη μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας από 0-4s
- Τον αριθμό των περιστροφών της ράβδου από 0-4s.

3) Το στερεό του σχήματος μάζας $m=2\text{kg}$, στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\text{rad/s}$, γύρω από κατακόρυφο άξονα z . Αν O είναι το κέντρο μάζας του στερεού, το οποίο απέχει από τον άξονα z απόσταση $d=0,2\text{m}$, ενώ η ροπή αδράνειας ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το O , είναι ίση με $0,92\text{kg}\cdot\text{m}^2$, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.



- Η στροφορμή του στερεού ως προς τον άξονα z , είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με $L=9,2\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.
- Η στροφορμή του στερεού είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με $L=10\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.
- Το κέντρο μάζας O εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας d . Αν η μάζα του στερεού θεωρηθεί συγκεντρωμένη στο σημείο O , τότε η στροφορμή του στερεού εξαιτίας της κίνησης αυτής είναι ίση με $L=0,8\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.
- Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί μια στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας O και μια κυκλική του κέντρου μάζας γύρω από το σημείο K .

4) Υλικό σημείο μάζας m κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα μέτρου v .

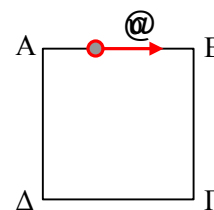
i) Έχει ορμή; Στροφορμή; Εξηγείστε την άποψή σας.

- Έστω ότι η κίνηση του σώματος γίνεται πάνω στην πλευρά AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a .

Ποια η στροφορμή του σώματος στις θέσεις A και B :

- ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού στο σημείο Δ
- ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού στο μέσον M της $A\Delta$.

ii) Ποια η μεταβολή της ορμής και ποια της στροφορμής του ανάμεσα στις θέσεις A και B .



- 5) Στο άτομο του υδρογόνου ένα ηλεκτρόνιο στρέφεται γύρω από ένα πρωτόνιο και βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση. Να βρείτε το λόγο της στροφορμής του ηλεκτρονίου εξαιτίας της περιφοράς του γύρω από τον πυρήνα προς την τιμή της στροφορμής του λόγω ιδιοπεριστροφής (spin).

Δίνεται η σταθερά του Planck $h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

- 6) Τροχός ακτίνας $R=0,2\text{m}$ και μάζας $M=1\text{kg}$, η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=5\text{rad/s}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα κάθετο στο επίπεδο του τροχού, όπως στο σχήμα.



i) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του τροχού.

ii) Ο άνθρωπος στρέφει τον άξονα του τροχού κατά:

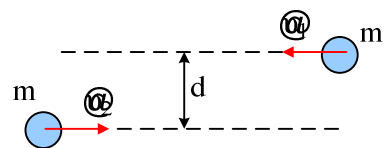
α) $\varphi=60^\circ$ β) $\varphi=90^\circ$ γ) $\varphi=120^\circ$ δ) $\varphi=180^\circ$

χωρίς να μεταβληθεί το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας. Να υπολογίσετε την μεταβολή της στροφορμής του τροχού σε κάθε περίπτωση.

iii) Αν καθεμιά από τις παραπάνω στροφές διαρκεί χρονικό διάστημα $\Delta t=2\text{s}$, να υπολογιστεί το μέτρο της ροπής που ασκήθηκε στον άξονα περιστροφής του τροχού.

- 7) Ένα υλικό σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου v . Έχει ορμή; Στροφορμή; Από ποιους τύπους υπολογίζονται; (αν υπάρχουν).

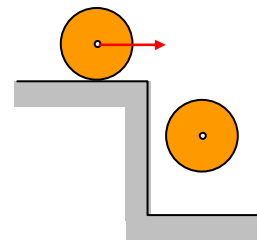
- 8) Δύο άστρα ίσης μάζας m , βρίσκονται απομονωμένα από άλλα ουράνια σώματα και πλησιάζουν το ένα το άλλο μόνο υπό την επίδραση της βαρυτικής έλξης των. Αρχικά τα δύο άστρα βρίσκονται σε άπειρα απόσταση και κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες ίσου μέτρου $v_1=v_2=v_0$ ενώ η απόσταση μεταξύ των διευθύνσεων των δύο ταχυτήτων είναι d , όπως στο σχήμα.



- i) Αποδείξτε ότι ανά πάσα στιγμή οι ταχύτητές τους θα είναι αντίθετες.
- ii) Αποδείξτε ότι η ολική αρχική στροφορμή των δύο άστρων ως προς κάποιο σημείο αναφοράς είναι ανεξάρτητη από το σημείο αναφοράς.
- iii) Αποδείξτε ότι η ολική στροφορμή διατηρείται.

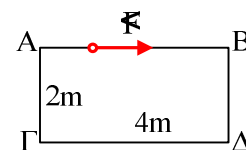
- 9) Ο κύλινδρος του σχήματος ακτίνας R , ο οποίος κυλίεται στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει, σε μια στιγμή εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_{cm} . Κατά την οριζόντια βολή που θα εκτελέσει, τι μεταβολή θα συμβεί στα μεγέθη:

- γωνιακή ταχύτητα,
- στροφορμή,
- ταχύτητα κέντρου μάζας.

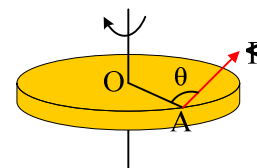


- 10) Ένα υλικό σημείο κινείται από το Α προς το Β με την επίδραση σταθερής δύναμης $F=10\text{N}$.

- Ποια η ροπή της δύναμης ως προς το Γ και ως προς το Β.
- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος
- Την στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο μέσο Μ της ΑΒ έχει ορμή 5 kg m/s , έχει την στιγμή αυτή στροφορμή ως προς το Α; Ως προς το Γ; Αν ναι, πόση είναι αυτή;
- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος αυτού όταν βρίσκεται στο Μ, ως προς την κορυφή Γ;

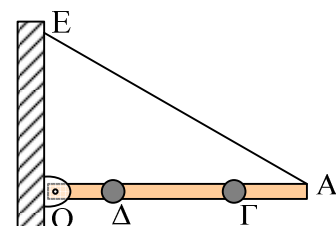


- 11) Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε μια στιγμή δέχεται μια, σταθερή κατά μέτρο, οριζόντια δύναμη F , σε σημείο Α της περιφέρειάς της, η οποία σχηματίζει σταθερή γωνία θ με την ακτίνα ΟΑ.



- Να σχεδιάσετε στο σχήμα τα διανύσματα:
 - της γωνιακής ταχύτητας.
 - της ροπής της δύναμης.
 - της γωνιακής επιτάχυνσης.
 - της στροφορμής.
- Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη;
- Τι θα συμβεί με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, αν η δύναμη, χωρίς να μεταβληθεί το μέτρο της γίνει εφαπτόμενη στον κύκλο ($\theta=90^\circ$);

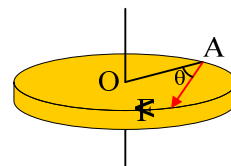
- 12) Η ομογενής ράβδος ΑΟ του σχήματος έχει μάζα 3 kg και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το άκρον της Ο, ισορροπεί δε οριζόντια δεμένη με νήμα ΑΕ, το οποίο σχηματίζει γωνία $\text{EAO}=30^\circ$. Πάνω στη ράβδο δένονται δύο ίσες σφαίρες με μάζα $0,2\text{ kg}$ καθεμιά, στις θέσεις Γ και Δ. Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως



προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της O δίνεται από την σχέση $I = \frac{1}{3} mL^2$, $(\Gamma\Delta) = 2(O\Delta) = 2(A\Gamma) = 2m$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

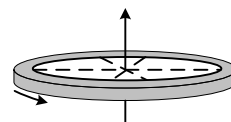
- i) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος και η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το O.
- ii) Κόβουμε το νήμα. Πόση γωνιακή επιτάχυνση αποκτά το σύστημα την στιγμή αυτή;
- iii) Μετά από λίγο, η ταχύτητα του άκρου A είναι 4 m/s . Βρείτε την ολική στροφορμή τη στιγμή αυτή.

- 13) Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας $0,2 \text{ m}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και ηρεμεί. Για $t=0$ δέχεται την επίδραση μιας σταθερής κατά μέτρο οριζόντιας δύναμης $F=10 \text{ N}$ η οποία ασκείται σε σημείο A της περιφέρειάς του και σχηματίζει σταθερή γωνία $\theta=30^\circ$ με την ακτίνα OA. Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I=2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, να βρεθούν:



- i) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- ii) Η γωνιακή ταχύτητα και η στροφορμή του δίσκου τη χρονική στιγμή $t=10 \text{ s}$.
- iii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής και της κινητικής ενέργειας του δίσκου, την παραπάνω χρονική στιγμή;

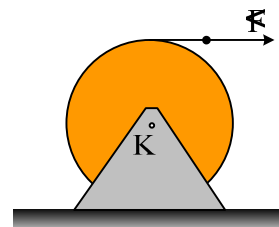
- 14) Ο τροχός ενός ποδηλάτου, μάζας $m=4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,5 \text{ m}$, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega=10 \text{ rad/s}$ γύρω από τον άξονά του. Αν τη μάζα του τροχού την θεωρήσουμε συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, να βρείτε:



- i) Τη στροφορμή του.
- ii) Την ροπή που πρέπει να ασκηθεί στον τροχό, ώστε σε χρόνο $\Delta t=10 \text{ s}$ να διπλασιαστεί η στροφορμή του.
- iii) Τη ροπή που πρέπει να ασκηθεί στον τροχό, ώστε μετά από χρόνο $\Delta t=10 \text{ s}$ ο τροχός να στρέφεται κατά την αντίθετη φορά με το ίδιο μέτρο γωνιακής ταχύτητας $\omega=10 \text{ rad/s}$.

Να σχεδιάσετε κατάλληλα σχήματα που να φαίνονται τα παραπάνω διανύσματα.

- 15) Ομογενής τροχαλία μάζας M και ακτίνας $R=0,2 \text{ m}$ μπορεί να περιστραφεί γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της K. Τυλίγουμε γύρω από το αυλάκι της τροχαλίας αβαρές



και μη εκτατό νήμα και στο άκρο του ασκούμε δύναμη που μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $F=20-2t$ (S.I.).

- i) Ποιος ο μέγιστος και ποιος ο ελάχιστος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας;
- ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t=5s$.
- iii) Να κάνετε το διάγραμμα της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Αν η γωνία κλίσης της παραπάνω γραφικής παράστασης είναι 45° να βρεθεί η μάζα της τροχαλίας.
- v) Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας τη στιγμή $t=10s$;
Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$.

16) Ένα στερεό που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ως προς τον οποίο παρουσιάζει ροπή αδράνειας $4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, ηρεμεί. Για $t=0$ ασκούνται πάνω του δύο οριζόντιες αντιπαράλληλες δυνάμεις $F_1=F_2=10\text{N}$, που η απόσταση μεταξύ τους είναι $0,2\text{m}$.

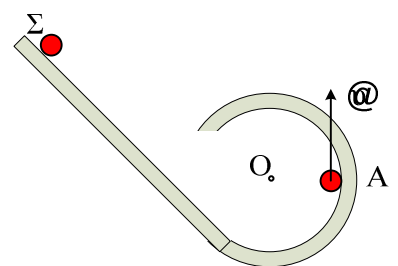
- i) Να εξηγήσετε γιατί θα αρχίσει να περιστρέφεται και να υπολογίστε τη γωνιακή του επιτάχυνση.
- ii) Να υπολογίστε τη γωνιακή του ταχύτητα, την στροφορμή του και την κινητική του ενέργεια, τη χρονική στιγμή $t=4s$.

17) Οριζόντιος δίσκος μάζας $0,9\text{kg}$ και ακτίνας R στρέφεται με συχνότητα 200Hz γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Ένα κομμάτι πηλού μάζας $0,2\text{kg}$ πέφτει κατακόρυφα και προσκολλάται πάνω στον δίσκο και σε απόσταση από τον άξονα περιστροφής ίση με το μισό της ακτίνας. Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του είναι $I = \frac{1}{2} m R^2$ ποια η νέα συχνότητα του συστήματος μετά την κρούση;

18) Στο διπλανό σχήμα η ομογενής σφαίρα ακτίνας $r = 1 \text{ m}$ και μάζας 7 kg , αφήνεται στο σημείο Σ του κεκλιμένου επιπέδου που βρίσκεται σε ύψος h . Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο αλλά και στο εσωτερικό της κυκλικής στεφάνης, ακτίνας $R = 6 \text{ m}$. Τη στιγμή που περνάει από τη θέση A , όπου η ακτίνα (OA) είναι οριζόντια, έχει κατακόρυφη ταχύτητα $v=4\text{m/s}$.

Για την θέση αυτή:

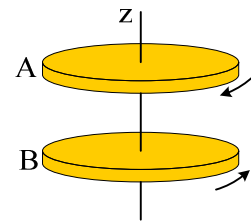
- i) Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας.



- ii) Ποια η γωνιακή ταχύτητα του κέντρου της σφαίρας για την κυκλική της κίνηση, γύρω από το κέντρο της στεφάνης O;
- iii) Βρείτε την επιτάχυνση της σφαίρας.
- iv) Ποια η στροφορμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το κέντρο O της τροχιάς;
- v) Ποια η ακτινική δύναμη που δέχεται η σφαίρα από τη στεφάνη στη θέση A;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

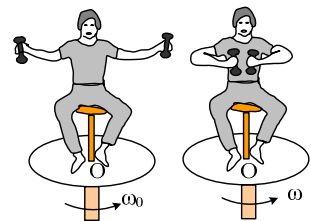
- 19) Γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα στρέφονται δύο δίσκοι A και B με την ίδια ακτίνα με μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$ και με γωνιακές ταχύτητες μέτρων 10 rad/s και 5 rad/s αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή ο A δίσκος ξεκολλά από την θέση του και πέφτοντας προσκολλάται στον δίσκο B.



- i) Ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος;
- ii) Αν η ακτίνα των κυλίνδρων είναι ίση με 1 m , ενώ η αρχική κατακόρυφη απόστασή τους 2 m , ποια η απώλεια της Μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση;

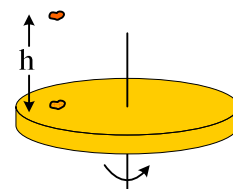
Δίνονται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} m R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 20) Ένα παιδί κάθεται πάνω σε κυκλικό τραπέζι το οποίο περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 7 \text{ rad/s}$, ενώ η ολική στροφορμή του συστήματος έχει μέτρο $L = 14 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Το παιδί έχει τεντωμένα τα δυο του χέρια στα οποία κρατά δύο όμοια βαρίδια μάζας m το καθένα. Κάποια στιγμή συμπύσσει το ένα του χέρι φέρνοντας το βαράκι πάνω στον άξονα περιστροφής, με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος να γίνει $\omega_1 = 8 \text{ rad/s}$. Να βρεθούν:



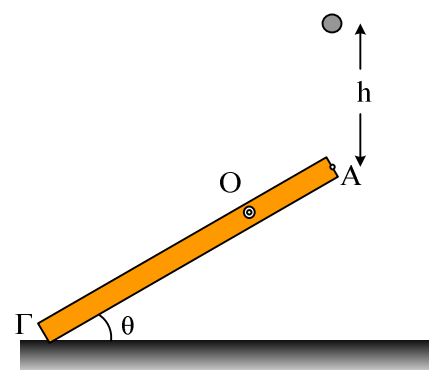
- i) Η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής.
- ii) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την σύμπτυξη του ενός χεριού του παιδιού.
- iii) Αν στη συνέχεια το παιδί συμπύσσει με τον ίδιο τρόπο και το δεύτερο χέρι του, ποια η τελική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος;

- 21) Ένας χορευτής πάγου περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονά του με συχνότητα $2,4\text{Hz}$, έχοντας τα χέρια του στην έκταση. Όταν ο χορευτής φέρει τα χέρια του στην ανάταση, η ροπή αδράνειάς του, ως προς τον άξονά του, μειώνεται κατά 40% . Ποια η νέα συχνότητα περιστροφής του χορευτή ;
- 22) Οριζόντιος δίσκος στρέφεται με συχνότητα 120 c/min γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Ένα μικρό πουλί μάζας 100g στέκεται πάνω στον δίσκο και σε απόσταση $r=20\text{cm}$ από τον άξονα περιστροφής. Όταν το πουλί εγκαταλείπει τον δίσκο, η συχνότητα περιστροφής του δίσκου γίνεται 150 c/min . Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- 23) Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=20\text{rad/s}$. Τοποθετούμε πάνω στο δίσκο και σε απόσταση $d=0,1\text{m}$ από το κέντρο του μια σημειακή μάζα $m=0,2\text{kg}$, η οποία κολλάει στον δίσκο, ο οποίος αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega_2=10\text{rad/s}$.
- Ποια η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του;
 - Αν η σημειακή μάζα αφηθεί να πέσει από ύψος $h=1\text{m}$ και να κολλήσει στον δίσκο, όπως και προηγουμένως, ποια η απώλεια Μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση; $g=10\text{m/s}^2$.
- 24) Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μάζας m και ακτίνας R στρέφεται χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο της. Ένας άνθρωπος μάζας m ξεκινά από την περιφέρεια και κινείται προς το κέντρο. Πόση θα είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της πλατφόρμας, όταν ο άνθρωπος σταματήσει σε απόσταση $R/2$ από τον άξονα περιστροφής και πόση χημική ενέργεια πρόσφερε ο άνθρωπος κατά την μετακίνηση.



Για την πλατφόρμα $I = \frac{1}{3} mR^2$.

- 25) Η ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα 4kg , μήκος 6m και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από σημείο Ο όπου $(AO)=2\text{m}$. Η ράβδος σχηματίζει με το έδαφος γωνία ίση με 60° . Αφήνουμε ένα πλαστικό σώμα Σ (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο), μάζας 2kg , να πέσει από ύψος $h=5\text{m}$ πάνω από το άκρο Α και συγκρούεται πλαστικά με τη ράβδο.

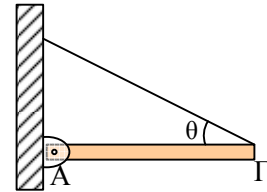


Να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας, που οφείλεται στην πλαστική κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου μάζας m και μήκους l ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της και είναι κάθετος στην ράβδο:

$$I_T = \frac{1}{3} m l^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- 26) Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $\ell = 1 \text{ m}$ ισορροπεί όπως στο σχήμα, όπου στο άκρο Α συνδέεται με άρθρωση με κατακόρυφο τοίχο και το νήμα σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο Α και είναι κάθετος στη ράβδο είναι ίση με $I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

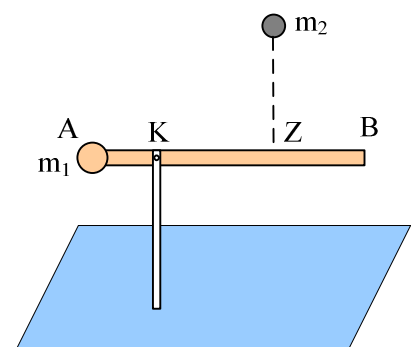


- Να υπολογίσετε το βάρος της ράβδου.
- Να βρείτε τα μέτρα και να προσδιορίσετε τις διευθύνσεις των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο.
- Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και η ράβδος στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο.
 - Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου;
 - Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της, στη θέση που σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την αρχική της θέση;

Δίνεται η ροπή μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από

$$\text{το μέσον της } I = \frac{1}{12} M \ell^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- 27) Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους $\ell = 2 \text{ m}$ και μάζας $M = 3 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από ενδιάμεσο σημείο της Κ και είναι κάθετος σ' αυτή. Στο άκρο Α έχουμε στερεώσει μικρό σώμα μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$ και η ράβδο ισορροπεί οριζόντια. Ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνης, μάζας $m_2 = 0,8 \text{ kg}$ αφήνεται ελεύθερη από ύψος $h = 1,8 \text{ m}$ πάνω από τη ράβδο, οπότε συγκρούεται και κολλάει σ' αυτή σε σημείο της Ζ. Αμέσως μετά τη στιγμή της σύγκρουσης ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του



συστήματος έχει μέτρο $\frac{dL}{dt} = 8 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$. Να υπολογίσετε:

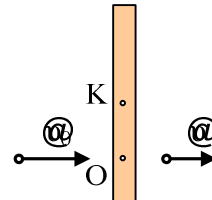
- Την απόσταση (ΑΚ).
- Την απόσταση (ΚΖ).

iii) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την σύγκρουσή της με την πλαστελίνη.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

28) Στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης ηρεμεί μια ομογενής σανίδα μήκους 4m και μάζας $M = 3 \text{ kg}$. Ένα βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 200 \text{ m/s}$ και διεύθυνση κάθετη στη σανίδα, κτυπά τη σανίδα σε σημείο O, το οποίο απέχει $d = 1 \text{ m}$ από το ένα της άκρο, την διαπερνά και εξέρχεται με ταχύτητα $v = 50 \text{ m/s}$.



Βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σανίδας μετά τη κρούση.

i) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής που θα αποκτήσει η σανίδα.

ii) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σημείου O αμέσως μετά τη σύγκρουση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$.

29) Μια ράβδος μήκους ℓ και μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Μια μπάλα, ίδιας μάζας m , που θεωρείται υλικό σημείο κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, κάθετα προς τη ράβδο, με ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$ και προσκολλάται στο άκρο A της ράβδου. Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου A αμέσως μετά την κρούση, όταν:



i) Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο O της ράβδου.

ii) Η ράβδος είναι ελεύθερη να κινηθεί.

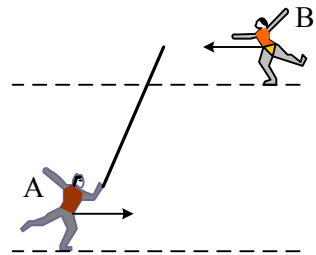
Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$.

30) Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα ακτίνας 2 m , στρέφεται χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της. Αφήνουμε ένα μικρών διαστάσεων σώμα μάζας 1 kg να πέσει και προσκολλάται σε σημείο A που απέχει 1 m από τον άξονα περιστροφής, οπότε η γωνιακή ταχύτητα γίνεται 4 rad/s .

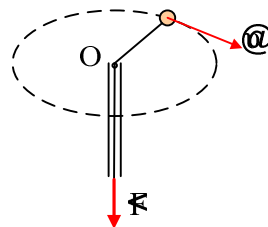
- i) Πόση είναι η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς τον άξονα περιστροφής.
- ii) Επί πόσο χρόνο πρέπει να ασκήσουμε δύναμη $F=0,5\text{N}$ εφαπτομενικά στην πλατφόρμα, ώστε η γωνιακή ταχύτητα να ξαναγίνει 5rad/s ;

31) Οι παγοδρόμοι A και B έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = 60\text{ kg}$ και κινούνται ευθύγραμμα κατά μήκος των παραλλήλων γραμμών που απέχουν μεταξύ τους 4 m . Οι παγοδρόμοι έχουν ταχύτητες με μέτρα $v_A = 10\text{ m/s}$ και $v_B = 8\text{ m/s}$ και αντίθετης φοράς ώστε να πλησιάζει ο ένας τον άλλον. Ο παγοδρόμος A κρατάει στο χέρι του την μια άκρη ενός κονταριού μήκους 4 m και αμελητέας μάζας. Όταν οι παγοδρόμοι πλησιάσουν στην μικρότερη απόσταση, ο B πιάνει την ελεύθερη άκρη του κονταριού και πιασμένοι από τις άκρες του συνεχίζουν να κινούνται.



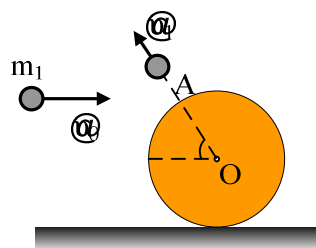
- i) Εξηγήστε και δικαιολογήστε με σαφήνεια ποιο θα είναι το είδος της κίνησης που θα εκτελούν οι παγοδρόμοι, από την στιγμή που συνδέονται και οι δύο στο κοντάρι και μετά.
- ii) Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο παγοδρόμων καθώς και την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος.

32) Σφαιρίδιο μάζας $m = 0,5\text{ kg}$ κινείται κυκλικά χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο τραπέζι με τη βοήθεια αβαρούς σχοινιού που περνά από λεία οπή και συγκρατείται στο άλλο άκρο του με δύναμη μέτρου $F = 36\text{ N}$. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $R_1 = 0,5\text{ m}$. Τραβάμε το σχοινί κατακόρυφα κατά $\Delta y = 0,2\text{ m}$. Να βρείτε:



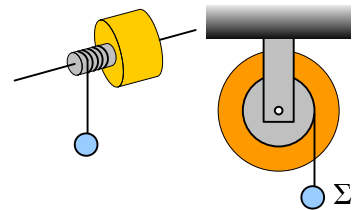
- i) Την αρχική και τελική γραμμική ταχύτητα του σφαιριδίου.
- ii) Την τελική τιμή της δύναμης F .
- iii) Το έργο της δύναμης F κατά το τράβηγμα του σχοινιού.

33) Μια σφαίρα μάζας $M=10\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή ένα βλήμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0=200\text{ m/s}$ συγκρούεται με τη σφαίρα στο σημείο A και φεύγει στη διεύθυνση OA με ταχύτητα $v_1=100\text{ m/s}$, όπως στο σχήμα όπου $\theta=60^\circ$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου O της σφαίρας καθώς και τη γωνιακή της ταχύτητα μετά την κρούση.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας γύρω από άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο της $I = \frac{2}{5} MR^2$.

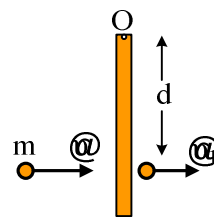
- 34) Το ομοαξονικό σύστημα των κυλίνδρων του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα. Ο μικρός κύλινδρος έχει μάζα $m=2\text{kg}$ και ακτίνα $r=0,1\text{m}$, ενώ ο μεγάλος έχει μάζα $M=4\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,2\text{m}$. Το σώμα Σ , με μάζα $m_1=1\text{kg}$ είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του μικρού κυλίνδρου. Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο να κινηθεί. Ζητούνται:



- Η ροπή αδράνειας του ομοαξονικού συστήματος.
- Η γωνιακή επιτάχυνση των κυλίνδρων,
- Η τάση του νήματος,
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

Δίνονται η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- 35) Μια λεπτή ομογενής ράβδος μήκους $\ell=2\text{m}$ και μάζας $M=6\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρον της O και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Ένα βλήμα μάζας $m=10\text{g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v=800\text{m/s}$, συγκρούεται με τη ράβδο σε απόσταση $d=1,5\text{m}$ από τον άξονα περιστροφής της και εξέρχεται από αυτήν με ταχύτητα $v_1 = v/3$. Να υπολογίσετε:

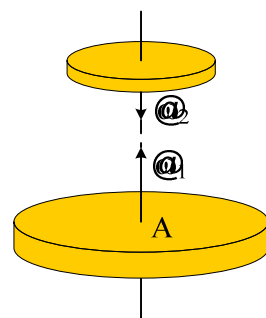


- Την στροφορμή του βλήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου ελάχιστα πριν την σύγκρουση.
- Τη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος.
- Το μέτρο της μέσης τιμής της δύναμης που δέχτηκε το βλήμα, αν η χρονική διάρκεια της κρούσης ήταν $\Delta t=0,01\text{s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο O :

$$I = \frac{1}{3} M \ell^2.$$

- 36) Οι δίσκοι του σχήματος έχουν μάζες $m_1=5\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ και ακτίνες $R_1=1\text{m}$ και $R_2=0,5\text{m}$ αντίστοιχα. Οι δίσκοι περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από τα κέντρα τους, χωρίς τριβές. Ο κάτω δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=10\text{rad/s}$ με φορά προς τα πάνω και ο πάνω δίσκος $\omega_2=56\text{rad/s}$ με φορά προς τα κάτω. Σε μια στιγμή ο πάνω δίσκος αποσπάται και πέφτει στον κάτω



δίσκο, οπότε σε χρονικό διάστημα $\Delta t=0,2s$ αποκτούν την ίδια γωνιακή ταχύτητα και στρέφονται σαν ένα σώμα με γωνιακή ταχύτητα ω . Να υπολογίσετε:

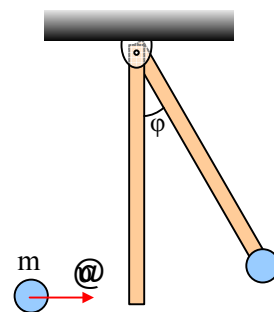
- Την αρχική στροφορμή κάθε δίσκου.
- Την κοινή γωνιακή ταχύτητα ω .
- Την μεταβολή της στροφορμής κάθε δίσκου.
- Το μέτρο της μέσης ροπής που δέχτηκε κάθε δίσκος.
- Το έργο της ροπής της τριβής που δέχτηκε ο μικρός δίσκος από τον μεγάλο, από τη στιγμή που ήρθαν σε επαφή, μέχρι τη στιγμή που απέκτησαν κοινή γωνιακή ταχύτητα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

37) Ομογενής ράβδος AB, μήκους $\ell=2m$ και μάζας $M=0,3 \text{ kg}$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο A. Ένα βλήμα, που θεωρείται υλικό σημείο, μάζας $m=0,2 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v=6m/s$ και κολλάει στη ράβδο στο άκρο B.

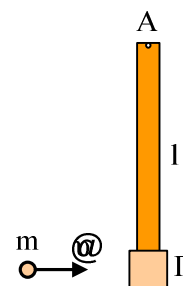
- Ποια η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση;
- Ποια η απώλεια της Μηχανικής ενέργειας;
- Ποιο το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας εκτροπής φ της ράβδου από την κατακόρυφο θέση;

Δίνονται για τη ράβδο $I_{cm} = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g=10m/s^2$.



38) Ξύλινος κύβος μάζας $M = 1950 \text{ g}$ (ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο) είναι στερεωμένος στη μια άκρη Γ ράβδου, μήκους $l=2m$, της οποίας η άλλη άκρη A μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το A. Ο κύβος ισορροπεί όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη. Ένα βλήμα μάζας $m=50g$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 80 \text{ m/s}$ και σφηνώνεται σχεδόν ακαριαία, στο κέντρο του κύβου. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος βλήμα-κύβος, αμέσως μετά την κρούση, στις εξής περιπτώσεις:

- Η ράβδος ΑΓ είναι αβαρής.
- Η ράβδος έχει μάζα $m_1=3 \text{ kg}$.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής

$$\text{της } I = \frac{1}{3} M \ell^2.$$

39) Μια σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R_1=2\text{m}$ σε οριζόντιο επίπεδο. Το νήμα περνά από σωλήνα, με τον οποίο δεν εμφανίζει τριβές, καταλήγοντας σε σώμα Σ μάζας $m_1=5\text{kg}$ το οποίο ηρεμεί.

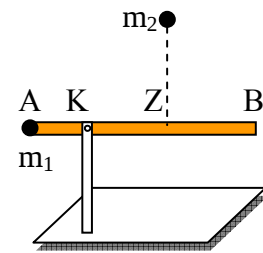
- Να υπολογίσετε την στροφορμή της σφαίρας ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.
- Μετακινούμε το σώμα Σ προς τα κάτω κατά h και διαπιστώνουμε ότι για να ισορροπήσει σε αυτή τη θέση, πρέπει να κρεμάσουμε μαζί μ' αυτό και ένα άλλο σώμα μάζας $m_2=35\text{kg}$. Να βρεθεί το ύψος h . Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

40) Λεπτή ομογενής ράβδος AB μήκους $\ell=2\text{m}$ και μάζας $M=3\text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από ενδιάμεσο σημείο της K και είναι κάθετος σ' αυτή. Στο άκρο A έχουμε στερεώσει μικρό σώμα μάζας $m=2\text{ kg}$ και η ράβδος ισορροπεί οριζόντια. Ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνης, μάζας $m_2=0,8\text{ kg}$ αφήνεται ελεύθερη από ύψος $h=1,8\text{m}$ πάνω από τη ράβδο, οπότε συγκρούεται και κολλάει σ' αυτή σε σημείο της Z . Αμέσως μετά τη στιγμή της σύγκρουσης ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος έχει μέτρο $dL/dt = 8\text{ kgm}^2/\text{s}^2$. Να υπολογίσετε:

- Την απόσταση (AK) .
- Την απόσταση (KZ) .
- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την σύγκρουσή της με την πλαστελίνη.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

$$\text{διέρχεται από το μέσον της } I = \frac{1}{12} M \ell^2 \text{ και } g=10\text{m/s}^2.$$

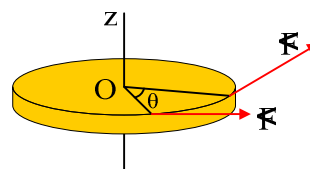


Έργο και κινητική ενέργεια.

3.15. Το θεώρημα έργου- ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

- 1) Αν ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, τότε έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής και αν πάνω του ασκείται μια ροπή, τότε το θεώρημα έργου-ενέργειας (ή το Θ.Μ.Κ.Ε.) για το στερεό γράφεται:

$$\frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \Sigma W_{\text{ροπών}} \quad (1)$$



Για παράδειγμα αν έχουμε έναν αρχικά ακίνητο δίσκο, όπως στο διπλανό σχήμα, στον οποίο ασκείται εφαπτομενικά μια δύναμη σταθερού μέτρου F , όταν ο δίσκος περιστραφεί κατά γωνία θ θα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα η οποία μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (1) :

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - 0 = \tau \cdot \theta \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} I \omega^2 = FR\theta$$

- 2) Αν το στερεό σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση, θα μπορούσαμε να γράψουμε χωριστά το ΘΜΚΕ για την μεταφορική και χωριστά για την στροφική κίνηση, παίρνοντας τη μια φορά τα έργα των δυνάμεων εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και την άλλη τα έργα των ροπών για την περιστροφική. Βέβαια θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε μία φορά το θεώρημα για την συνολική κίνηση.

Παράδειγμα 5ο:

Ένας κύλινδρος μάζας 30 g και ακτίνας $R=0,4\text{ m}$ αρχίζει να ανεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta = 30^\circ$. Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, έχοντας αρχική ταχύτητα $v_0=10\text{ m/s}$. Μετά από μετατόπιση κατά $x=15\text{ m}$, ο άξονας του κυλίνδρου έχει ταχύτητα v_1 .

- i) Πόση επιβράδυνση έχει ο άξονας του κυλίνδρου;
- ii) Βρείτε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- iii) Πόση είναι η ταχύτητα v_1 ;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{ m/s}^2$.

Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, παρουσιάζονται στο διπλανό σχήμα. Γιατί αλήθεια η τριβή έχει φορά προς τα πάνω;

- i) Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε (δουλεύουμε με τα μέτρα των δυνάμεων και επιταχύνσεων):

$$w_x - T = ma_{cm} \quad \text{ή} \quad mg\eta\mu\theta - T = ma_{cm} \quad (1)$$

- ii) Για την περιστροφική κίνηση έχουμε:

$$T \cdot R = I \alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad TR = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad T = \frac{1}{2} m R \alpha_{γων} \quad \text{και επειδή} \\ \text{ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει έχουμε} \quad T = \frac{1}{2} m a_{cm} \quad (2).$$

Από την (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$mg\eta\mu\theta = \frac{3}{2} m a_{cm} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = \frac{2}{3} g\eta\mu\theta = \frac{2}{3} 10 \cdot \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = 10/3 \text{ m/s}^2.$$

Άρα για την τριβή προκύπτει $T = \frac{1}{2} m a_{cm} = 50 \text{ N}$.

- iii) Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα με βάση τις εξισώσεις κίνησης. Εδώ όμως θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας.

Για τη μεταφορική κίνηση:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{wx} + W_{wy} + W_T + W_N \quad \text{ή} \\ \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mg\eta\mu\theta \cdot x + T \cdot x \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2(T - mg\eta\mu\theta)}{m} x} \quad x = 0$$

Αν δουλέψουμε με βάση την στροφική κίνηση, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = W_T \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega_0^2 = -TR\theta \quad \text{ή} \\ \frac{1}{4} m v_1^2 - \frac{1}{4} m v_0^2 = -Tx, \quad \text{αφού} \quad \theta R = x \quad \text{και} \quad \omega R = v \rightarrow v_1 = 0$$

Ερώτηση: Γιατί το έργο της ροπής είναι αρνητικό;

Αν εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ για τη συνολική κίνηση έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = W_{wx} \quad (3) \quad \text{αφού το έργο της στατικής τριβής είναι} \\ \text{συνολικά μηδέν, μιας και δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.}$$

Από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

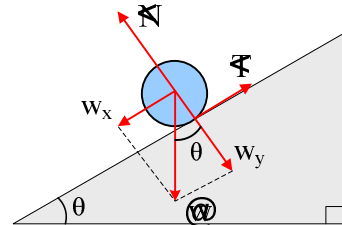
$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{4} m R^2 \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{4} m R^2 \cdot \omega_0^2 = -mg\eta\mu\theta \cdot x \quad \text{ή} \\ 2v_1^2 + v_1^2 - 2v_0^2 - v_0^2 = -4g\eta\mu\theta \cdot x \quad \text{ή} \quad 3v_1^2 - 3v_0^2 = -4g\eta\mu\theta \cdot x$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{3} g\eta\mu\theta x} = \sqrt{100 - \frac{4}{3} 10 \frac{1}{2} 15} = 0$$

Και αν εφαρμόζαμε την αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας;

Πρώτα- πρώτα ισχύει αφού στο σώμα ασκείται τριβή;

Η απάντηση είναι ναι. Και τούτο γιατί η τριβή είναι ΣΤΑΤΙΚΗ, οπότε δεν αφαιρεί



ενέργεια για να την μετατρέψει σε κάποια άλλη μορφή, όπως είναι η θερμότητα. Έτσι έχουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 + mgh,$$

όπου $v = \omega R$ και $h = x \eta \mu \theta$, με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{4} m R^2 \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{4} m R^2 \cdot \omega_1^2 + mgx \eta \mu \theta \quad \text{ή}$$

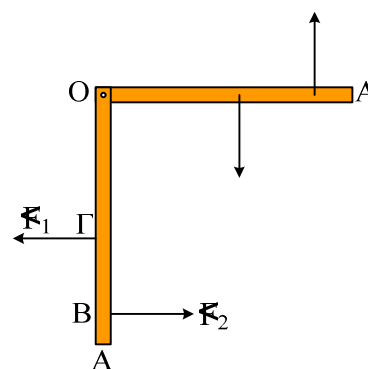
$$2v_0^2 + v_0^2 = 2v_1^2 + v_1^2 + 4gx \eta \mu \theta \quad \text{ή}$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{3} g x \eta \mu \theta} = \sqrt{100 - \frac{4}{3} \cdot 10 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}} = 0$$

Ποια λύση θα επιλέγατε;

Εφαρμογή 1"

Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μήκος $\ell = 2\text{m}$ και μάζα 20 kg , μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Σε μια στιγμή ασκούνται στη ράβδο δύο δυνάμεις με ίσα μέτρα $F_1 = F_2 = 200\text{N}$ οι οποίες παραμένουν διαρκώς κάθετες στη ράβδο, μέχρι αυτή να γίνει οριζόντια. Οι δυνάμεις ασκούνται στα σημεία Β και Γ της ράβδου, όπου $(B\Gamma) = \frac{2}{\pi} \text{ m}$. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον

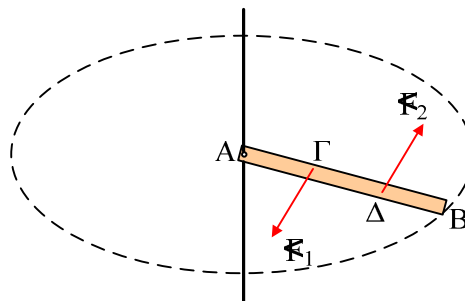


άξονα περιστροφής της δίνεται από την σχέση $I = \frac{1}{3} M \ell^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$, να βρεθούν:

- Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου στην αρχική και τελική θέση.
- Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που θα γίνει οριζόντια.

Εφαρμογή 2"

Μια ράβδος μάζας $m = 3\text{kg}$ και μήκους $\ell = 2\text{m}$ μπορεί να στρέφεται οριζόντια γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α και ηρεμεί. Σε μια στιγμή ασκούνται πάνω της δύο οριζόντιες δυνάμεις, κάθετες διαρκώς στη ράβδο με μέτρα $F_1 = F_2 = 20\text{N}$ σε σημεία Γ και Δ, όπως στο σχήμα, όπου $(\Gamma\Delta) = 0,8\text{m}$, μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 10\text{s}$.



Ζητούνται:

- Η ροπή που ασκείται στη ράβδο
- Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου για $t = 10\text{s}$.

- iii) Η ενέργεια που προσφέρθηκε στη ράβδο μέσω των ροπών των δυνάμεων.
- iv) Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου.
- v) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου τη χρονική στιγμή $t_1=4s$.
- vi) Να γίνει το διάγραμμα της ισχύος της ροπής σε συνάρτηση με το χρόνο.

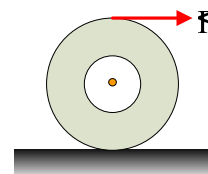
Δίνεται για τη ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{3} M \ell^2$.

Εφαρμογή 3'

Γύρω από ένα κυλινδρικό κέλυφος μάζας 5kg και ακτίνας $R=0,4m$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και αφού τοποθετηθεί σε οριζόντιο επίπεδο, τραβώντας το νήμα, ασκούμε πάνω του μια οριζόντια δύναμη $F=8N$, οπότε το κέλυφος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Μέσα σε χρονικό διάστημα 5s ο άξονας του κυλίνδρου έχει μετατοπισθεί κατά $x=25m$.

Να υπολογιστούν:

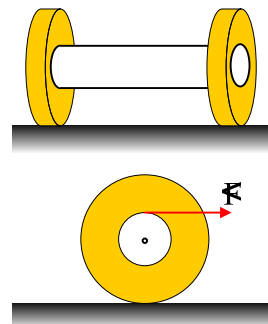
- i) Η επιτάχυνση του άξονα και η γωνιακή επιτάχυνση του κελύφους.
- ii) Η ροπή αδράνειας του κελύφους ως προς τον άξονα περιστροφής,
- iii) Το μέτρο της ασκούμενης τριβής.
- iv) Η κινητική ενέργεια του κελύφους για $t=5s$.
- v) Το έργο της δύναμης F και το έργο της τριβής στο παραπάνω χρονικό διάστημα.



Εφαρμογή 4'

Δίνεται το σύστημα των δύο τροχών του σχήματος, ακτίνας $R=0,2m$, οι οποίοι συνδέονται με κύλινδρο ακτίνας $r=0,1m$. Το σύστημα έχει μάζα $m=6kg$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=0,1 \text{ kg} \cdot m^2$ και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Γύρω από τον κύλινδρο τυλίγουμε αβαρές νήμα, μέσω του οποίου ασκούμε οριζόντια δύναμη $F=3N$, όπως δείχνεται στο κάτω σχήμα, για χρονικό διάστημα $t=10s$. Να βρεθούν:

- i) Η επιτάχυνση a_{cm} και η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος.
- ii) Η ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει.
- iii) Η μετατόπιση x και η γωνία θ κατά την οποία θα περιστραφεί το σύστημα στο παραπάνω χρονικό διάστημα.
- iv) Η μεταφορική και η περιστροφική κινητική ενέργεια που αποκτά το στερεό.
- v) Εφαρμόστε το θεώρημα έργου – ενέργειας για την μεταφορική κίνηση του σώματος,



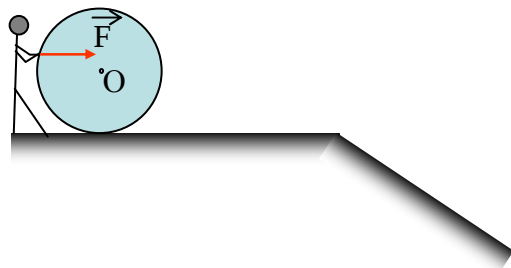
για να υπολογίστε ξανά την μεταφορική κινητική ενέργεια.

vi) Εφαρμόστε το θεώρημα έργου – ενέργειας και υπολογίστε την περιστροφική κινητική ενέργεια του σώματος.

vii) Μπορείτε να εφαρμόστε το θεώρημα έργου – ενέργειας για την συνολική κίνηση του σώματος και να υπολογίστε την συνολική κινητική ενέργεια;

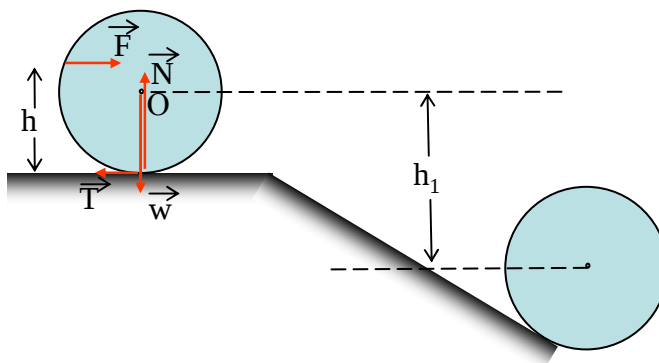
Παράδειγμα 6ο:

Ένας κύλινδρος μάζας $m=50\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{ m}$ ηρεμεί σε τραχύ οριζόντιο δρόμο. Για $t=0$ σπρώχνεται από ένα παιδί με μια σταθερή οριζόντια δύναμη $F=60\text{ N}$ σε ένα σημείο που απέχει κατακόρυφη απόσταση $h=0,5\text{ m}$ από το έδαφος, μέχρι τη στιγμή $t=10\text{ s}$, όπου φτάνει σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, στο οποίο συνεχίζει την κίνησή του, χωρίς να σπρώχνεται από το παιδί. Αν στον οριζόντιο δρόμο ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, γύρω από τον άξονά του για τον οποίο $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{ m/s}^2$, ζητούνται:



- Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου για $t_1=5\text{ s}$.
- Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή που φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου.
- Την ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου, όταν κατέλθει κατακόρυφα κατά $h_1=2,2\text{ m}$ κατά την κίνησή του στο κεκλιμένο επίπεδο.

Λύση:



α) Για την μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$F - T = m \cdot a_{\text{cm}} \quad (1)$$

Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\text{γων}} \rightarrow F(h-R) + T \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \text{ και}$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς ολίσθηση $a_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} \cdot R$, άρα

$$F(h-R) + T \cdot R = \frac{1}{2} mR \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Με απαλοιφή της τριβής μεταξύ των εξισώσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$a_{cm} = \frac{2Fh}{3mR}$$

και με αντικατάσταση:

$$a_{cm} = 2 \cdot 60 \cdot 0,5 / 3 \cdot 50 \cdot 0,4 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Οπότε για την τριβή έχουμε:

$$T = F - ma_{cm} = 60 \text{ N} - 50 \cdot 1 \text{ N} = 10 \text{ N}.$$

β) Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = F(h-R) + T \cdot R = (60 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,4) \cdot \text{gm}^2/\text{s}^2 = 10 \cdot \text{gm}^2/\text{s}^2.$$

γ) Τη στιγμή που ο κύλινδρος φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε:

$$v_{cm} = a_{cm} \cdot t = 10 \text{ m/s}$$

οπότε:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{4} mR^2 \cdot \omega^2 = \frac{3}{4} mv^2 = \frac{3}{4} 50 \cdot 100 \text{ J} = 3750 \text{ J}.$$

δ) Το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, οπότε ο κύλινδρος επιταχύνεται, όσον αφορά την μεταφορική της κίνηση, ενώ διατηρεί σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, αφού δεν ασκείται πάνω του καμιά ροπή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για κατακόρυφη μετακίνηση του άξονα του κυκλίνδρου κατά h_1 , δεχόμενοι σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την χαμηλότερη θέση, παίρνουμε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{ή}$$

$$v^2 + 2gh = v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh} = 12 \text{ m/s}.$$

Εφαρμογή 5' :

Η δοκός AB έχει μήκος $l=6\text{m}$ και μάζα 100g και ισορροπεί όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία θ με $\eta\mu\theta=0,8$ με το έδαφος. Η δοκός συγκρατείται με νήμα στο σημείο O, όπου $OA=1\text{m}$ και το νήμα είναι κάθετο στη δοκό.

- i) Πόση δύναμη ασκεί ο άνθρωπος στη δοκό για την ισορροπία;
- ii) Σε μια στιγμή ο άνθρωπος αφήνει το νήμα και η δοκός στρέφεται γύρω από το άκρο της B, χωρίς τριβές. Ποια η ταχύτητα του σημείου O, την στιγμή που φτάνει στο έδαφος;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς το άκρο της B $I = \frac{1}{3} M \ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση:

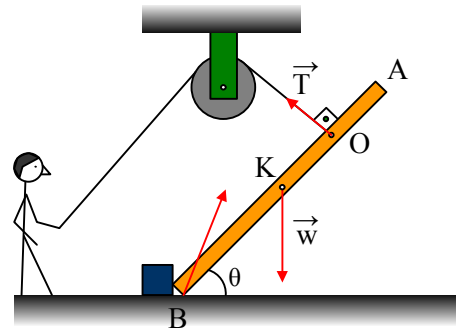
- i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό φαίνονται στο σχήμα.

Επειδή η δοκός ισορροπεί $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau = 0$.

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο B παίρνουμε:

$$T \cdot (BO) - W \cdot (BK) \sin \theta = 0 \text{ ή}$$

$$T = mg(B) \sin \theta / (BO) = 100 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 0,6 / 5 \text{ N} = 360 \text{ N}.$$



- ii) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για την δοκό από την αρχική θέση μέχρι να φτάσει στο έδαφος και έχουμε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \text{ ή}$$

$$mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1) \text{ όπου}$$

$$h = BK \cdot \sin \theta = 3 \cdot 0,8 \text{ m} = 2,4 \text{ m} \text{ και } I = \frac{1}{3} m \ell^2 \text{ οπότε η (1) γίνεται:}$$

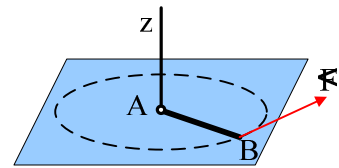
$$mgh = \frac{1}{6} m \ell^2 \omega^2 \text{ ή } \omega^2 = 6gh / \ell^2 = 6 \cdot 10 \cdot 2,4 / 6^2 \text{ (rad/s)}^2 \rightarrow \omega = 4 \text{ rad/s}.$$

Η γραμμική ταχύτητα του σημείου O είναι:

$$v = \omega \cdot R = 2 \cdot 5 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}.$$

Ασκήσεις – Προβλήματα

- 1) Η ομογενής οριζόντια ράβδος AB μήκους $\lambda=2\text{m}$ και μάζας 6g , μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A. Στο άκρο της B ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F=10\text{N}$, που είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο.



- i) Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη και η ροπή αδράνειας της ράβδου

ως προς το άκρο A, $I = \frac{1}{3}M\ell^2$.

- ii) Πόσο είναι το έργο της δύναμης στη διάρκεια της πρώτης και στη διάρκεια της δεύτερης περιστροφής.

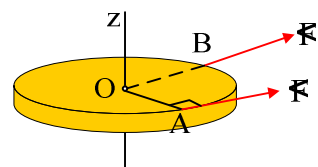
- iii) Για το τέλος της πρώτης και δεύτερης περιστροφής, να βρεθούν:

- η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου,
- ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής,
- η ισχύς της δύναμης F

- 2) Ένας κύλινδρος στρέφεται γύρω από τον άξονά του, με γωνιακή ταχύτητα 8rad/s . Ασκώντας πάνω του εφαπτομενικά δύναμη $F=10\text{N}$, μειώνουμε τη γωνιακή του ταχύτητα σε 6rad/s μέσα σε 5sec . Αν η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι $4\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ζητούνται:

- Να σχεδιάσετε κατάλληλο σχήμα που να φαίνεται η φορά περιστροφής και η δύναμη F και να δικαιολογείστε γιατί μειώθηκε η γωνιακή ταχύτητα.
- Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση και την ακτίνα του κυλίνδρου.
- Ποια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και της στροφορμής του κυλίνδρου, μέσα σε 10sec .

- 3) Ο δίσκος του σχήματος έχει μάζα 5kg , ακτίνα $R=2\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του O και ηρεμεί. Σε μια στιγμή δέχεται μια οριζόντια σταθερή δύναμη F μέτρου 10N , η οποία αρχίζει να ασκείται στο σημείο A, κάθετα στην ακτίνα OA, ενώ μετά από λίγο, λόγω περιστροφής το σημείο εφαρμογής της φτάνει στη θέση B και έχει την διεύθυνση της ακτίνας OB.

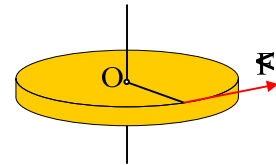


- i) Ποια η ροπή της δύναμης στο σημείο A και ποια στο σημείο B;

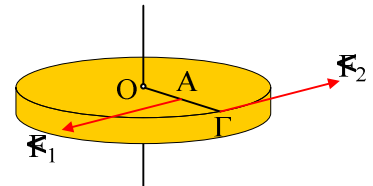
- ii) Έχει ο δίσκος σταθερή γωνιακή ταχύτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- iii) Μπορεί να υπολογισθεί το έργο της δύναμης από τη σχέση:

$$W = \frac{1}{2} \tau \cdot \pi ;$$

- iv) Να βρεθεί το έργο της δύναμης από τη θέση A στη θέση B.
- v) Ποια η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου στη θέση B;
- vi) Ποια η στροφορμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής στις θέσεις A και B; Δίνεται η ροπή αδράνειας $I = \frac{1}{2} mR^2$.
- 4) Ο ομογενής δίσκος του διπλανού σχήματος ακτίνας $R=5\text{m}$, έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του $I=200\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Αρχικά ο δίσκος είναι ακίνητος. Δύναμη σταθερού μέτρου $F=20\text{N}$ ασκείται εφαπτομενικά στον δίσκο για χρονικό διάστημα $\Delta t=10\text{s}$. Να βρείτε:

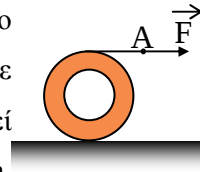


- i) Τη γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο δίσκος,
- ii) το συνολικό έργο της δύναμης,
- iii) τη μέση ισχύ που προσφέρεται στο δίσκο,
- iv) Τη στιγμιαία ισχύ της δύναμης τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$.
- 5) Ένας τροχός ακτίνας R μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα που είναι κάθετος σε αυτόν και περνά από το κέντρο του και ηρεμεί. Για $t=0$ ασκούνται πάνω του δύο οριζόντιες δυνάμεις $F_1=30\text{N}$ και $F_2=10\text{N}$ κάθετες στην ίδια ακτίνα που απέχουν από τον άξονα αποστάσεις $(OA)=0,2\text{m}$ και $(OG) = R = 0,4\text{m}$. Αν η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I=0,4\cdot\text{gm}^2$ και οι δυνάμεις διατηρούνται πάντα κάθετες στη ακτίνα OG , ζητούνται:
- i) Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και η ταχύτητα του σημείου Γ τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$.
- ii) Ο αριθμός των περιστροφών του τροχού και το ολικό έργο των δυνάμεων από 0-4s.
- iii) Η ισχύς της δύναμης F_1 σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iv) Ποια από τις δύο δυνάμεις πρέπει να καταργηθεί τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$, ώστε κάποια στιγμή ο τροχός να σταματήσει;
- v) Ποια στιγμή μηδενίζεται στιγμιαία η γωνιακή ταχύτητα του τροχού;



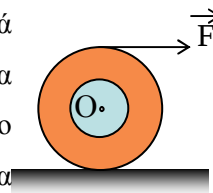
vi) Να γίνει το γράφημα της στροφορμής του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-8s.

- 6) Γύρω από έναν κοίλο κύλινδρο, ο οποίος ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε μια σταθερή οριζόντια δύναμη $F=20\text{N}$. Όταν ο κύλινδρος μετατοπισθεί κατά $x_1=8\text{m}$, το άκρο Α του νήματος έχει μετατοπισθεί κατά $x_A=20\text{m}$.

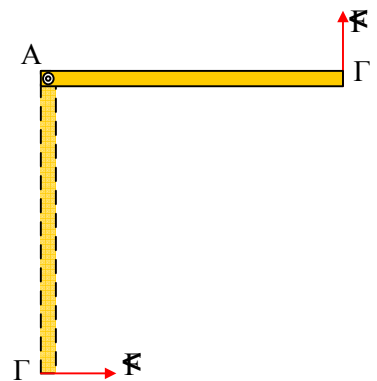


Ζητούνται:

- Η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.
 - Η περιστροφική κινητική του ενέργεια.
- 7) Ο κύλινδρος του σχήματος αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά (στο σχήμα με διαφορετικά χρώματα). Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο άκρο του νήματος σταθερή οριζόντια δύναμη $F=20\text{N}$, οπότε αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Όταν το κέντρο Ο του κυλίνδρου μετατοπισθεί κατά $x_1=4\text{m}$ η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι $K_{\text{μετ}}=90\text{J}$.

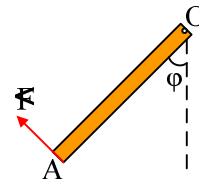


- Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
 - Πόση είναι την παραπάνω χρονική στιγμή η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου;
 - Αν η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από την εξίσωση $I=\lambda m \cdot R^2$, να υπολογιστεί ο συντελεστής λ .
- 8) Η ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μήκος 3m και μάζα $m=10\text{g}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, ισορροπεί δε σε κατακόρυφη θέση, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή ασκούμε στο άκρο της Γ μια δύναμη F , κάθετη στη ράβδο με σταθερό μέτρο $F=240/\pi\text{ N}$ οπότε μετά από λίγο η ράβδος γίνεται οριζόντια. Ζητούνται:
- Η ενέργεια που προσφέραμε στη ράβδο μέσω της δύναμης F ;
 - Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν γίνεται οριζόντια.
 - Η αρχική και η τελική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
 - Η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στην οριζόντια θέση.
- Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που



διέρχεται από το μέσον της $I= \frac{1}{12} M\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

9) Η ομογενής ράβδος του σχήματος μήκους $\ell=1\text{m}$ και μάζας 40kg ισορροπεί με την βοήθεια δύναμης F που είναι κάθετη στο άκρο της A , όπως στο σχήμα, όπου $\varphi=60^\circ$.

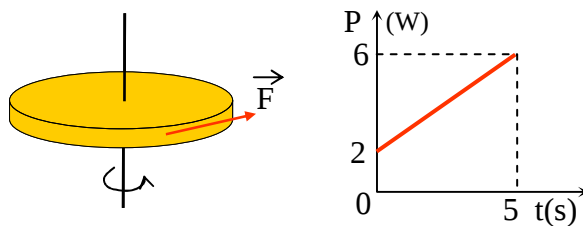


- i) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης F και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο άκρο O .
- ii) Αν το μέτρο της δύναμης F γίνει $F=76\pi$ (N) και είναι συνεχώς κάθετη στο άκρο A να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν φθάσει στην οριζόντια θέση για πρώτη φορά.
- iii) Για την οριζόντια θέση να βρεθούν:
 - a) Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας στη ράβδο μέσω της δύναμης F .
 - b) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου.
 - c) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου.
 - d) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

10) Ένας δίσκος ακτίνας $R=0,5\text{m}$ στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Για $t=0$ δέχεται την επίδραση δύναμης σταθερού μέτρου $F=1\text{N}$ εφαπτόμενης στο δίσκο. Η ισχύς της δύναμης δίνεται στο διάγραμμα.



- i) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης από 0-5s.
- ii) Να βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- iii) Πόση είναι η τελική κινητική ενέργεια του δίσκου;

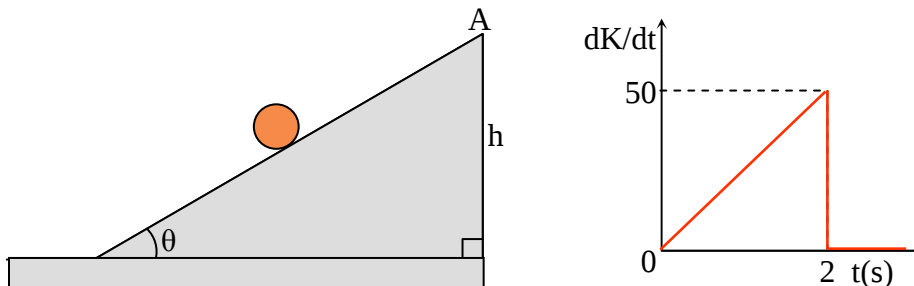
11) Μια ομογενής ράβδος OA μήκους 4m και μάζας 3kg μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το άκρο της O διαγράφοντας κατακόρυφο κύκλο. Στο μέσο M της ράβδου δένουμε μάζα 1kg . Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και την αφήνουμε να κινηθεί.



- i) Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει;

- ii) Αν μετά από λίγο η μάζα m έχει ταχύτητα 4m/s , ποια η κινητική ενέργεια και η στροφορμή του συστήματος;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το O $I = \frac{1}{3}M\ell^2$.



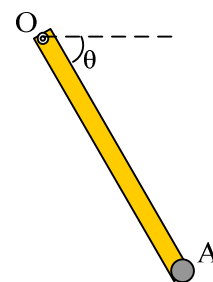
- 12) Μια σφαίρα μάζας $m=10\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ αφήνεται στο σημείο A από ύψος $h=4\text{m}$ να κινηθεί κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσεως $\theta=30^\circ$. Στο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της περιστροφικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο.

- Ποια η τελική περιστροφική κινητική ενέργεια της σφαίρας.
- Ποια η τελική μεταφορική κινητική ενέργεια της σφαίρας.
- Πόση θερμότητα παράγεται κατά την διάρκεια της κίνησης της σφαίρας;
- Αν η ροπή αδράνειας της σφαίρας δίνεται από την εξίσωση $I=\lambda mR^2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή λ .

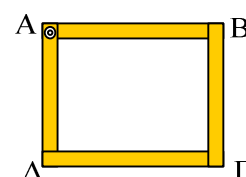
- 13) Μια ξύλινη ομογενής ράβδος μήκους $OA=4\text{m}$ και μάζας 3kg μπορεί να στρέφεται γύρω από το άκρο της O διαγράφοντας κατακόρυφο κύκλο. Στο άκρο A έχουμε δέσει μια μικρή μάζα $m=0,25\text{kg}$. Σε μια στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με τον οριζοντα γωνία $\theta=60^\circ$, η μάζα m έχει ταχύτητα 8m/s . Για την θέση αυτή Να βρεθούν:

- Η συνολική ροπή ως προς το άκρο O .
- Η γωνιακή επιτάχυνση,
- Η ολική κινητική ενέργεια και η συνολική στροφορμή.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.

Για την ράβδο $I_O = 1/3 m\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.



- 14) Χρησιμοποιώντας ομογενείς δοκούς, σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με πλευρές $(AB)=4\text{m}$ και $(B\Gamma)=3\text{m}$ με συνολική μάζα 28kg . Το ορθογώνιο μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος



διέρχεται από την κορυφή Α και βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε η πλευρά ΑΒ να είναι οριζόντια. Αφήνουμε ελεύθερο το ορθογώνιο να κινηθεί. Αν η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I=280 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, ζητούνται:

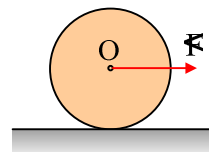
- Η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του ορθογωνίου;
- Η μέγιστη ταχύτητα της κορυφής Γ;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

15) Η μάζα $m=4 \text{ kg}$ του τροχού ενός κάρου ακτίνας 2m , θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Μια μικρή μάζα $0,25 \text{ kg}$ είναι κολλημένη στο μέσο μιας ακτίνας του. Αν το κάρο έχει ταχύτητα 4m/s .

- Ποια η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- Ποια η περίοδος περιστροφής του τροχού.
- Ποια η συνολική κινητική του ενέργεια;

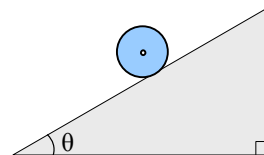
16) Ένας κύλινδρος έχει μάζα 20 kg και ακτίνα $R=1\text{m}$ και ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F=20\text{N}$, όπως στο σχήμα, οπότε μετά από λίγο έχει μετατοπισθεί κατά $x=2\text{m}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τις εξισώσεις Δυναμικής να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F , την ταχύτητα του κέντρου του κυλίνδρου καθώς και την γωνιακή ταχύτητά του, όταν:



- Το επίπεδο είναι λείο.
- Όταν υπάρχει τριβή, οπότε ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς ολίσθηση.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I= \frac{1}{2} m\cdot R^2$.

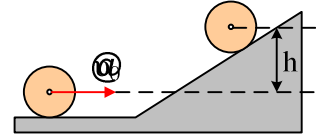
17) Ένας κύλινδρος ακτίνας R αφήνεται να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως θ . Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.



- Αν το επίπεδο είναι λείο, ο κύλινδρος θα ολισθήσει χωρίς να περιστραφεί.
- Αν το επίπεδο δεν είναι λείο:
 - Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου με τη σχέση: $a=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ ανεξάρτητα με τη γωνία θ και το συντελεστή τριβής.
 - Η στροφορμή του κυλίνδρου παραμένει σταθερή.

- c) Για την επιτάχυνση του κυλίνδρου ισχύει $a=g\mu\theta$.
 d) Το έργο της τριβής για μετατόπιση s δίνεται από την εξίσωση: $W = -\mu mgs \cdot \sin\theta$.

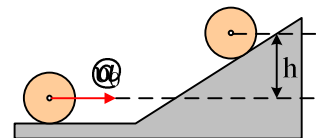
18) Μια σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$ και φθάνει σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=45^\circ$, στο οποίο αρχίζει να ανέρχεται.



- i) Ποιες τιμές μπορεί να έχει ο συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ σφαίρας και κεκλιμένου επιπέδου, ώστε η σφαίρα να συνεχίσει να κυλίνεται;
 ii) Αν ο συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ σφαίρας και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu_s=0,3$, ποιο το μέγιστο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα;

Για τη σφαίρα $I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

19) Ένας τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_{cm}=10\text{m/s}$, όταν συναντά λείο κεκλιμένο επίπεδο, στο οποίο αρχίζει να ανεβαίνει. Να βρείτε το μέγιστο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο θα φτάσει.

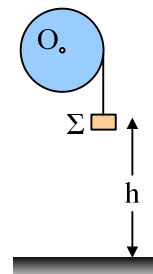


Δίνεται για τον τροχό $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

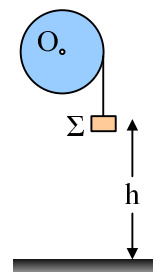
20) Γύρω από έναν κύλινδρο ακτίνας $R=0,6\text{m}$, ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονά του, τυλίγουμε αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένεται ένα σώμα Σ μάζας $k \cdot g$. Το σώμα Σ βρίσκεται σε ύψος $h=7,5\text{m}$ από το έδαφος. Για $t=0$ αφήνουμε το σώμα Σ να πέσει και φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t=3\text{s}$. Αν η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

Ζητούνται:

- i) Να αποδειχθεί ότι το σώμα Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και να βρεθεί η επιτάχυνσή του.
 ii) Η μάζα του κυλίνδρου.
 iii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος για $t=2\text{s}$.
 iv) Τι ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ μεταφέρεται στον κύλινδρο;



21) Δίσκος μάζας 2 kg και ακτίνας $0,4\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το κέντρο του O . Στην άκρη νήματος, που έχει τυλιχθεί



γύρω από τον δίσκο, δένεται σώμα Σ μάζας 1 kg που απέχει $h=10\text{m}$ από το έδαφος και αφήνεται να κινηθεί προς τα κάτω.

- Υπολογίστε τις δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα Σ και την επιτάχυνσή του.
- Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού,
- Με ποια ταχύτητα φτάνει το Σ στο έδαφος και πόση είναι τότε η γωνιακή ταχύτητα του τροχού;
- Πόσο είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του δίσκου και του σώματος, όταν αυτό φτάνει στο έδαφος.

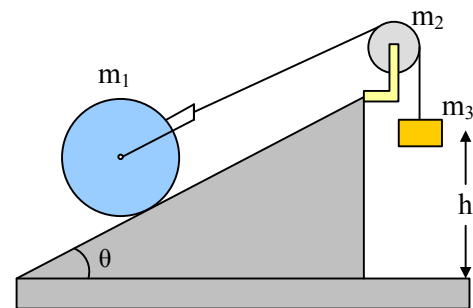
Για τον δίσκο $I = \frac{1}{2} mR^2$. $g=10\text{m/s}^2$.

- 22) Στο διπλανό σχήμα ο κύλινδρος έχει μάζα $m_1=2\text{ kg}$ κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσεως $\theta=30^\circ$, η τροχαλία έχει μάζα $m_2=6\text{ kg}$, το σχοινί είναι αβαρές και το σώμα που είναι δεμένο στο άλλο του άκρο έχει μάζα $m_3=3\text{ kg}$. Το σχοινί δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας. Αφήνουμε το σώμα μάζας m_3 από ύψος $h=2\text{m}$ από το έδαφος.

- Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα m_1 και m_3 και να τις υπολογίσετε.
- Να βρείτε τα έργα των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα μέχρι το σώμα m_3 να φτάσει στο έδαφος.
- Να γράψετε το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σύστημα κύλινδρος – τροχαλία- σώμα και να βρείτε την ταχύτητα με την οποία το σώμα μάζας m_3 φτάνει στο έδαφος.

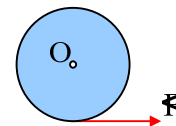
Δίνονται οι ροπές αδράνειας:

Για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$, για την τροχαλία $I=mR^2$, $g=10\text{m/s}^2$.



- 23) Γύρω από έναν κυκλικό δίσκο μάζας $M=10\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$ τυλίγουμε ένα λεπτό νήμα. Τοποθετούμε τον δίσκο σε λείο οριζόντιο επίπεδο με το επίπεδό του οριζόντιο και τραβώντας το νήμα ασκούμε πάνω του σταθερή οριζόντια δύναμη $F=10\text{N}$.

- Να περιγράψετε την κίνηση του δίσκου.
- Να υπολογίστε την επιτάχυνση του κέντρου O του δίσκου, καθώς και την γωνιακή επιτάχυνσή του.
- Για χρονικό διάστημα $t=4\text{s}$, ζητούνται:
 - Η μετατόπιση και η ταχύτητα του κέντρου O του δίσκου.
 - Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.



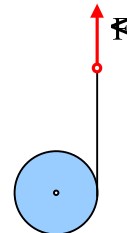
- c) Το μήκος του νήματος που ξετυλίχθηκε.
- d) Το έργο της δύναμης F .
- e) Η κινητική ενέργεια του δίσκου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του $I = \frac{1}{2} MR^2$.

24) Γύρω από ομογενή κύλινδρο μάζας $m=0,2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ είναι τυλιγμένο ένα αβαρές νήμα. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε κατακόρυφη δύναμη F , προς τα πάνω, έτσι ώστε ο κύλινδρος να παραμένει στη θέση του, όταν το νήμα ξετυλίγεται.

- i) Να βρείτε τη δύναμη F .
- ii) Πόσο είναι το έργο της δύναμης F από $t=0$, μέχρι τη στιγμή που ο κύλινδρος αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega=40\text{rad/s}$;
- iii) Πόσο νήμα έχει ξετυλιχθεί στο παραπάνω χρονικό διάστημα;
- iv) Ποια χρονική στιγμή ο κύλινδρος αποκτά γωνιακή ταχύτητα 40rad/s ;

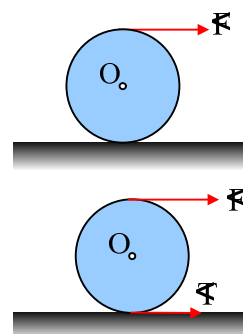
Δίνονται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.



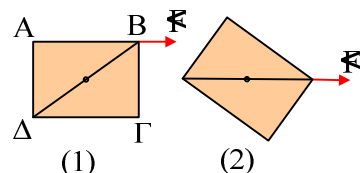
25) Γύρω από δύο όμοιους ομογενείς κυλίνδρους τυλίγουμε αβαρή νήματα. Τοποθετούμε τον πρώτο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και τον δεύτερο σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές. Τραβώντας τα νήματα ασκούμε πάνω τους ίσες δυνάμεις για ίσα χρονικά διαστήματα t_1 , όπως στο σχήμα. Με δεδομένο ότι ο δεύτερος κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, να συγκρίνετε:

- i) Τις επιταχύνσεις των αξόνων των δύο κυλίνδρων.
- ii) Τις ταχύτητες που αποκτούν οι δύο κύλινδροι.
- iii) Τις γωνιακές ταχύτητες των δύο κυλίνδρων.
- iv) Τις οριζόντιες μετατοπίσεις των κέντρων μάζας των κυλίνδρων.
- v) Τις κινητικές ενέργειες των δύο κυλίνδρων.
- vi) Τα έργα των δύο δυνάμεων.

Δίνεται για τους κυλίνδρους $I = \frac{1}{2} MR^2$.



26) Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ορθογώνια πλάκα μάζας $M=12 \text{ kg}$ και πλευρών $a=4\text{m}$ και $b=3\text{m}$. Σε μια στιγμή δέχεται στην κορυφή

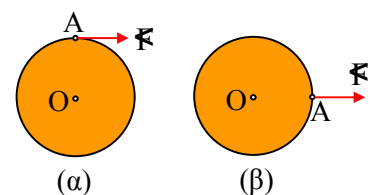


Β μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=24\text{N}$, οπότε μετά από χρόνο $t=1\text{s}$ η πλάκα έχει περιστραφεί κατά θ , φτάνοντας στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 2 .

- i) Να περιγράψετε την κίνηση της πλάκας.
 - ii) Να χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις:
 - a) Η πλάκα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση.
 - b) Η πλάκα στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.
 - c) Η πλάκα στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.
 - d) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της πλάκας μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση $\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$.
 - iii) Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου Ο της πλάκας στη θέση (2).
 - iv) Βρείτε το έργο της δύναμης F μεταξύ των θέσεων (1) και (2).
 - v) Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα της πλάκας στη θέση (2);
- Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς άξονα κάθετο στην

$$\text{πλάκα που διέρχεται από το κέντρο της } I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

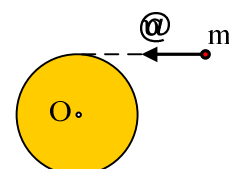
- 27) Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας $R=0,4\text{m}$ και μάζας $m=50\text{ kg}$. Σε ένα σταθερό σημείο Α του δίσκου ασκείται μια σταθερή δύναμη με μέτρο $F=50\text{N}$, όπως στο σχήμα (α) οπότε μετά από χρόνο $t=2\text{s}$ ο δίσκος βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα (β), για πρώτη φορά. Ζητούνται:



- i) Η ταχύτητα του κέντρου Ο του δίσκου στη θέση (β).
- ii) Το έργο της δύναμης από τη θέση (α) μέχρι τη θέση (β).
- iii) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου στη θέση (β).

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του Ο: $I = \frac{1}{2} mR^2$.

- 28) Η σφαίρα του σχήματος έχει μάζα $M=1\text{ kg}$, ακτίνα $R=20\text{cm}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το



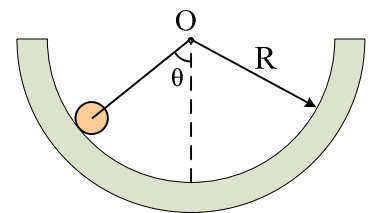
κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η σφαίρα είναι ακίνητη. Ένα σώμα μάζας $m=10\text{g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0=50\text{m/s}$, συγκρούεται και κολλά στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας, όπως στο σχήμα.

- Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά από την κρούση.
- Προσδιορίστε πόση ενέργεια «χάθηκε» κατά την κρούση.
- Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις, αν η σφαίρα ήταν αρχικά ακίνητη σε λείο οριζόντιο επίπεδο;

Για την σφαίρα $I = \frac{2}{5} MR^2$.

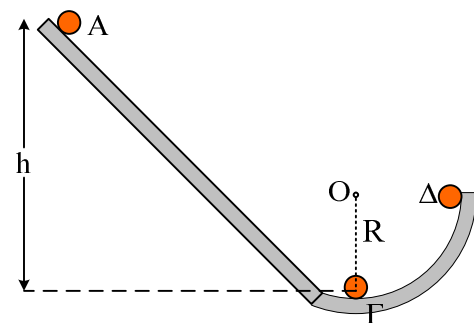
- 29) Μια μικρή ομογενής σφαίρα ακτίνας $r=15\text{cm}$ τοποθετείται στην εσωτερική επιφάνεια ενός ημισφαιρικού κυπέλλου ακτίνας $R=1\text{m}$ και αφήνεται να κυλήσει, χωρίς ολίσθηση από μια θέση που σχηματίζει γωνία $\theta=60^\circ$ με την κατακόρυφη. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας όταν φτάνει στο χαμηλότερο σημείο του κυπέλλου.

Για τη σφαίρα $I = \frac{2}{5} mr^2$.



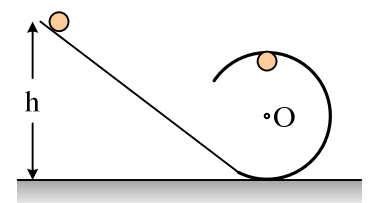
- 30) Μια μικρή σφαίρα μάζας $m=0,7\text{ kg}$ αφήνεται να κινηθεί από το σημείο A σε ύψος $h=4\text{m}$ και κυλιέται χωρίς ολίσθηση κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου φτάνοντας στη βάση ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R=0,5\text{m}$ (θέση Γ), ενώ φτάνοντας στη θέση Δ εγκαταλείπει το τεταρτοκύκλιο και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Να βρεθούν:

- Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου στη θέση Γ .
 - Το μέγιστο ύψος πάνω από το σημείο Δ που θα φτάσει η σφαίρα.
- Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ και $g = 10\text{ m/s}^2$.



- 31) Στο διπλανό σχήμα η ομογενής σφαίρα, μάζας 1 kg και ακτίνας $r = 0,4\text{ m}$, αφήνεται στο σημείο A του κεκλιμένου επιπέδου που βρίσκεται σε ύψος h . Η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο αλλά και στο εσωτερικό της κυκλικής στεφάνης, ακτίνας $R = 20\text{ m}$.

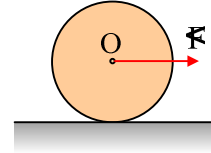
- Τι ταχύτητα πρέπει να έχει η σφαίρα στο ανώτερο σημείο Γ της στεφάνης, ώστε να κάνει ασφαλή ανακύκλωση;
- Ποια η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας;
- Βρείτε τη στροφορμή της σφαίρας ως προς άξονα, κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο O της κυκλικής στεφάνης.



- iv) Ποιο είναι το ελάχιστο ύψος h του κέντρου της σφαίρας από το έδαφος, ώστε να κάνει ασφαλή ανακύκλωση;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

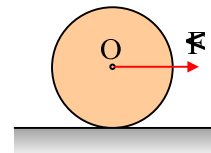
- 32) Ένας κύλινδρος μάζας $m=4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{m}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $F=6\text{N}$, η οποία ασκείται στο κέντρο O του κυλίνδρου, όπως στο σχήμα. Ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



- Ποια η επιτάχυνση που αποκτά ο κύλινδρος;
- Να υπολογιστεί το μέτρο της τριβής που ασκείται στον κύλινδρο και να αποδείξετε ότι έχει φορά προς τ' αριστερά.
- Πόση είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, όταν έχει κυλήσει κατά απόσταση $d=2\text{m}$;
- Κατά την παραπάνω μετακίνηση να υπολογίσετε τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στο κύλινδρο. Πώς συνδέονται τα έργα αυτά με την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου;

Για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m R^2$.

- 33) Ένας κύλινδρος μάζας $m=20 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $F=80\text{N}$, η οποία ασκείται στο κέντρο O του κυλίνδρου, όπως στο σχήμα. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους είναι $\mu_s = \mu = 0,1$.

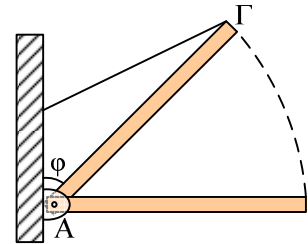


- Να αποδειχθεί ότι στον κύλινδρο ασκείται τριβή ολίσθησης με φορά προς τα αριστερά.
- Ποια η επιτάχυνση που αποκτά ο κύλινδρος;
- Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Ποια η ταχύτητα του κέντρου O του κυλίνδρου και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου για $t=4\text{s}$;
- Για το χρονικό διάστημα από $0-4\text{s}$, να βρείτε:
 - Την ενέργεια που δόθηκε στον κύλινδρο μέσω του έργου της δύναμης F .
 - Με ποιες μορφές εμφανίζεται η παραπάνω ενέργεια και τι ποσό αντιστοιχεί σε κάθε μορφή;
 - Κατά πόσο διάστημα s_1 γλίστρησε ο κύλινδρος στο παραπάνω χρονικό διάστημα; Τι μετράει το γινόμενο $T \cdot s_1$;

d) Τι μετράει το έργο της ροπής της τριβής;

Για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

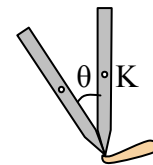
34) Μια ομογενής ράβδος μήκους $l = 6 \text{ m}$ και μάζας $m = 0,8 \text{ kg}$ είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, ενώ ισορροπεί όπως στο σχήμα, όταν το άλλο της άκρο Γ, συνδέεται μέσω νήματος με τον κατακόρυφο τοίχο. Η γωνία ϕ που σχηματίζει η ράβδος με τον τοίχο, έχει $\eta\mu\phi = 0,6$. Σε μια στιγμή κόβεται το νήμα. Αν η ράβδος στρέφεται γύρω από το άκρον της Α χωρίς τριβές, να βρεθούν για τη στιγμή που η ράβδος γίνεται οριζόντια:



- Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου,
- Η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο σημείο Α.

Για την ράβδο $I_A = \frac{1}{3} m\ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

35) Τοποθετούμε τη μύτη ενός μολυβιού μήκους 12 cm στο νύχι του χεριού μας και φέρνουμε το μολύβι σε κατακόρυφη θέση. Αφήνουμε το μολύβι να πέσει, οπότε η μύτη του εγκαταλείπει το νύχι σε μια θέση που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Ζητούνται:



- Η γωνία θ .
- Η γωνιακή ταχύτητα του μολυβιού τη στιγμή που χάνει την επαφή με το νύχι.
- Πόση είναι η ταχύτητα του κέντρου Κ του μολυβιού στην παραπάνω θέση;

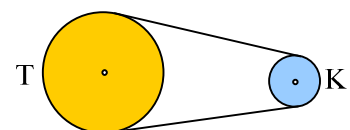
Δίνεται η ροπή αδράνειας του μολυβιού ως προς κάθετο σε αυτό άξονα που περνά από το μέσον του Κ, που θεωρείται και κέντρο

μάζας του μολυβιού $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M\ell^2$, όπου ℓ το μήκος του.

Υπόδειξη: Πόση δύναμη δέχεται το μολύβι από το νύχι τη στιγμή που το εγκαταλείπει και τι ταχύτητα έχει το κέντρο Κ;

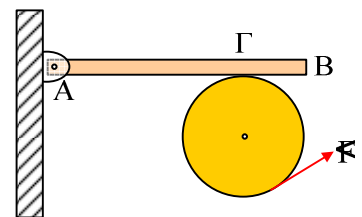
Γύρω από ποιο σημείο στρέφεται το μολύβι για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή με το νύχι;

36) Ο διπλανός τροχός Τ έχει ροπή αδράνειας ως προς τον σταθερό άξονα περιστροφής του $I = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ και στρέφεται χωρίς τριβές με τη βοήθεια ηλεκτρικού κινητήρα Κ. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο τροχός είναι ακίνητος και ο κινητήρας του ασκεί σταθερή ροπή $\tau = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$.



- i) Να βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού
- ii) Γιατί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού είναι σταθερός; Να τον υπολογίσετε.
- iii) Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{2} \pi \text{ s}$ πόσες στροφές κάνει ο τροχός;
- iv) Πόσο είναι το έργο της δύναμης του κινητήρα στο χρονικό διάστημα $0 - \sqrt{2} \pi \text{ s}$
- v) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ισχύος του κινητήρα σε συνάρτηση με το χρόνο.

37) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος 2m και μάζα $m=3 \text{ kg}$ και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε κύλινδρο ακτίνας $R=1\text{m}$ και μάζας 20 kg , ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος συμπίπτει με τον άξονά του, στο σημείο Γ , όπου $(A\Gamma)=1,5\text{m}$, ενώ το άλλο του άκρο έχει αρθρωθεί σε κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου είναι $\mu=0,5$ ενώ αρχικά ο κύλινδρος ηρεμεί.



- i) Βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στα σημεία A και Γ.
- ii) Για $t=0$ ασκούμε εφαπτομενικά στον κύλινδρο δύναμη σταθερού μέτρου $F=20\text{N}$, όπως στο σχήμα.

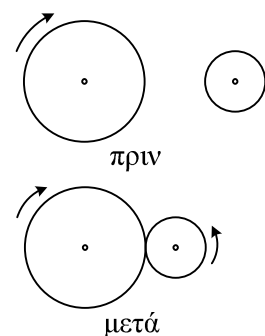
- a) Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά ο κύλινδρος.
- b) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου;

iii) Για την χρονική στιγμή $t=4\text{s}$:

- a) Με ποιο ρυθμό μεταφέρεται ενέργεια στον κύλινδρο μέσω της δύναμης F ;
- b) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου;

Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2}m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

38) Δύο κύλινδροι ακτίνας $R_1=0,2\text{m}$, $R_2=0,1\text{m}$ και μάζας $m_1=4 \text{ kg}$, $m_2=1 \text{ kg}$ μπορούν να περιστρέφονται σε άξονες παράλληλους μεταξύ τους. Ο κύλινδρος ακτίνας R_1 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=16\text{rad/s}$, ενώ ο άλλος είναι ακίνητος. Φέρνουμε σε επαφή τους δύο κυλίνδρους ώστε οι άξονές τους να παραμείνουν παράλληλοι. Μετά από κάποιο χρόνο οι δύο κύλινδροι περιστρέφονται χωρίς να ολισθαίνει ο ένας ως προς τον άλλον. Να υπολογίσετε :



- i) την κοινή γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειάς των δύο κυλίνδρων, που τελικά θα αποκτηθεί
- ii) το ποσό θερμότητας που ελευθερώθηκε.
- iii) Κάποια στιγμή, πριν οι κύλινδροι να αποκτήσουν την ίδια γραμμική ταχύτητα, ο μεγάλος κύλινδρος έχει γωνιακή επιβράδυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = -2\text{rad/s}^2$. Πόση γωνιακή επιτάχυνση έχει τη στιγμή αυτή ο μικρός κύλινδρος;

Δίνεται η ροπή αδράνειας κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} MR^2$.

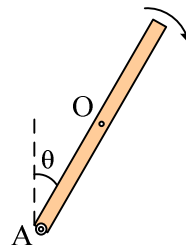
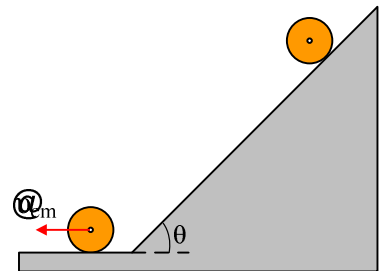
39) Ομογενής σφαίρα μάζας $m=2\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ αφήνεται να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=45^\circ$ και μετά από λίγο φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_{cm} . Η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου της σφαίρας είναι $h=3,5\text{m}$. Να υπολογιστούν:

- i) Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ σφαίρας και κεκλιμένου επιπέδου, ώστε η σφαίρα να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.
- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, ως προς τον άξονα περιστροφής της, κατά την κίνησή της στο κεκλιμένο επίπεδο.
- iii) Η στροφορμή της σφαίρας, ως προς τον άξονα περιστροφής της, όταν φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο.
- iv) Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας στο οριζόντιο επίπεδο.
- v) Ο λόγος της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια της σφαίρας όταν φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο.
- vi) Το μέτρο της σταθερής ροπής που πρέπει να ασκηθεί στη σφαίρα όταν φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο, ώστε να σταματήσει αφού διατρέξει απόσταση $x=2,5\text{m}$

Δίνονται η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

40) Μια ράβδος μήκους ℓ , στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α, ξεκινώντας με μηδενική γωνιακή ταχύτητα από την κατακόρυφη θέση. Σε μια στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$ έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega=1\text{rad/s}$.

- i) Βρείτε το μήκος ℓ της ράβδου.
- ii) Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου στη θέση αυτή;



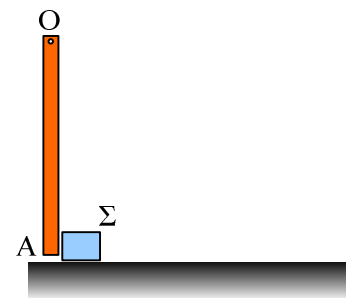
- iii) Αν ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου στην θέση αυτή είναι ίσος με 240J/s , να υπολογίστε τη μάζα της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής

$$\text{της } I = \frac{1}{3} M \ell^2 \quad \text{και } g = 10 \text{m/s}^2.$$

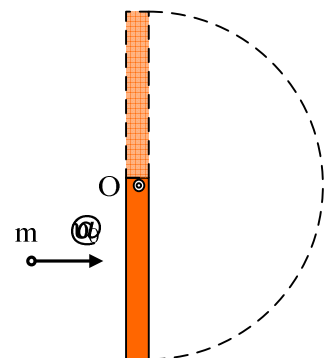
- 41) Η ομογενής ράβδος OA του σχήματος έχει μήκος $\ell = 2\text{m}$ και μάζα $m = 6\text{ kg}$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της O, ηρεμεί δε σε κατακόρυφη θέση και εφάπτεται στο κάτω άκρο της σε σώμα Σ, μάζας 2 kg , το οποίο θεωρείται υλικό σημείο.

Εκτρέπουμε τη ράβδο από την κατακόρυφο κατά γωνία θ , όπου $\sin\theta = 0,4$ και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί. Μόλις γίνει κατακόρυφη συγκρούεται στο άκρο της A με το σώμα Σ. Μετά τη κρούση το σώμα Σ διανύει απόσταση $x = 3,6\text{m}$ στο οριζόντιο επίπεδο, μέχρι να σταματήσει. Δίνεται ότι το σώμα Σ παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{3} M \ell^2$ και $g = 10 \text{m/s}^2$.



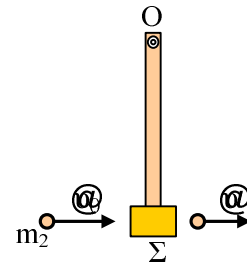
Ζητούνται:

- Η ταχύτητα που αποκτά μετά τη κρούση το σώμα Σ.
 - Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, πριν και μετά τη κρούση.
 - Η απώλεια της Μηχανικής ενέργειας κατά την διάρκεια της κρούσης.
 - Πώς θα χαρακτηρίζατε την παραπάνω κρούση ελαστική ή όχι;
- 42) Η σανίδα του σχήματος μάζας $M = 6\text{ kg}$ και μήκους $\ell = 2,4\text{m}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της O και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Ένα βλήμα μάζας $m = 0,4\text{ kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_0 και σφηνώνεται στο μέσον της σανίδας.
- Ποια η ελάχιστη ταχύτητα v_0 , ώστε το σύστημα να μπορεί να εκτελέσει πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα.
 - Πόση είναι η απώλεια της Μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση, για την τιμή της ταχύτητας v_0 , που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα;



Για την σανίδα $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$. $g=10\text{m/s}^2$.

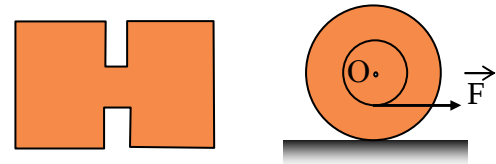
43) Μια σανίδα μήκους $\ell=2\text{m}$ και μάζας 3 kg , μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Στο κάτω άκρο της δένεται σώμα Σ μάζας $m_1=1\text{kg}$ (το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο). Ένα βλήμα μάζας $m_2=0,1\text{ kg}$ το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0=200\text{m/s}$, συγκρούεται με το σώμα Σ , το διαπερνά και εξέρχεται με ταχύτητα $v=40\text{m/s}$.



- i) Ποια η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Ποια η απώλεια της Μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στη

κρούση. Για την σανίδα $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

44) Στο μέσον ενός κυλίνδρου ακτίνας $R=0,2\text{m}$, υπάρχει μια μικρή εγκοπή βάθους $0,1\text{m}$, στην οποία τυλίγουμε αβαρές νήμα και τοποθετούμε τον κύλινδρο σε οριζόντιο επίπεδο. Τραβώντας το νήμα ασκούμε στον κύλινδρο οριζόντια δύναμη $F=6\text{N}$, όπως στο σχήμα, οπότε το κέντρο του O μετατοπίζεται κατά $x_1=10\text{m}$ σε ορισμένο χρονικό διάστημα t_1 . Αν η μέγιστη τιμή της τριβής που μπορεί να ασκηθεί στον κύλινδρο είναι $T_{\text{op}}=T_{\text{ολ}}=1\text{N}$, να βρεθούν για το παραπάνω διάστημα:

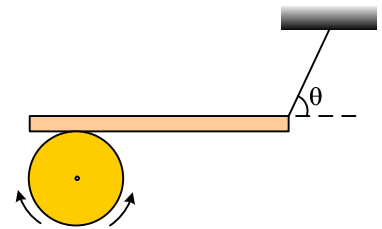


- i) Ποια η φορά περιστροφής του κυλίνδρου;
- ii) Η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.
- iii) Η περιστροφική κινητική του ενέργεια.
- iv) Η θερμότητα που παράγεται εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m R^2$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

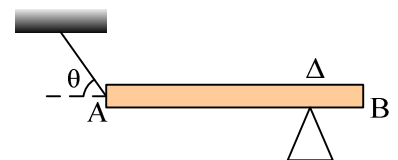
- 1) Μια ομογενής ράβδος μήκους 6m και μάζας 5 kg ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε ακίνητο κύλινδρο, σ' απόσταση $d=1\text{m}$ από το ένα του άκρο, ενώ στο άλλο άκρο είναι δεμένη με νήμα που σχηματίζει γωνία θ , με τον ορίζοντα, όπου $\eta\mu\theta=0,8$.



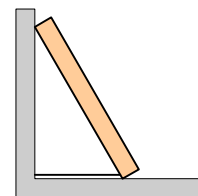
- i) Να βρεθεί η τάση του νήματος, καθώς και η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον κύλινδρο.
 ii) Αν οι συντελεστές τριβής μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου είναι $\mu_s=\mu=0,6$ και ο κύλινδρος τεθεί σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα ω , να εξετάσετε αν η ράβδος θα συνεχίσει να ισορροπεί, όταν:

α) $\omega_1=2\text{rad/s}$ και β) $\omega_2=-2\text{rad/s}$.

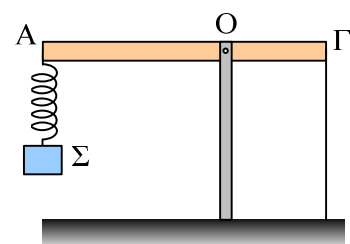
- 2) Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στο σημείο Δ όπου $(\Delta B)=\frac{1}{4}(AB)$. Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ στηρίγματος και ράβδου είναι $\mu_s=0,5$, ποια η ελάχιστη τιμή της γωνίας θ , που σχηματίζει το νήμα με τον ορίζοντα, για να μπορεί να ισορροπεί η ράβδος;



- 3) Η ράβδος του σχήματος, βάρους $w=50\text{N}$ ισορροπεί στηριζόμενη σε λείο κατακόρυφο τοίχο, ενώ το κάτω άκρο του είναι δεμένο με οριζόντιο νήμα με τον τοίχο. Αν το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και $\theta=60^\circ$, να βρείτε την τάση του νήματος.



- 4) Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ με μήκος $L=1,6\text{m}$ και μάζα $M=8\text{g}$ ισορροπεί οριζόντια. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος σε αυτή και διέρχεται από το σημείο Ο, το οποίο απέχει $d=0,4\text{m}$ από το άκρο της Γ. Το άκρο Γ συνδέεται με τεντωμένο νήμα με το έδαφος. Στ άκρο Α είναι δεμένο το ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου στο ελεύθερο άκρο του οποίου κρέμεται σώμα Σ, μάζας $m=2\text{ kg}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκτρέπουμε κατακόρυφα το σώμα Σ από τη θέση ισορροπίας του και αφήνοντάς το εκτελεί α.α.τ. Η ταχύτητα του σώματος Σ δίνεται από την εξίσωση:



$$v = 2\pi \nu 10t \text{ (S.I.)}$$

- i) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ και τη σταθερά k του ελατηρίου.
- ii) Να υπολογίσετε το μέτρο και να προσδιορίσετε την κατεύθυνση της δύναμης, που ασκεί το ελατήριο στη ράβδο, όταν το σώμα Σ βρίσκεται στις δύο ακραίες θέσεις της τροχιάς του.
- iii) Βρείτε το μέτρο της τάσης του νήματος τη στιγμή που το σώμα Σ βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του.
- iv) Όταν το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ είναι $dp/dt = 0$, κόβουμε ακαριαία το νήμα στο άκρο Γ . Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, μόλις κοπεί το νήμα.
- v) Ποιο το μέτρο του αντίστοιχου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, αν κόβαμε το νήμα, τη στιγμή που το σώμα Σ βρισκόταν στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο προς αυτήν

άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$ και

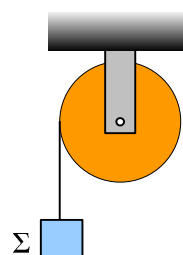
$g = 10 \text{ m/s}^2$. Δίνεται επίσης ότι κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ το νήμα είναι πάντα τεντωμένο.

- 5) Μια ράβδος μάζας $m = 16 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 3 \text{ m}$ μπορεί να στρέφεται οριζόντια γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο O , όπου $(AO) = 0,75 \text{ m}$. Ασκούμε στο άκρο B οριζόντια δύναμη $F = 7 \text{ N}$, η οποία είναι πάντα κάθετη στη ράβδο, οπότε σε χρόνο 8 s η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega = 6 \text{ rad/s}$. Να βρείτε:

- i) Την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
- ii) Την ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.
- iii) Αν ο άξονας περιστροφής περνάει από το άκρο A :
- iv) Ποια η ροπή αδράνειας της ράβδου;
- v) Ποια η γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτούσε η ράβδος στο ίδιο χρονικό διάστημα;



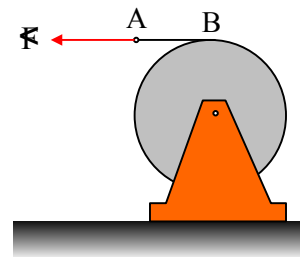
- 6) Στην τροχαλία του σχήματος μάζας 6 kg και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$, τυλίγεται αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου δένεται σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$. Η τροχαλία μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο της K . Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο και αυτό κατεβαίνει με επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$.



- i) Να βρείτε τη ροπή που δέχεται ο άξονας περιστροφής της τροχαλίας λόγω των τριβών.
- ii) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας μετά από χρόνο 2s από την αρχή της κίνησής της;
- iii) Να κάνετε το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας σε συνάρτηση με το χρόνο και από το διάγραμμα αυτό να υπολογίσετε τη γωνία στροφής της τροχαλίας στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Δίνονται για την τροχαλία $I = \frac{1}{2} MR^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

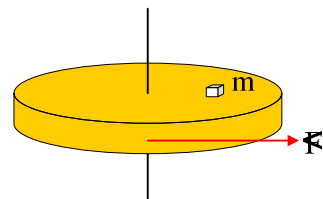
- 7) Ο τροχός του σχήματος έχει μάζα $m = 10 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,5 \text{ m}$, μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του K . Ο άξονας στηρίζεται σε βάση, η οποία είναι τοποθετημένη σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Η βάση μαζί με τον άξονα και τα στηρίγματα έχουν μάζα $M = 10 \text{ kg}$. Γύρω από τον τροχό είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου το τραβάμε με σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F_1 = 10 \text{ N}$ από $t = 0$ έως $t_1 = 4 \text{ s}$, ενώ κατόπιν αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_2 = 50 \text{ N}$, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$. Να βρείτε:



- i) Την συνολική μετατόπιση της βάσης μέχρι τη στιγμή t_2 .
- ii) Πόσες συνολικά περιστροφές έκανε ο τροχός μέχρι τη στιγμή t_2 ;
- iii) Την μετατόπιση του άκρου A του νήματος μέχρι τη στιγμή t_2 .

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 8) Οριζόντιος κυκλικός δίσκος μάζας $M = 1 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ μπορεί να περιστραφεί γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του και είναι ακίνητος. Ένας μικρός κύβος μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ τοποθετείται σε απόσταση $r = 10 \text{ cm}$ από τον άξονα περιστροφής. Εφαρμόζουμε για $t = 0$ στον δίσκο εφαπτομενικά μια σταθερού μέτρου οριζόντια δύναμη F , η οποία προσδίδει στο δίσκο σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0,4 \text{ rad/s}^2$. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ δίσκου και κύβου είναι $\mu = 0,36$, να υπολογιστούν:

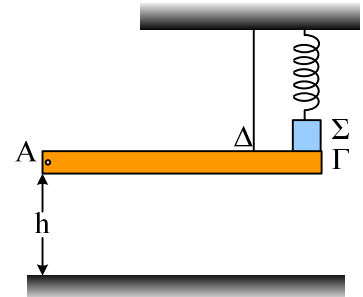


- i) Το μέτρο της δύναμης F .
- ii) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου, τη στιγμή που θα αρχίσει η ολίσθηση του κύβου.
- iii) Η χρονική στιγμή που αρχίζει η ολίσθηση του κύβου.

iv) Ο αριθμός των περιστροφών μέχρι να αρχίσει η ολίσθηση του κύβου.

Δίνεται για τον δίσκο $I = \frac{1}{2} MR^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 9) Μια ομογενής δοκός ΑΓ μήκους $\ell = 4 \text{ m}$ και μάζας $M = 50 \text{ kg}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, ενώ ισορροπεί οριζόντια δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος που έχει δεθεί στο σημείο Δ, όπου $(\Delta\Gamma) = 1 \text{ m}$. Η δοκός βρίσκεται σε ύψος $h = 1,2 \text{ m}$ από το έδαφος. Στο άκρο Γ της δοκού ηρεμεί ένα σώμα Σ, μάζας 5 kg , το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο και το οποίο είναι δεμένο στο άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος.



i) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος.

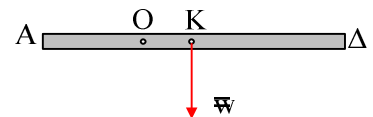
ii) Σε μια στιγμή το νήμα κόβεται.

- Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να βρείτε τις επιταχύνσεις του άκρου Γ της δοκού και του σώματος Σ.
- Με ποια ταχύτητα το άκρο Γ θα κτυπήσει στο έδαφος;
- Ποιο το ελάχιστο ύψος από το έδαφος που θα φτάσει το σώμα Σ;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής

$$I = \frac{1}{3} M \ell^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- 10) Μια ομογενής ράβδος ΑΔ μήκους $\ell = 6 \text{ m}$ και μάζας $M = 2 \text{ kg}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από ένα σημείο της Ο και είναι κάθετος σε αυτήν. Η απόσταση του σημείου Ο από το κέντρο μάζας Κ της ράβδου είναι $x = 1 \text{ m}$.



i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της

ii) Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση. Να υπολογίσετε:

- Την επιτάχυνση του σημείου Δ στην οριζόντια θέση.
- Τη γωνιακή ταχύτητα και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου όταν αυτή έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = 30^\circ$.

iii) Ένα βλήμα μάζας $m=1\text{ kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα

μέτρου $v=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{ m/s}$ συγκρούεται πλαστικά στο κάτω άκρο Δ, τη

στιγμή που η ράβδος περνά από την κατακόρυφη θέση για πρώτη φορά. Αν το βλήμα κινείται με κατεύθυνση αντίθετη από το άκρο Δ της ράβδου, να βρείτε προς ποια κατεύθυνση και με ποια γωνιακή ταχύτητα θα στραφεί το σύστημα ράβδος-βλήμα μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι

κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το μέσον της $I=\frac{1}{12}M\ell^2$ και

$g=10\text{ m/s}^2$.

11) Η ομογενής δοκός AB του σχήματος έχει μάζα 12 g και μήκος 4 m και μπορεί να στρέφεται οριζόντια πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το σημείο O, όπου $(AO)=1\text{ m}$. Στο άκρο B, για $t=0$, ασκείται σταθερού μέτρου οριζόντια δύναμη $F=7\text{ N}$, η οποία παραμένει συνεχώς κάθετη στη δοκό.

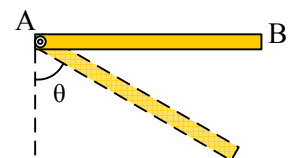


- Πόση γωνιακή επιτάχυνση αποκτά;
- Ποια η γωνιακή ταχύτητα και η κινητική ενέργεια της ράβδου τη χρονική στιγμή $t_1=4\text{ s}$;
- Βρείτε την στροφορμή και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής τη στιγμή t_1 .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I_{\text{cm}}=\frac{1}{12}M\ell^2$.

12) Μια ομογενής ράβδος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρον της A. Αφήνουμε τη ράβδο να κινηθεί από την οριζόντια θέση, οπότε μετά από λίγο σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Ζητούνται:



- Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου σε συνάρτηση με τη γωνία θ και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- Η γωνιακή της ταχύτητα σε συνάρτηση με τη γωνία θ .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

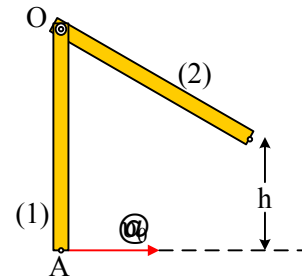
διέρχεται από το μέσον της $I_{\text{cm}}=\frac{1}{12}M\ell^2$.

13) Μια ομογενής ράβδος OA μήκους $l=2\text{m}$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρον της O, χωρίς τριβές. Σε μια στιγμή περνά από την κατακόρυφο θέση (1) και η ταχύτητα του άκρου A είναι $v_0=6\text{m/s}$.

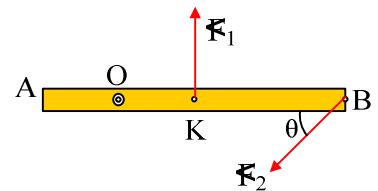
- Σε πόσο ύψος h θα φτάσει το άκρο A της ράβδου (θέση (2));
- Ποια η επιτάχυνση του άκρου A της ράβδου στη θέση (2);
- Βρείτε το έργο των ροπών που ασκούνται στη ράβδο από τη θέση (1) μέχρι τη θέση (2), αν η μάζα της είναι $m=2\text{ kg}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.



14) Μια ράβδος μήκους 4m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο O, όπου $(AO)=1\text{m}$. Για $t=0$ ασκούνται πάνω της δύο σταθερού μέτρου οριζόντιες δυνάμεις. Η $F_1=56\text{N}$ κάθετη στη ράβδο η οποία ασκείται στο μέσον της K, ενώ η $F_2=28\text{N}$ ασκείται στο άκρο B σχηματίζοντας γωνία $\theta=30^\circ$ με τη ράβδο. Μετά από $t=1\text{min}$ η ράβδος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega=30\text{rad/s}$ και παύει να ασκείται πάνω της η δύναμη F_1 .



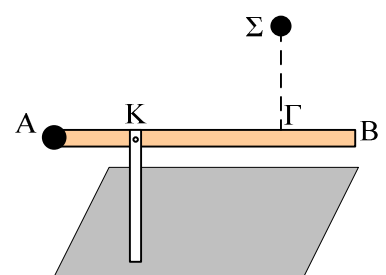
Ζητούνται:

- Η μάζα της ράβδου.
- Το έργο της δύναμης F_1 .
- Η ισχύς της ροπής της F_2 τη χρονική στιγμή $t=1\text{min}$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της για $t=20\text{s}$.
- Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου από $0-100\text{s}$.
- Η μεταβολή της στροφορμής της ράβδου, ως προς τον άξονα περιστροφής της από $60\text{s}-100\text{s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

15) Μια ράβδος AB μήκους $\ell=4\text{m}$ και μάζας $M=4\text{kg}$, που μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που



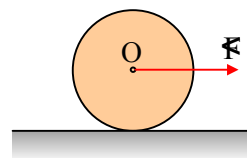
διέρχεται από σημείο της K με $AK=1\text{m}$, ισορροπεί οριζόντια όταν στο άκρο της A έχει προσδεθεί σημειακή μάζα m.

- i) Πόση είναι η μάζα m;
- ii) Σε μια στιγμή αφήνουμε από ύψος $h=1,8\text{m}$ πάνω από τη ράβδο μια πλαστελίνη μάζα $m_1=0,4\text{ kg}$, η οποία και προσκολλάτε στο σημείο Γ, όπου $(\Gamma B)=1\text{m}$. Για την στιγμή αμέσως μετά την κρούση, να βρεθούν:
 - a) Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά το σύστημα.
 - b) Η στροφορμή του συστήματος και η στροφορμή της μάζας m ως προς τον άξονα περιστροφής. Ποια η κατεύθυνση των δύο διανυσμάτων;
 - c) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M\ell^2$.

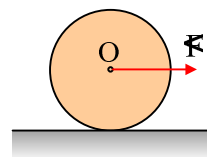
- 16) Ο κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα 2 kg και παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,2$. Ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη $F=3\text{N}$.



- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του και να εξηγήστε γιατί η τριβή είναι προς τα αριστερά.
- ii) Να αποδείξετε ότι η ασκούμενη τριβή είναι στατική.
- iii) Για τη θέση που ο κύλινδρος έχει μετατοπισθεί οριζόντια κατά $x=2\text{m}$, να βρεθούν:
 - a) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
 - b) Ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου.
 - c) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.

Για τον κύλινδρο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} mR^2$.

- 17) Ένας τροχός μάζας $m=10\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,6\text{m}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,2$. Σε μια στιγμή $t=0$, ασκείται στον άξονα του τροχού, οριζόντια δύναμη $F=30\text{N}$, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{s}$.

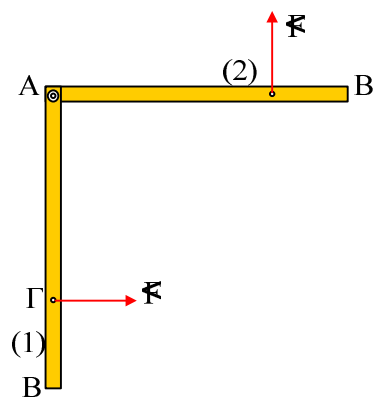


- i) Πόση επιτάχυνση αποκτά ο τροχός;
- ii) Πόσο είναι το μέτρο της τριβής που ασκείται πάνω του;

- iii) Ποια η συνολική μετατόπιση του τροχού και πόσες συνολικά περιστροφές έχει πραγματοποιήσει, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=10\text{s}$;

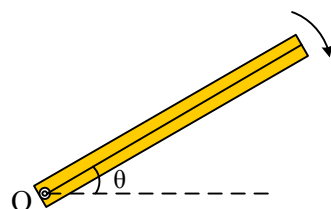
Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- 18) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος 4m, μάζα 9 kg και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, χωρίς τριβές. Η ράβδος αρχικά ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση (θέση 1). Σε μια στιγμή δέχεται της επίδραση δύναμης σταθερού μέτρου $F = \frac{184}{\pi}$ N, η οποία ασκείται κάθετα στη ράβδο, στο σημείο Γ, όπου $(\Gamma B)=1\text{m}$, οπότε μετά από λίγο, η ράβδος γίνεται οριζόντια (θέση 2). Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{3} M \ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$, ζητούνται:



- Η ενέργεια που προσφέρθηκε στη ράβδο, μέσω του έργου της δύναμης F.
- Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στην οριζόντια θέση.
- Η ισχύς της δύναμης F στη θέση (2).
- Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής στην οριζόντια θέση.

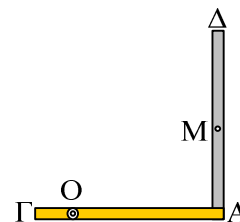
- 19) Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=2\text{m}$ και μάζας $m=4$ kg μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται γύρω από το άκρο της Ο, διαγράφοντας κατακόρυφο επίπεδο. Σε μια στιγμή που σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ όπου $\eta\mu\theta=0,6$ έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=4\text{rad/s}$. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της είναι $I = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$:



- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής, την παραπάνω στιγμή;
- Μετά από λίγο η ράβδος γίνεται οριζόντια. Για τη θέση αυτή να βρεθούν:
 - Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
 - Η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που

δέχεται η ράβδος από τον άξονα.

- 20) Δύο όμοιες ομογενείς ράβδοι ΓΑ και ΑΔ είναι ενωμένες στο άκρο Α, έχουν μάζες $m_1=m_2=m=10\text{ kg}$ και μήκος $l=6\text{ m}$. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο Ο της ράβδου ΓΑ, όπου $(OA)=4\text{ m}$. Φέρνουμε το σύστημα σε τέτοια θέση ώστε η ράβδος ΓΑ να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.

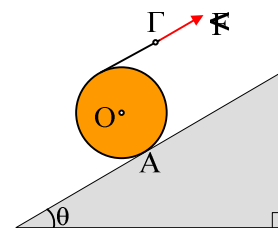


- Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος;
- Βρείτε τις αντίστοιχες επιταχύνσεις του άκρου Α καθώς και του μέσου Μ της ράβδου ΑΔ.
- Να υπολογίσετε την ταχύτητα του άκρου Α, στη θέση που η ράβδος ΓΑ γίνεται κατακόρυφη.

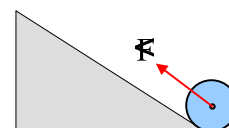
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται

από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M l^2$ και $g=10\text{ m/s}^2$.

- 21) Γύρω από ένα κύλινδρο μάζας 10 kg και ακτίνας $0,6\text{ m}$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και για $t=0$ το τοποθετούμε σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^\circ$, ασκώντας στο άκρο του νήματος Γ δύναμη μέτρου $F=60\text{ N}$ παράλληλη προς το επίπεδο. Αν η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του που διέρχεται από το κέντρο της βάσης του Ο, δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} m R^2$ ενώ $g=10\text{ m/s}^2$ να βρείτε:



- Την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
 - Την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
 - Την ταχύτητα ενός σημείου Α, σημείου επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{ s}$.
 - Την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου την παραπάνω χρονική στιγμή, καθώς και το έργο της δύναμης F μέχρι τη στιγμή αυτή.
- 22) Ένας κύλινδρος μάζας 5 kg και ακτίνας $R=0,4\text{ m}$ βρίσκεται στη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσεως $\theta=30^\circ$. Για $t=0$ ασκείται στον άξονα του κυλίνδρου δύναμη $F=31\text{ N}$, μέχρι τη στιγμή $t_1=5\text{ s}$, οπότε καταργείται. Ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.



- Βρείτε την επιτάχυνση του κυλίνδρου τις χρονικές στιγμές:

α) $t_1=2\text{ s}$ και β) $t_2=6\text{ s}$.

- ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου τις παραπάνω χρονικές στιγμές;
- iii) Ποια η συνολική μετατόπιση του κυλίνδρου κατά την άνοδό του;
- iv) Πόσες συνολικά περιστροφές πραγματοποίησε ο κύλινδρος κατά την άνοδό του;
- v) Ποια η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής οριακής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου για να μπορεί ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

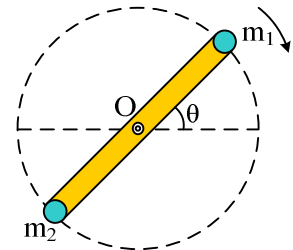
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

23) Κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου κλίσεως 30° . Να βρείτε:

- i) Την επιτάχυνση των σημείων του άξονα του κυλίνδρου.
- ii) Η ταχύτητα του άξονα μετά από $t = 6 \text{ s}$ αν $v_0 = 0$.

Δίνεται $I = \frac{1}{2} m R^2$ $g = 10 \text{ m/s}^2$.

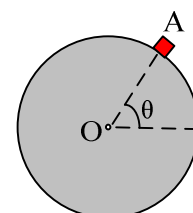
24) Μια ομογενής ράβδος μάζας $M = 6 \text{ g}$ και μήκους $L = 4 \text{ m}$ περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της O . Στα δύο άκρα της έχουν στερεωθεί δύο σώματα με μάζες $m_1 = 5 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$, αμελητέων διαστάσεων. Όταν η ράβδος σχηματίζει με τον οριζόντα γωνία θ (όπου $\sin \theta = 0,8$), η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος είναι $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$, όπως στο σχήμα.



- i) Για την θέση αυτή του σχήματος να υπολογιστούν:
 - a) Η στροφορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος.
 - b) Η γωνιακή επιτάχυνση.
- ii) Να βρεθούν για την κίνηση του συστήματος:
 - a) Η μέγιστη και η ελάχιστη γωνιακή επιτάχυνση.
 - b) Η μέγιστη και η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα.

Δίνεται για τη ράβδο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

25) Ο κύλινδρος του σχήματος ακτίνας $R = 1 \text{ m}$ και μάζας $m = 10 \text{ kg}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονά του που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων του. Στο σημείο A της επιφάνειάς του, όπου η ακτίνα OA σχηματίζει με



τον οριζόντια γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$, προσκολλάται σημειακή μάζα $m_1=1\cdot g$ και το σύστημα αφήνεται να κινηθεί.

- Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση την οποία θα αποκτήσει το σύστημα.
- Ποια η μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος;
- Πόση είναι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο κύλινδρος;

Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

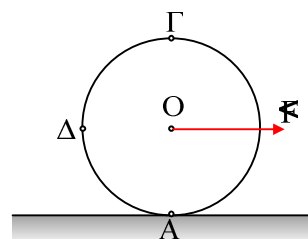
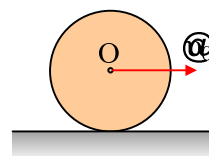
26) Ο κύλινδρος του σχήματος εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $v_0=6\text{m/s}$, χωρίς να στρέφεται, σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή οριακής στατικής τριβής $\mu_s=0,5$ και συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,4$. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.

- Στον κύλινδρο θα ασκηθεί τριβή προς τα αριστερά με μέτρο $T=\mu_s mg$.
- Η επιτάχυνση του κυλίνδρου θα είναι ίση με $a=-4\text{m/s}^2$.
- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου συνδέονται με τη σχέση $a_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} \cdot R$.
- Η γωνιακή επιτάχυνση είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω.
- Η στροφορμή του κυλίνδρου θα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό μmgR , μέχρι τη στιγμή που σταματά η ολίσθηση.
- Τελικά ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς ολίσθηση με ταχύτητα κέντρου μάζας $v_{\text{cm}}=4\text{m/s}$.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

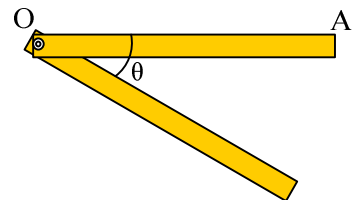
27) Ένας τροχός έχει μάζα 2 kg και η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο του δίνεται από την εξίσωση $I = \frac{1}{2} mR^2$. Η ακτίνα του τροχού είναι ίση με $0,4\text{m}$ και ηρεμεί σ' οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t=0$, δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F=6\text{N}$ που διέρχεται από το κέντρο του O , οπότε αρχίζει να κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει.

- Το επίπεδο είναι λείο ή όχι και γιατί;
- Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό.
- Βρείτε την επιτάχυνση του τροχού.
- Πόση είναι η ταχύτητα του τροχού μετά από 10s ;



- B. Σε μια στιγμή η ταχύτητα του τροχού είναι ίση με 4m/s. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:
- Οι ταχύτητες των σημείων Α, Γ και Δ.
 - Οι επιταχύνσεις των σημείων Α και Γ.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού.
- Γ. Για το χρονικό διάστημα από μηδέν έως $t=10\text{s}$:
- Πόσο είναι το έργο κάθε δύναμης;
 - Πόσο είναι το έργο κάθε ροπής;
- Τι εκφράζουν τα παραπάνω έργα;
- Δ. Σε μια στιγμή μηδενίζουμε την δύναμη F. Τι κίνηση θα κάνει μετά ο τροχός;
- Ε. Αν ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ τροχού και εδάφους είναι 0,4:
- ποιος ο ελάχιστος χρόνος που θα απαιτείτο για να διατρέξει ο τροχός απόσταση 100m κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει;
 - Ποια ταχύτητα θα αποκτούσε στο παραπάνω χρονικό διάστημα, αν η δύναμη F είχε σταθερό μέτρο;
 - Ποια η μέγιστη τιμή της δύναμης F στην περίπτωση αυτή;

28) Η ομογενής ράβδος ΟΑ μπορεί να στρέφεται διαγράφοντας κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο. Η ράβδος έχει μήκος $\ell = 3,75\text{m}$ και μάζα $m=4\text{kg}$. Για $t=0$ αφήνεται να περιστραφεί από την οριζόντια θέση.



- Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου;
- Μετά από λίγο η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση.
 - Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στη θέση αυτή;
 - Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου στη θέση αυτή;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$.

29) Μια ομογενής ράβδος μάζας 3 kg και μήκους $\ell=4\text{m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το ένα



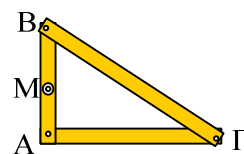
της άκρο O, ενώ στο άλλο της άκρο δένεται σώμα Σ μάζας 1 kg και το σύστημα φέρεται σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα.

i) Ποιο το κέντρο μάζας του συστήματος;

ii) Αν για την ράβδο ως προς το O ισχύει $I = \frac{1}{3} M \ell^2$, ποια η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το O.

iii) Αφήνεται το σύστημα να κινηθεί. Ποια η ταχύτητα του σώματος Σ, όταν φτάνει στην κατακόρυφο θέση.

30) Διαθέτουμε μια ομογενή δοκό μάζας 36 kg την οποία κόβουμε σε τρία μέρη και δημιουργούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με πλευρές (AB)=3m, (ΑΓ)=4m και (BΓ)=5m. Το τρίγωνο μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσον M της πλευράς AB. Αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί από την θέση που φαίνεται στο σχήμα.



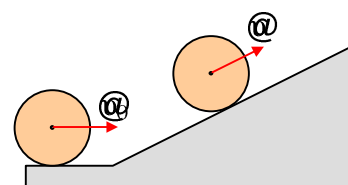
i) Βρείτε την ροπή αδράνειας του τριγώνου ως προς τον άξονα περιστροφής.

ii) Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά το τρίγωνο;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

31) Ένας τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα v_0 , όταν συναντά ανηφορικό δρόμο στον οποίο αρχίζει να ανέρχεται.



i) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό και στις δύο θέσεις του σχήματος.

ii) Να εξηγήστε γιατί:

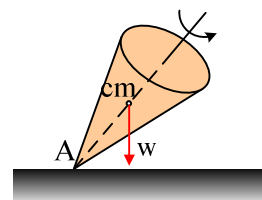
a) Δεν ασκείται τριβή στην κίνησή του στον οριζόντιο δρόμο.

b) Κατά την άνοδό του στον ανηφορικό δρόμο η τριβή έχει την κατεύθυνση της ταχύτητάς του.

iii) Αν ο δρόμος ήταν λείος, τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του τροχού, θα μετατρεπόταν σε δυναμική, μέχρι τη στιγμή που θα σταματούσε η άνοδος του τροχού;
Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

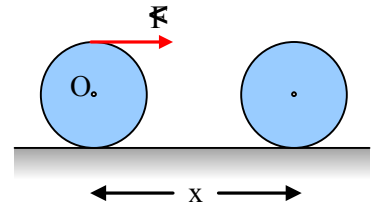
32) !! Στο σχήμα βλέπεται μια σβούρα που στρέφεται.

i) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της στροφορμής της σβούρας.



- ii) Πόση είναι η συνισταμένη ροπή που δέχεται η σβούρα, ως προς την κορυφή Α;
- iii) Σχεδιάστε το διάνυσμα της μεταβολής της στροφορμής.
- iv) Θα πέσει η σβούρα;

33) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας m και ακτίνας R , τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και τον αφήνουμε να κινηθεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τραβώντας το νήμα με σταθερή οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} mR^2$.



- i) Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος θα εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση.
- ii) Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει την γωνιακή επιτάχυνση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- iii) Για μια οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου κατά x , να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες.
 - a) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου δίνεται από την σχέση:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2Fx}{m}}$$

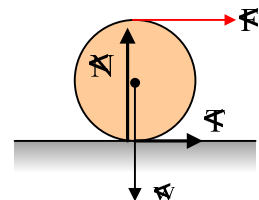
- b) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου παρέχεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{8Fx}{3m}}$$

- c) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο, μέσω της δύναμης F είναι ίση με:

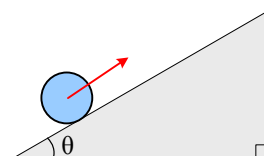
$$W = 2F \cdot x.$$

34) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας $m=4\text{ g}$ και ακτίνας $R=0,5\text{ m}$, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, μέσω του οποίου ασκούμε οριζόντια δύναμη $F=3\text{ N}$. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, ο οποίος αρχίζει να κυλιέται χωρίς ολίσθηση. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.



- i) Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις:
 - a) Για την μεταφορική κίνηση ισχύει $F + T = m \cdot a_{cm}$.

- b) Για την στροφική κίνηση έχουμε $T \cdot R - F \cdot R = I \cdot \alpha_{\text{γων.}}$
- c) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου έχει μέτρο 1 m/s^2 .
- d) Το μέτρο της τριβής είναι ίσο με 1 N .
- ii) Για μετατόπιση του κυλίνδρου κατά $x=2 \text{ m}$:
- a) Η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι ίση με 8 J .
- b) Η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου ισούται με 4 J .
- c) Η ενέργεια που προσφέρεται στον κύλινδρο μέσω της δύναμης είναι ίσο με 12 J .
- d) Το ολικό έργο της τριβής είναι ίσο με μηδέν.
- e) Το έργο της ροπής της δύναμης F είναι ίσο με 6 J .
- f) Το έργο της ροπής της τριβής είναι ίσο με -2 J .
- iii) Για την στροφική κίνηση η ροπή της τριβής αφαιρεί περιστροφική κινητική ενέργεια, η οποία μετατρέπεται σε μεταφορική κινητική ενέργεια, μιας και το έργο της δύναμης T είναι θετικό.
- iv) Αν το επίπεδο ήταν λείο, ο κύλινδρος θα αποκτούσε μικρότερη ταχύτητα v_{cm} και μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.
- 35) Μια σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει ανεβαίνοντας σε κεκλιμένο επίπεδο, όπως στο σχήμα.
- Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα και εξηγήστε:
- i) Γιατί η τριβή είναι στατική.
- ii) Γιατί η τριβή έχει φορά προς τα πάνω.
- iii) Για τη μεταφορική κίνηση ισχύει η εξίσωση:
- α) $mg \sin \theta - T = m \cdot a_{\text{cm}}$. β) $T - mg \sin \theta = m \cdot a_{\text{cm}}$. γ) $T + mg \sin \theta = m \cdot a_{\text{cm}}$.
- iv) Για την στροφική κίνηση ισχύει:
- α) $mg \sin \theta \cdot R = I_{\text{cm}} \cdot \alpha_{\text{γων.}}$. β) $T \cdot R = I_{\text{cm}} \cdot \alpha_{\text{γων.}}$. γ) $-T \cdot R = I_{\text{cm}} \cdot \alpha_{\text{γων.}}$.
- v) Για την κίνηση της σφαίρας ισχύουν:
- a) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι σταθερή.
- b) Η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.
- c) Η στροφορμή παραμένει σταθερή.
- d) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής παραμένει σταθερός.
- e) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας παραμένει

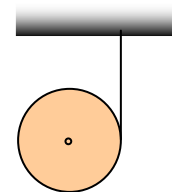


σταθερός.

- f) Η μείωση της μεταφορικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας, είναι ίση με την αύξηση της δυναμικής της ενέργειας.
- g) Η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί απλή. Η σφαίρα εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από το σημείο επαφής της, με το επίπεδο.

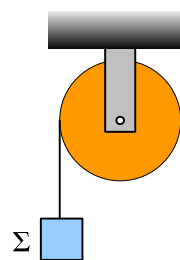
Για τη σφαίρα $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$.

36) Γύρω από έναν κύλινδρο ακτίνας $R=0,4m$, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σε σταθερό σημείο. Αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο να κινηθεί. Αν $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$, $g=10m/s^2$



- i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- ii) Αν η μάζα του κυλίνδρου είναι $m=2\text{ kg}$, για τη στιγμή που η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι ίση με $3m/s$, ζητούνται:
 - a) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του.
 - b) Ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου.
 - c) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας λόγω περιστροφής.
 - d) Πόσο έχει κατέβει στο διάστημα αυτό ο κύλινδρος;

37) Γύρω από μια τροχαλία μάζας 2 kg και ακτίνας $R=0,5m$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα Σ μάζας $m_1=1\text{ kg}$ και για $t=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Αν δίνονται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10m/s^2$:



- i) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του σώματος Σ συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας με τη σχέση $a_{\Sigma} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$
- ii) Για μετακίνηση του σώματος Σ κατά $y=0,6m$ ζητούνται:
 - a) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ εκτελεί κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.
 - b) Η ταχύτητα του σώματος Σ .
 - c) Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.
 - d) Πόσο είναι το έργο κάθε δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ ,

κατά την παραπάνω μετατόπιση; Τι μετράει το έργο κάθε δύναμης;

- e) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της;
- f) Ποιος ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας;
- g) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη στιγμή που το σώμα Σ έχει κατέβει κατά $3m$;

38) Τοποθετούμε τη μύτη ενός μολυβιού μήκους ℓ στο νύχι του χεριού μας και φέρνουμε το μολύβι σε κατακόρυφη θέση. Αφήνουμε το μολύβι να πέσει, οπότε η μύτη του εγκαταλείπει το νύχι σε μια θέση που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Δίνεται η ροπή αδράνειας του μολυβιού ως προς κάθετο σε αυτό άξονα που περνά από το μέσον του

K, που θεωρείται και κέντρο μάζας του μολυβιού $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$, όπου

ℓ το μήκος του.

Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- i) Στη θέση (2) το μέσον K του μολυβιού έχει κατέβει σε σχέση με την αρχική του θέση (1), κατά $h = \frac{1}{2} \ell (1 - \sin\theta)$.
- ii) Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου κατά την περιστροφή του

από τη θέση (1) στη θέση (2) είναι ίση με $\alpha_{γων} = \frac{3g}{2\ell} \eta \mu \theta$.

- iii) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μολυβιού γύρω από το σημείο A στη θέση (2) συνδέεται με τη γωνία θ με τη σχέση:

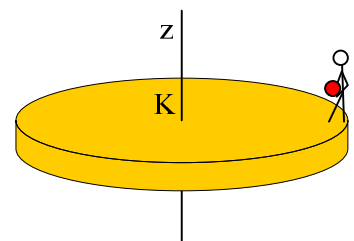
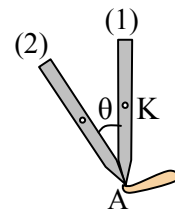
$$3g(1 - \sin\theta) = \ell \cdot \omega^2.$$

- iv) Η κεντρομόλος επιτάχυνση του μολυβιού στη θέση (2) είναι ίση με $\alpha_k = g \cdot \sin\theta$.

- v) Για τη γωνία θ ισχύει $\sin\theta = 0,6$.

- vi) Μετά τη θέση (2) το κέντρο K του μολυβιού εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ενώ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μολυβιού παραμένει σταθερή.

39) Το οριζόντιο κυκλικό τραπέζι μάζας $M=40 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=1m$, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του K, χωρίς τριβές, και είναι ακίνητο. Σε σημείο A κοντά



στην περιφέρειά του βρίσκεται ένα παιδί μάζας $m_1=50 \text{ kg}$ ακίνητο, κρατώντας στο χέρι του μια σφαίρα μάζας 4 kg . Κάποια στιγμή το παιδί εκτοξεύει οριζόντια, στη διεύθυνση της εφαπτομένης στο τραπέζι τη σφαίρα με ταχύτητα $v_0=7\text{m/s}$.

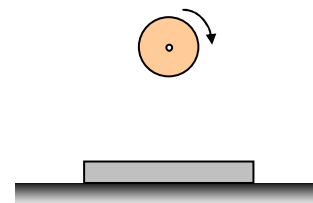
- i) Να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το τραπέζι.
- ii) Πόση ενέργεια ξόδεψε το παιδί για την εκτόξευση της σφαίρας;
- iii) Αν στη συνέχεια το παιδί κινηθεί στη διεύθυνση της ακτίνας, προς το κέντρο του τραπέζιού, ποια είναι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το τραπέζι;

Δίνεται για το τραπέζι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} MR^2$.

- 40) Από ορισμένο ύψος αφήνεται να πέσει μια σφαίρα μάζας $m_1=4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$, η οποία στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=10\text{rad/s}$. Η σφαίρα συγκρούεται με σανίδα μάζας $m_2=2 \text{ kg}$, η οποία ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο και αναπηδά με γωνιακή ταχύτητα $\omega_2=8\text{rad/s}$.

- i) Ποια ταχύτητα αποκτά η σανίδα μετά την κρούση;
- ii) Πόση οριζόντια ταχύτητα θα έχει η σφαίρα μετά την κρούση;

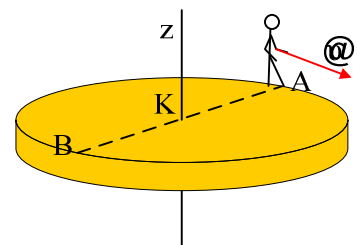
Για την σφαίρα δίνεται $I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$.



- 41) Το οριζόντιο κυκλικό τραπέζι μάζας $M=20 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του K , χωρίς τριβές, και είναι ακίνητο. Σε σημείο A κοντά στην περιφέρειά του βρίσκεται ένα παιδί μάζας $m_1=40 \text{ kg}$ ακίνητο. Σε μια στιγμή το παιδί αρχίζει να κινείται εφαπτομενικά με ταχύτητα ως προς το τραπέζι $v=5\text{m/s}$, μέχρι να φτάσει στο αντιδιαμετρικό του A σημείο B .

- i) Ποια γωνιακή ταχύτητα θα αποκτήσει το τραπέζι;
- ii) Πόση συνολικά γωνία ως προς το έδαφος θα διαγράψει το παιδί μέχρι να φτάσει στο σημείο B ;

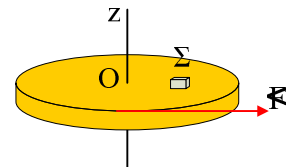
Δίνεται για το τραπέζι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} MR^2$.



- 42) Στις κορυφές αβαρούς κύβου ακμής $a=2\text{m}$ στερεώνονται οκτώ σημειακές μάζες $m=1 \text{ kg}$ η καθεμιά. Αν το σύστημα περιστρέφεται γύρω από άξονα που βρίσκεται πάνω σε μια ακμή του κύβου με γωνιακή ταχύτητα $\omega=40\text{rad/s}$, να υπολογίσετε:

- i) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος.
- ii) Τη στροφορμή του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής.
- iii) Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει η περιστροφή, αν ασκηθεί στο σύστημα σταθερή ροπή $40\text{N}\cdot\text{m}$.
- iv) Να σχεδιάσετε ένα σχήμα στο οποίο να φαίνονται τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της ασκούμενης ροπής.

43) Η κυκλική πλατφόρμα έχει ακτίνα 4m και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της O . Σε απόσταση $d=2\text{m}$ από το O ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας $m=5\text{ kg}$, το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$ με την πλατφόρμα και το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν υλικό σημείο. Ασκούμε εφαπτομενικά στην πλατφόρμα, μια οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F=21\text{N}$, για χρονικό διάστημα $\Delta t=5\text{s}$, οπότε, η πλατφόρμα αποκτά γωνιακή ταχύτητα 1rad/s .



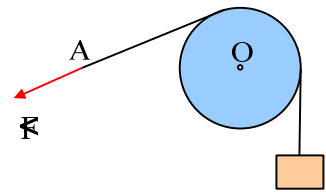
Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας, ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

- i) Να υπολογιστεί η μάζα της πλατφόρμας.
- ii) Πόσο είναι το έργο της δύναμης F από $0-5\text{s}$;
- iii) Βρείτε την τριβή που ασκείται στο σώμα Σ τις χρονικές στιγμές:
 - α) $t_1 = 5\text{s}$ και β) $t_2 = 8\text{s}$
- iv) Πόσο είναι το έργο της τριβής που ασκείται στο σώμα Σ από $0-5\text{s}$;

44) Ένας άνθρωπος κρατάει σε κάθε χέρι του σώμα μάζας $m=10\text{ kg}$ και περιστρέφεται σε παγωμένη λίμνη γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\text{rad/s}$, όταν έχει τα χέρια του σε στάση προσοχής και η συνολική ροπή αδράνειάς του είναι $30\text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Όταν φέρει τα χέρια του στην έκταση, κάθε σώμα απέχει απόσταση $x=1\text{m}$ από τον άξονα περιστροφής και η ροπή αδράνειας του συστήματος γίνεται 50 kgm^2 . Ζητούνται:

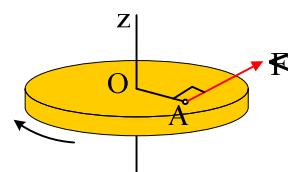
- i) Η γωνιακή ταχύτητα που θα έχει ο άνθρωπος με τα χέρια στην έκταση.
- ii) Η γωνιακή ταχύτητα του ανθρώπου, όταν με τα χέρια στην έκταση αφήσει τα δύο σώματα να πέσουν.

45) Θέλουμε να ανυψώσουμε ένα σώμα Σ μάζας 20 kg, με τη βοήθεια αβαρούς νήματος, το οποίο διέρχεται από τροχαλία, μάζας 4 kg και ακτίνας $R=0,2\text{m}$, η οποία στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της O . Για το σκοπό αυτό ασκούμε στο άκρο A του νήματος δύναμη $F=222\text{N}$, όπως στο σχήμα. Αν το νήμα δεν γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από την σχέση $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$, ζητούνται:



- i) Η επιτάχυνση του σώματος Σ .
- ii) Η δύναμη που ασκείται μέσω του νήματος στο σώμα Σ .
- iii) Πόση ενέργεια θα προσφέρουμε μέχρι να ανεβάσουμε κατά $h=2\text{m}$ το σώμα Σ ;
- iv) Με ποιες μορφές εμφανίζεται η ενέργεια που προσφέραμε και σε τι ποσοστό αντιστοιχεί η καθεμιά;
- v) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας;
- vi) Κάποιος σας προτείνει, για να γίνει ευκολότερο το ανέβασμα του σώματος Σ , το νήμα να γίνει κατακόρυφο, έτσι ώστε και η δύναμη F να γίνει επίσης κατακόρυφη. Ποια η δική σας άποψη; Θα βοηθούσε η αλλαγή της διεύθυνσης του νήματος;
- vii) Μήπως αν η τροχαλία είχε μεγαλύτερη ακτίνα, το σώμα Σ θα αποκτούσε μεγαλύτερη επιτάχυνση;

46) Ο τροχός του σχήματος ακτίνας $R=0,3\text{m}$ στρέφεται κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=10\text{rad/s}$, γύρω από κατακόρυφο άξονα. Μια εξωτερική οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F=8\text{N}$ αρχίζει για $t=0$ να ασκείται στο σημείο A , το οποίο απέχει $r=0,2\text{m}$, από το κέντρο του τροχού και παραμένει διαρκώς κάθετη στην OA . Το αποτέλεσμα είναι τη χρονική στιγμή $t=11\text{s}$ ο τροχός να στρέφεται, αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα $\omega_2=12\text{rad/s}$.



Να βρεθούν:

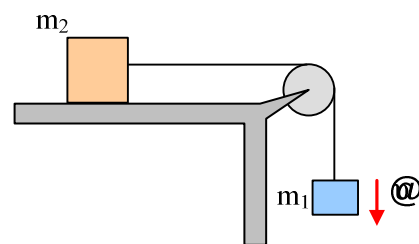
- i) Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού;
- ii) Η χρονική στιγμή που ο τροχός αλλάζει φορά περιστροφής;
- iii) Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής.
- iv) Το συνολικό έργο της δύναμης F .

v) Η μέση ισχύς της δύναμης F .

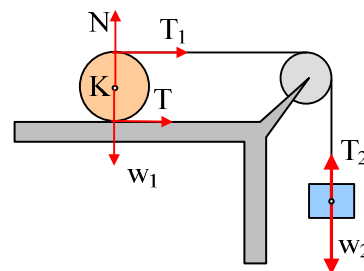
vi) Η ισχύς της δύναμης F , τις χρονικές στιγμές $t_1=3s$ και $t_2=6s$.

47) Δύο μάζες $m_1=m_2=5\text{ kg}$ συνδέονται με ελαφρό νήμα το οποίο περνά από τροχαλία ακτίνας $R=0,4m$ και ροπής αδράνειας $I=0,4\text{ kg}\cdot m^2$ ως προς τον άξονά της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μάζα m_2 κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή έχει ταχύτητα $v=2m/s$. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

- Η ολική στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.
 - Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
 - Η ολική κινητική ενέργεια.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος.
- $g=10m/s^2$.



48) Γύρω από ένα κύλινδρο K , μάζας 4 kg και ακτίνας $0,5m$, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου, αφού το περάσουμε από αβαρή τροχαλία, δένουμε ένα σώμα Σ μάζας 1 kg , όπως στο σχήμα. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Ο κύλινδρος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,4$, ενώ η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονά του που διέρχεται από το κέντρο του O δίνεται από την εξίσωση $I=\frac{1}{2}m\cdot R^2$ και $g=10m/s^2$. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και στον κύλινδρο K .



- Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες.
 - Ισχύει $T_1=w_2$.
 - $T_1=T_2$ επειδή πάντα ένα νήμα ασκεί ίσου μέτρου δυνάμεις στα άκρα του.
 - $T_1=T_2$ επειδή το νήμα είναι αβαρές και η τροχαλία είναι αβαρής.
 - Αν η τροχαλία είχε μάζα, τότε θα ίσχυε $T_1>T_2$.
 - Αν ο κύλινδρος στραφεί κατά γωνία $d\theta$, τότε ξετυλίγεται νήμα μήκους $dl=R\cdot d\theta$, ο κύλινδρος μετατοπίζεται κατά dl και το σώμα Σ κατέρχεται κατά $2dl$.
- Η ταχύτητα του σώματος Σ είναι κάθε στιγμή διπλάσια της ταχύτητας του κέντρου O του κυλίνδρου.

ζ) Για την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου ισχύει:

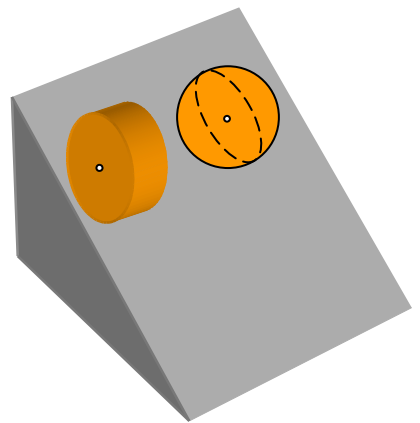
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} mR = 4(T_1 - T).$$

- ii) Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει και να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι ίση με $4m/s^2$.
- iii) Για μετατόπιση του σώματος Σ κατά $x=8m$, να βρεθούν:
 - α) Τα έργα των δυνάμεων w_2 , T_2 , T_1 , T .
 - β) Τα έργα των ασκουμένων ροπών.
 - γ) Πόση ενέργεια μεταφέρεται από το σώμα Σ στον κύλινδρο;
 - δ) Ποια η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, που οφείλεται στην στροφική του κίνηση; Με ποιο ή ποια έργα συνδέεται η παραπάνω ενέργεια;
 - ε) Πόση θερμότητα παράγεται εξαιτίας της τριβής;

49) Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος αφήνονται στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως φ και κυλάνε χωρίς να ολισθαίνουν, φτάνοντας στην βάση του επιπέδου, αφού μετακινηθούν κατά $s=2m$. Αν για τη σφαίρα $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$ για τον κύλινδρο $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$ ενώ $\eta m\varphi = 0,21$, να βρεθούν:

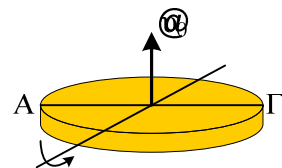
- i) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας κάθε σώματος.
- ii) Ο χρόνος στον οποίο τα σώματα φτάνουν στη βάση του επιπέδου.
- iii) Οι τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων.

$$g = 10m/s^2.$$



50) Στρίβουμε ένα νόμισμα στον αέρα. Το νόμισμα έχει μάζα $m=10g$ και διάμετρο $d=2cm$. Τη στιγμή που το νόμισμα εγκαταλείπει το χέρι μας κινούμενο κατακόρυφα προς τα πάνω είναι οριζόντιο, το ένα άκρο Α μιας διαμέτρου του ΑΓ έχει μηδενική ταχύτητα και περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στην ΑΓ που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Αν το κέντρο μάζας του νομίσματος κινηθεί κατακόρυφα και φθάσει σε ύψος $h=20cm$, να βρείτε:

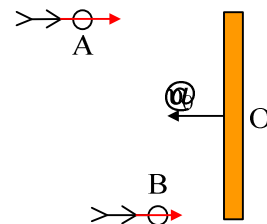
- i) τον αριθμό των περιστροφών που θα εκτελέσει το νόμισμα μέχρι τη στιγμή που το κέντρο μάζας του νομίσματος θα ξαναπεράσει από το σημείο εκτόξευσης.
- ii) την ενέργεια που δώσαμε στο νόμισμα γι' αυτή τη ρίψη.
- iii) Αν για την καταγραφή της κίνησης του νομίσματος, χρησιμοποιήσουμε φωτογραφική μηχανή με δυνατότητα ρύθμισης της συχνότητας λήψης των διαδοχικών φωτογραφιών, ποια θα



έπρεπε να είναι η ελάχιστη συχνότητα λήψης, ώστε να μπορέσουμε να καταγράψουμε όλες τις περιστροφές που εκτελεί το νόμισμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Δίνονται: η ροπή αδρανείας νομίσματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, $I = \frac{1}{4} mR^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$. Η αντίσταση του αέρα παραλείπεται.

- 51) Στο διάστημα, μακριά από Ουράνια σώματα, κινείται μια δοκός μήκους $l = 10 \text{ m}$ και μάζας $M = 120 \text{ kg}$ με ταχύτητα $v_0 = 5 \text{ m/s}$. Με αντίθετη κατεύθυνση κινούνται δύο αστροναύτες Α και Β ίσων μαζών $m_1 = m_2 = 80 \text{ kg}$ με ταχύτητες $v_1 = 8 \text{ m/s}$ και $v_2 = 3 \text{ m/s}$ αντίστοιχα. Φτάνοντας ταυτόχρονα οι αστροναύτες στη δοκό, πιάνονται από αυτήν στα δυο της άκρα.

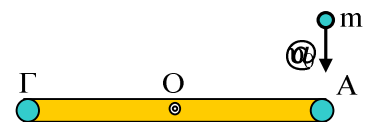


- Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος μετά την προσκόλληση των αστροναυτών στη δοκό.
- Ποια η περίοδος περιστροφής του συστήματος γύρω από το μέσον Ο της δοκού;
- Βρείτε τη μεταβολή της ορμής κάθε αστροναύτη, κατά την πρόσδεσή του στη δοκό.
- Αν ο χρόνος πρόσδεσης είναι πολύ μικρός και ίδιος για τους δύο αστροναύτες και η μέση δύναμη που δέχτηκε ο Α αστροναύτης από τη δοκό είχε μέτρο $F_1 = 800 \text{ N}$, πόση η αντίστοιχη δύναμη που δέχτηκε ο Β;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο προς αυτήν

άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

- 52) Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ με μήκος $L = 1 \text{ m}$ και μάζα $M = 1,2 \text{ kg}$ μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος σε αυτή και διέρχεται από το μέσον της Ο. Στα δύο άκρα της ράβδου έχουμε στερεώσει δύο σφαιρίδια αμελητέων διαστάσεων, μάζας $m = 0,2 \text{ kg}$ το καθένα. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βλήμα μάζας $m = 0,2 \text{ kg}$ αμελητέων διαστάσεων, κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$ και ενσωματώνεται ακαριαία στο σφαιρίδιο στο άκρο Α της ράβδου. Να υπολογίσετε:



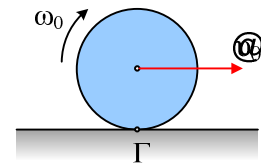
- i) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος, αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που χάθηκε κατά την κρούση.
- iii) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος, αμέσως μετά την κρούση.
- iv) Το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου στο άκρο Γ της ράβδου, τη στιγμή που αυτή γίνεται κατακόρυφη.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο προς αυτήν

άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$ και

$g = 10 \text{ m/s}^2$.

53) Ένας κύλινδρος μάζας $M = 4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο δίσκος κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 6 \text{ m/s}$ και ταυτόχρονα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$.



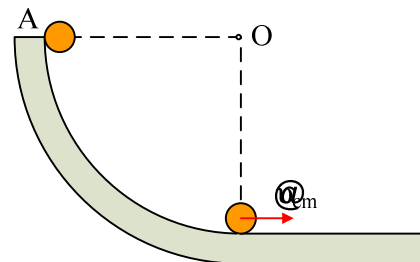
- i) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου επαφής Γ του κυλίνδρου με το οριζόντιο επίπεδο, τη χρονική στιγμή $t = 0$.
- ii) Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και αυτό έχει σαν συνέπεια να εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορική και επιταχυνόμενη στροφική κίνηση.
- iii) Μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα Δt ο κύλινδρος αποκτά γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 20 \text{ rad/s}$ και αμέσως μετά κυλίεται πάνω στο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:
 - a) Το έργο της ροπής της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο κύλινδρο από το οριζόντιο επίπεδο στο χρονικό διάστημα Δt .
 - b) Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου λόγω της μεταφορικής κινητικής, το οποίο μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης στο χρονικό διάστημα Δt .
 - c) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δt , αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του δίσκου με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu = 0,2$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

54) Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο AB, ακτίνας $R = 1,26 \text{ m}$, το οποίο εφάπτεται στο κάτω άκρο του B με οριζόντιο επίπεδο. Ομογενής σφαίρα μάζας $m = 2,5 \text{ g}$ και ακτίνας $r = 0,14 \text{ m}$ αφήνεται να κινηθεί κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το άκρο A. Η σφαίρα κυλιέται στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου, χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:

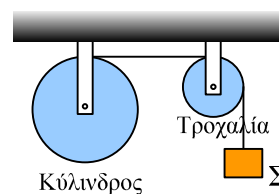
- Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το άκρο B του τεταρτοκυκλίου.
- Τον αριθμό των περιστροφών που εκτελεί η σφαίρα, κατά την κίνησή της από το A μέχρι το B.
- Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, ως προς τον άξονα περιστροφής της που διέρχεται από το κέντρο της, όταν η ακτίνα που ορίζεται από το κέντρο O του τεταρτοκυκλίου και το κέντρο της σφαίρας σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ , με $\sin \theta = 0,56$.
- Το έργο της ροπής της στατικής τριβής στην οποία οφείλεται η κύλιση της σφαίρας, κατά την κίνησή της από το άκρο A μέχρι το άκρο B του τεταρτοκυκλίου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{cm} = \frac{2}{5} mr^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.



55) Στο διπλανό σχήμα, ο κύλινδρος και η τροχαλία μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητους οριζόντιους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους. Ένα αβαρές νήμα, που είναι τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο, διέρχεται από το αυλάκι της τροχαλίας και στο ελεύθερο άκρο του κρέμεται σώμα Σ μάζας $m = 3 \text{ kg}$. Το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο και στο αυλάκι της τροχαλίας. Ο ομογενής κύλινδρος έχει μάζα $M_1 = 5 \text{ kg}$ και ακτίνα $R_1 = 0,4 \text{ m}$. Η ομογενής τροχαλία έχει μάζα $M_2 = 2 \text{ kg}$ και ακτίνα $R_2 = 0,2 \text{ m}$. Το σύστημα που αρχικά είναι ακίνητο, αφήνεται κάποια στιγμή ελεύθερο. Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ.
- Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.



iii) Κάποια στιγμή το σώμα Σ έχει κατέβει κατά $h=0,75\text{m}$. Για τη στιγμή αυτή:

- Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ .
- Ποιος ο λόγος L_1/L_2 , όπου L_1 η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του και L_2 η στροφορμή της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{\text{cm1}} = \frac{1}{2} M_1 R_1^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{\text{cm2}} = \frac{1}{2} M_2 R_2^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

56) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος $\ell=2\text{m}$ και μάζα $M=3\text{kg}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρον της O . Στο άλλο άκρο της έχει προσδεθεί σφαίρα μάζας $m_1=1\text{g}$ αμελητέας ακτίνας. Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και σε μια στιγμή την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί. Μόλις φτάσει στην κατακόρυφη θέση, η σφαίρα αποσπάται από τη ράβδο και συνεχίζει να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος του άξονα ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=128\text{N/m}$, στο άκρο του οποίου ηρεμεί σώμα Σ . Η κρούση μεταξύ της σφαίρας και του σώματος B είναι μετωπική και ελαστική και μετά τη κρούση το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A=0,5\text{m}$.

Να υπολογίσετε:

- Την ταχύτητα της σφαίρας λίγο πριν τη κρούση.
- Την ταχύτητα της σφαίρας μετά τη κρούση.
- Τη περίοδο ταλάντωσης του σώματος Σ .

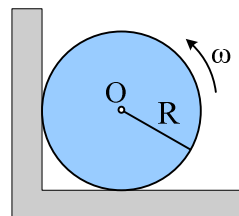
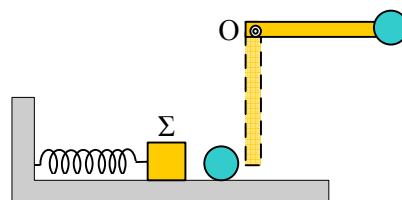
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα

$$\text{περιστροφής της } I = \frac{1}{3} M \ell^2 \text{ και } g=10\text{m/s}^2.$$

57) Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος έχει ακτίνα 1m και τίθεται σε περιστροφή με αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=30\text{ rad/s}$ και αφήνεται να περιστραφεί, ευρισκόμενος διαρκώς σε επαφή και με τα δύο επίπεδα, με τα οποία παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=1$.

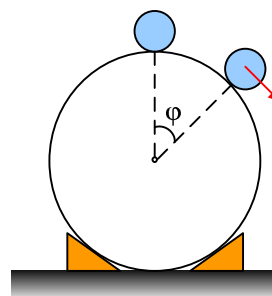
Να βρεθούν:

- Ο συνολικός χρόνος περιστροφής,
- Η γωνία στροφής του κυλίνδρου μέχρι να σταματήσει.



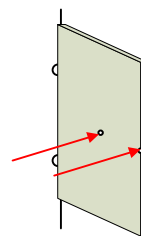
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- 58) Μια μικρή σφαίρα ακτίνας r ηρεμεί στο ανώτερο σημείο μιας μεγαλύτερης ακίνητης σφαίρας ακτίνας R . Αν μετακινήσουμε ελάχιστα τη μικρή σφαίρα και την αφήσουμε ελεύθερη, αυτή αρχίζει να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, στην περιφέρεια της μεγάλης σφαίρας. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ακτίνα της μεγάλης σφαίρας με την κατακόρυφη, τη στιγμή που η μικρή σφαίρα εγκαταλείπει τη μεγάλη.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της μικρής σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της $I = \frac{2}{5}mr^2$.

- 59) Μια πόρτα ύψους 2m και πλάτους 1m έχει μάζα 20 kg και στηρίζεται σε δύο μεντεσέδες που απέχουν κατά 0,4m από την πάνω και κάτω πλευρά της πόρτας. Η πόρτα απλά υποβαστάζεται από τον πάνω μεντεσέ (αυτό σημαίνει ότι απ' αυτόν δέχεται μόνο οριζόντια δύναμη).



Να βρείτε τις δυνάμεις που δέχεται η πόρτα από τους μεντεσέδες.

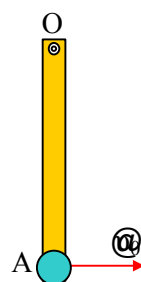
Λαμβάνοντας υπόψη ότι

- η πόρτα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από παράλληλες σανίδες μήκους 1m,
- η ροπή αδράνειας μιας ράβδου, ως προς το κέντρο μάζας της δίνεται από τη σχέση: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M\ell^2$,

να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα περιστροφής της.

- Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της πόρτας, όταν δέχεται κάθετη δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$, όταν αυτή ασκείται:
- στο κέντρο της πόρτας,
- στην ελεύθερη πλευράς της, όπως στο σχήμα.
- Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα σε καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις, αν αρχικά ήταν ανοικτή, σχηματίζοντας γωνία 90° με τον τοίχο;

- 60) Μια ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους 1m και μάζας 3 kg μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άκρο της Α δένεται μια μάζα $m=1\text{ kg}$, αμελητέων διαστάσεων.

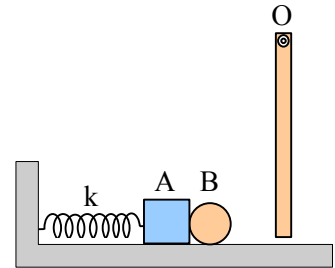


- i) Ποια η αρχική γωνιακή ταχύτητα, πρέπει να αποκτήσει το σύστημα για να μπορέσει να εκτελέσει ανακύκλωση;
- ii) Ποια η αντίστοιχη αρχική ταχύτητα της μάζας m;
- iii) Να υπολογίσετε την αρχική στροφορμή του συστήματος ως προς το σημείο O.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M\ell^2 \text{ και } g=10\text{m/s}^2.$$

- 61) Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος $\ell = 1\text{m}$ και μάζα $m=3\text{ kg}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο του O και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Εξάλλου το σώμα A, μάζας 1 kg , ηρεμεί δεμένο στο άκρο του οριζώντιου ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$, σε επαφή με τη σφαίρα B, μάζας 1 kg . Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $A_1=0,4\text{m}$ και αφήνουμε το σώμα A ελεύθερο να κινηθεί. Αν το επίπεδο είναι λείο και η κρούση μεταξύ των A και B είναι μετωπική και ελαστική, ενώ η σφαίρα συγκρούεται στο άκρο της ράβδου και κατόπιν παραμένει ακίνητη, να βρεθεί η απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση της σφαίρας με τη ράβδο.

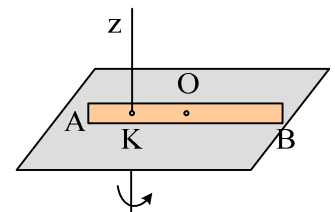


Για την σανίδα $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M\ell^2$.

- 62) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος $\ell=4\text{m}$, μάζα $m=3\text{ kg}$ και στρέφεται οριζόντια, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο K, όπου $(AK)=1\text{m}$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\text{rad/s}$.

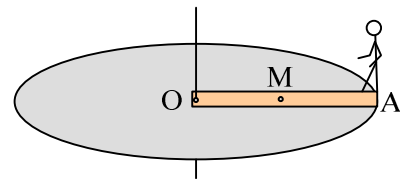
Να βρεθούν:

- i) Η στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.
- ii) Η στροφορμή της ράβδου γύρω από το μέσον της O, καθώς και η στροφορμή του κέντρου μάζας της ως προς τον άξονα περιστροφής.
- iii) Η κινητική ενέργεια της ράβδου.
- iv) Η οριζόντια δύναμη που πρέπει να ασκηθεί κάθετα στη ράβδο, στο άκρο A, ώστε η γωνιακή της ταχύτητα να μειωθεί μέσα σε 4s , με σταθερό ρυθμό, στην τιμή $\omega_1=2\text{rad/s}$. Πόσο είναι το έργο της F στο παραπάνω χρονικό διάστημα; Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις αν η δύναμη ασκείτο στο άκρο B;



Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

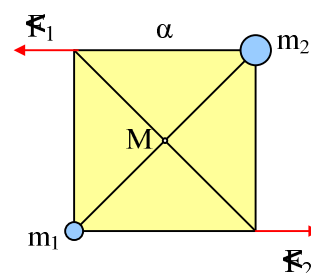
63) Μια δοκός μάζας $M=60 \text{ kg}$ και μήκους $\ell=2\text{m}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ένα της άκρο O , διαγράφοντας οριζόντιο επίπεδο. Στο άκρο A στέκεται ένα παιδί, μάζας $m=40 \text{ kg}$, κρατώντας στο χέρι του, μια σφαίρα μάζας $m_1=2,4 \text{ kg}$. Σε μια στιγμή εκτοξεύει οριζόντια τη σφαίρα με ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$, σε διεύθυνση κάθετη προς την δοκό.



- Πόση γωνιακή ταχύτητα θα αποκτήσει η δοκός;
- Στη συνέχεια το παιδί αρχίζει να κινείται προς το O και σταματά στο μέσον M της OA . Ποια η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, όταν το παιδί βρίσκεται στο σημείο M ;
- Ποια η αύξηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την μετακίνηση του παιδιού;

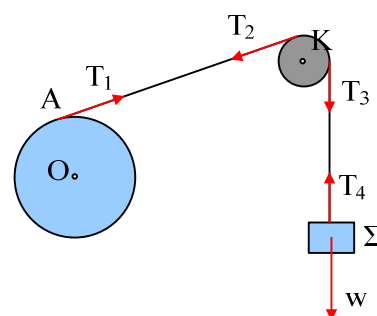
Δίνεται για τη δοκό $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

64) Στις δύο απέναντι κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς $a=0,2\text{m}$ έχουν δεθεί 2 μάζες $m_2=2m_1=2 \text{ kg}$, ενώ στις άλλες ασκούνται 2 παράλληλες δυνάμεις $F_1=F_2=4\text{N}$, όπως στο σχήμα.



- Αποτελούν οι 2 δυνάμεις ζεύγος; Ποια η συνισταμένη τους και ποια η συνολική ροπή;
- Αν το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο M του τετραγώνου, ποια η ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς το M αν η ροπή αδράνειας του τετραγώνου είναι $1,73 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ και η διαγώνιος του τετραγώνου θεωρηθεί ίση με $0,3\text{m}$.
- Ποια η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά το σύστημα; Αν η ροπή παραμένει σταθερή πόση η κινητική ενέργεια του συστήματος, 2s μετά την στιγμή που αφήνεται να κινηθεί.

65) Γύρω από ένα κύλινδρο A , μάζας $m_1=4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R_1=1\text{m}$, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου, αφού το περάσουμε από τροχαλία, δένουμε ένα σώμα Σ μάζας 1 kg , όπως στο σχήμα. Η τροχαλία έχει κυλινδρικό σχήμα, μάζα $m_2=2 \text{ kg}$ και ακτίνα $R_2=0,5\text{m}$. Και ο κύλινδρος και η τροχαλία στρέφονται γύρω από



σταθερούς οριζόντιους άξονες, που περνάνε από τα κέντρα τους Ο και Κ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.

Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο να κινηθεί. Το νήμα περιστρέφει την τροχαλία, χωρίς να ολισθαίνει στο αυλάκι της. Δίνεται ο ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

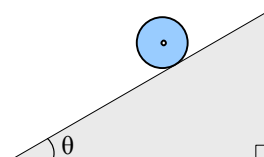
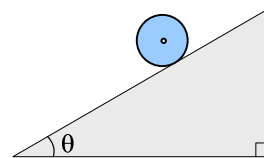
- i) Αν το σώμα Σ κατέβει κατά x, κατά ποια γωνία θα περιστραφούν ο κύλινδρος και η τροχαλία;
- ii) Γιατί η δύναμη T_1 που ασκείται από το νήμα στον κύλινδρο είναι ίση με τη δύναμη T_2 που ασκεί το νήμα στην τροχαλία;
- iii) Αποδείξτε ότι αν η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι a, τότε η τροχαλία έχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και ισχύει $a = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R_2$.
- iv) Αν σε μια στιγμή το σώμα Σ έχει κινητική ενέργεια $K_3 = 20 \text{ J}$, αποδείξτε ότι η τροχαλία έχει ενέργεια 20J και ο κύλινδρος 40J.
- v) Υπολογίστε την επιτάχυνση του σώματος Σ.
- vi) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1 \text{ s}$ και $t_2 = 3 \text{ s}$;
- vii) Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή που έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ίση με 2 rad/s ;

66) Ένας κύλινδρος μάζας 4 kg και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ αφήνεται για $t = 0$, να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ (όπου $\eta \mu \theta = 0,6$). Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου είναι $\mu_s = 0,4$, η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του δίνεται από την εξίσωση $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$, ζητούνται:

- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, να υπολογίσετε την ασκούμενη τριβή και να αποδείξετε ότι είναι στατική.
- ii) Η ταχύτητα, και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου για $t = 2 \text{ s}$.
- iii) Για το παραπάνω χρονικό διάστημα, να βρεθούν:
 - a) Η μεταφορική και στροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.
 - b) Το έργο κάθε δύναμης, για την μεταφορική κίνηση.
 - c) Το έργο των ασκούμενων ροπών.

Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

67) Ένας κύλινδρος μάζας 20 kg και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ αφήνεται για $t = 0$, να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ , όπου $\eta \mu \theta = 0,6$. Αν οι



συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου είναι $\mu=\mu_s=0,125$ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του δίνεται από την εξίσωση $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$, ζητούνται:

- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, να υπολογίσετε την ασκούμενη τριβή και να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος και κυλίεται και ολισθαίνει.
- ii) η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- iii) Η ταχύτητα, και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου για $t=2\text{s}$.
- iv) Για το παραπάνω χρονικό διάστημα, να βρεθούν:
 - a) Η μεταφορική και στροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.
 - b) Το έργο κάθε δύναμης, για την μεταφορική κίνηση.
 - c) Το έργο των ασκούμενων ροπών.
 - d) Η παραγόμενη θερμότητα.

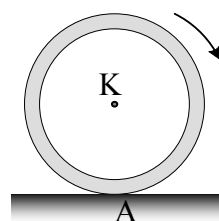
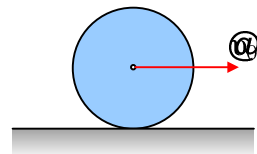
Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

68) Εκτοξεύουμε οριζόντια με αρχική ταχύτητα $v_0=12\text{m/s}$ ένα κύλινδρο ακτίνας $R=1\text{m}$ και μάζας $m=10\text{ kg}$, σε οριζόντιο επίπεδο.

Αρχικά ο κύλινδρος δεν στρέφεται, ενώ δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου $\mu=0,2$, η ροπή αδράνειας $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- i) Βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.
- ii) Ποια επιτάχυνση και ποια γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει ο κύλινδρος;
- iii) Τι κίνηση θα εκτελέσει;
- iv) Σε πόσο χρόνο ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και πόσο διάστημα θα έχει διανύσει στο μεταξύ;
- v) Ποια η αρχική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου και ποια τη στιγμή που θα πάψει η ολίσθηση;
- vi) Υπολογίστε το έργο της τριβής. Πώς συνδέεται το παραπάνω έργο με τις κινητικές ενέργειες;

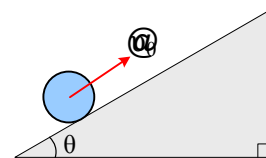
69) Μια στεφάνη μάζας $m=4\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=40\text{rad/s}$ γύρω από τον άξονά της. Σε μια στιγμή $t=0$, η στεφάνη αφήνεται σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο



παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$, οπότε η στεφάνη κινείται ευθύγραμμα και οριζόντια χωρίς να ανατρέπεται.

- Σχεδιάστε και υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκούνται στην στεφάνη αμέσως μετά.
- Βρείτε την ταχύτητα και τη γωνιακή ταχύτητα της στεφάνης για $t_1=2s$.
- Ποια η ταχύτητα του σημείου A, ένα από τα σημεία επαφής της στεφάνης με το έδαφος, τη χρονική στιγμή t_1 .
- Πόση συνολικά θερμότητα θα παραχθεί εξαιτίας της τριβής;
- Πόσο είναι το έργο της τριβής και πόσο το έργο της ροπής; Πώς συνδέονται τα παραπάνω έργα; $g=10m/s^2$.

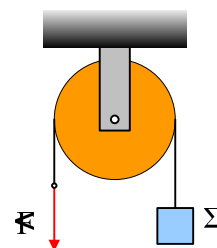
70) Ένας κύλινδρος μάζας $4kg$ και ακτίνας $R=0,2m$ εκτοξεύεται για $t=0$, από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου με αρχική ταχύτητα $v_0=36m/s$, χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ επιπέδου και κυλίνδρου είναι $\mu=0,5$, ενώ για τη γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου με το οριζόντιο επίπεδο ισχύει $\eta\mu\theta=0,6$, ζητούνται:



- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου αμέσως μετά.
- Η χρονική στιγμή κατά την οποία σταματά η ολίσθηση του κυλίνδρου. Ποια η επιτάχυνση και ποια η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου την παραπάνω χρονική στιγμή.
- Πόσο απέχει ο κύλινδρος από το οριζόντιο επίπεδο την παραπάνω χρονική στιγμή;

Δίνονται $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10m/s^2$.

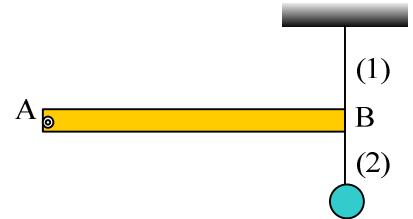
71) Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $2 kg$ και δένεται με νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου ασκούμε για $t=0$, μια κατακόρυφη δύναμη $F=30N$, αφού προηγουμένως περάσει από μια τροχαλία. Το σώμα ανέρχεται με επιτάχυνση $2m/s^2$, ενώ το νήμα δεν γλιστράει στην τροχαλία.



- Πόση είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της;
- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής στροφορμής του συστήματος, αν η ακτίνα της τροχαλίας είναι $R=0,5m$;

- iii) Πόση ενέργεια προσφέρεται μέσω του έργου της F , για μετατόπιση $y=1\text{m}$ και πώς κατανέμεται αυτή στο σύστημα;
Δίνονται $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

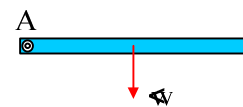
72) Η δοκός AB του διπλανού σχήματος έχει μήκος 3m και βάρος 100N , μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της A και ισορροπεί οριζόντια όταν στο άλλο της άκρο B κρέμεται με το νήμα (2), ένα σώμα Σ μάζας 2 kg , ενώ ταυτόχρονα είναι δεμένη με κατακόρυφο νήμα (1).



- Ποιες οι τάσεις των δύο νημάτων;
- Πόση δύναμη ασκεί ο άξονας στη δοκό στο σημείο A ;
- Σε μια στιγμή $t=0$ κόβουμε το πάνω νήμα (1). Αποδείξτε ότι το νήμα (2) θα πάψει να είναι τεντωμένο (Η τάση του γίνεται μηδέν).
- Πόση η επιτάχυνση του σώματος Σ και ποια η επιτάχυνση του σημείου B για $t=0^+$.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και για τη δοκό $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

73) Μια ομογενής σανίδα μάζας 3 kg και μήκους $\ell=4\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της A και ισορροπεί οριζόντια. Για $t=0$ αφήνουμε την σανίδα να κινηθεί. Αν για την σανίδα $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$:

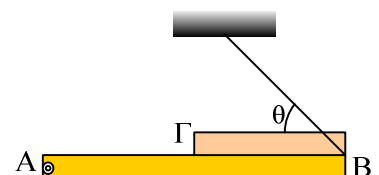


- Ποια η συνολική ροπή, η γωνιακή επιτάχυνση και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σανίδας αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί (για $t=0$);
- Μετά από λίγο, τη χρονική στιγμή t_1 , η γωνιακή επιτάχυνση της σανίδας είναι ίση με $\alpha_{\text{γων}}=3\text{rad/s}^2$. Για τη στιγμή t_1 ζητούνται:

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

- Η γωνιακή ταχύτητα.
- Η στροφορμή.
- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου.
- Πόσο το έργο της ροπής που στρέφει την σανίδα από $t=0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

74) Η ομογενής δοκός AB μήκους 4m και μάζας 12 kg ισορροπεί οριζόντια, δεμένη με νήμα στο άκρο B , το οποίο σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με τη δοκό, ενώ στο άκρο A μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές,



γύρω από οριζόντιο άξονα. Πάνω στην δοκό AB, έχουμε καρφώσει δεύτερη ομογενή δοκό ΓB, μήκους 2m και μάζας 6 kg, έτσι ώστε το άκρο B να είναι κοινό. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα.

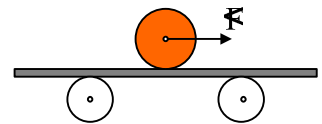
Ζητούνται:

- Η δύναμη που δέχεται η δοκός από τον άξονα στο άκρο A, πριν να κοπεί το νήμα.
- Αμέσως μόλις κοπεί το νήμα (το σύστημα των δύο ράβδων είναι οριζόντιο), πόση γωνιακή επιτάχυνση αποκτά το σύστημα;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας δοκού ως προς το κέντρο μάζας της

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

75) Οριζόντια ομογενής ράβδος μήκους $\ell = 4 \text{ m}$ και μάζας $m = 4 \text{ kg}$ στηρίζεται σε δύο όμοιους κυλίνδρους, σε δύο σημεία που το καθένα απέχει 1m από το μέσον της ράβδου. Οι δύο κύλινδροι στρέφονται με την ίδια φορά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ο καθένας γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και κυλίνδρων είναι $\mu = 0,1$. Ένας ομογενής δίσκος μάζας $m_1 = 6 \text{ kg}$ και ακτίνας R αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο, υπό την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης F που ασκείται στο κέντρο του, ξεκινώντας από το μέσον M της ράβδου. Στη διάρκεια της κίνησης του δίσκου η ράβδος ισορροπεί στην οριζόντια θέση.



- Να βρείτε την φορά με την οποία στρέφονται οι δύο κύλινδροι.
- Να δείξετε ότι το άθροισμα των δυνάμεων τριβής που δέχεται η ράβδος από τους δύο κυλίνδρους είναι σταθερό.
- Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου, καθώς και το μέτρο της δύναμης F .
- Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής που δέχεται η ράβδος από κάθε κύλινδρο τη χρονική στιγμή $t = 0,2\sqrt{10} \text{ s}$.

Δίνονται για το δίσκο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

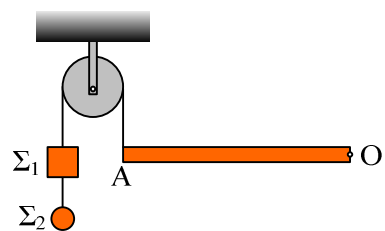
76) Οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $\ell = 2 \text{ m}$ και μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο άκρο Α της ράβδου τοποθετούμε έναν ομογενή κύλινδρο μάζας $m = 4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,5 \text{ m}$ και για $t = 0$ ασκούμε στον άξονά του σταθερή οριζόντια



δύναμη μέτρου $F=16\text{N}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κυλίνδρου και σανίδας είναι $\mu=0,1$. Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος στρέφεται αλλά και ολισθαίνει κατά μήκος της σανίδας. Αν η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$, να βρεθούν:

- Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- Η επιτάχυνση της ράβδου.
- Σε πόσο χρόνο ο κύλινδρος θα φτάσει στο άκρο Γ της ράβδου;

77) Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μάζα $M=45\text{ kg}$, μήκος $\ell = 5\text{m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, όταν δεθεί στο άκρο της Α, μέσω νήματος, το οποίο αφού το περάσουμε από τροχαλία μάζας $m_3=5\text{ kg}$ και ακτίνας $R=1/6\text{m}$, κρεμάσουμε στο άλλο άκρο του σώμα Σ_1 κάτω από το οποίο κρέμεται ένα άλλο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=17,5\text{ kg}$.

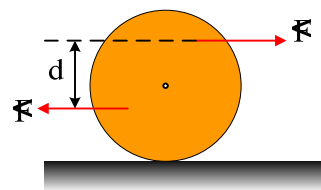


- Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ_1 .
- Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει τα σώματα Σ_1 - Σ_2 . Για αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος, να βρεθούν:
 - Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 .
 - Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και της ράβδου.
 - Η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της, καθώς και η ράβδος από τον άξονα περιστροφής της.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες περιστροφής τους,

της τροχαλίας $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} mR^2$ και της ράβδου $I_o = \frac{1}{3} M\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

78) Ομογενής κύλινδρος μάζας $m=2\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$, ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκούμε πάνω του ζεύγος οριζοντίων δυνάμεων μέτρου $F=4\text{N}$ όπως στο σχήμα, ο μοχλοβραχίονας του οποίου είναι $d=R/2$.



- Αν το επίπεδο είναι λείο
 - Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει ο κύλινδρος και γιατί;
 - Υπολογίστε την ταχύτητα του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=3\text{s}$.
 - Με ποιο ρυθμό το ζεύγος προσφέρει ενέργεια στον κύλινδρο

την παραπάνω χρονική στιγμή;

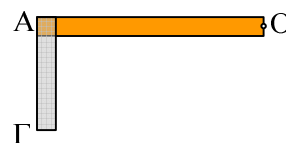
ii) Αν το επίπεδο δεν είναι λείο, αλλά παρουσιάζει με τον κύλινδρο συντελεστή οριακής στατικής τριβής $\mu_s=0,5$

a) Για ποιες τιμές του μέτρου F της κάθε δύναμης, ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση;

b) Ποια η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=3s$, αν $F=4N$;

Δίνονται για τον κύλινδρο $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10m/s^2$.

79) Δύο λεπτές ομογενείς ράβδοι ΑΟ και ΑΓ έχουν κοινό το άκρο τους Α, είναι κάθετες μεταξύ τους, έχουν μήκη $\ell_1=4m$, $\ell_2=2m$ και μάζες $m_1=6kg$ και $m_2=3kg$. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο και συγκρατείται έτσι ώστε η ράβδος ΑΟ να είναι οριζόντια. Σε μια στιγμή αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να περιστραφεί.



i) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.

ii) Ποια η αρχική επιτάχυνση του κοινού άκρου Α των δύο ράβδων;

iii) Για τη χρονική στιγμή που η ράβδος ΟΑ γίνεται κατακόρυφη, να υπολογίσετε:

a) Την ταχύτητα του σημείου Α.

b) Την οριζόντια επιτάχυνση του Α.

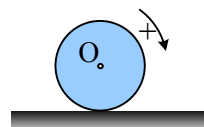
c) Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

d) Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο

οποίος διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

80) Ένας τροχός μάζας $m=10\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,6m$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,6$. Σε μια στιγμή ασκείται πάνω του μια ροπή δεξιόστροφη με μέτρο $\tau=18N\cdot m$.

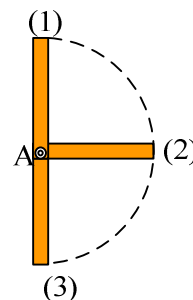


i) Υπολογίστε την επιτάχυνση που θα αποκτήσει το κέντρο Ο του τροχού.

ii) Ποια η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί στον τροχό, ώστε αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

- iii) Αν ασκήσουμε στον τροχό σταθερή ροπή με μέτρο $\tau=72\text{N}\cdot\text{m}$ για χρονικό διάστημα $\Delta t=10\text{s}$, πόση κινητική ενέργεια θα αποκτήσει; Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού γύρω από τον άξονά του $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} mR^2$.

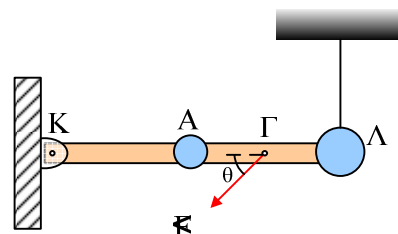
81) Ομογενής ράβδος μήκους $\ell = 0,5\text{m}$ και μάζας $m=0,5\text{ kg}$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Φέρνουμε τη ράβδο σε κατακόρυφη θέση (1) και με μια μικρή ώθηση αρχίζει να περιστρέφεται και στο σχήμα φαίνονται η οριζόντια θέση (2) και την κατακόρυφη θέση (3) από τις οποίες διέρχεται η ράβδος. Για τις θέσεις αυτές να βρεθούν:



- Η κινητική ενέργεια της ράβδου.
 - Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.
 - Η στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.
 - Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα.
- Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο

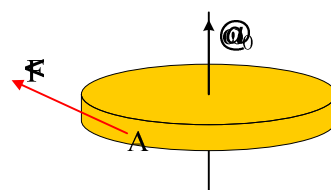
οποίος διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

82) Ράβδος ΚΛ αμελητέου βάρους, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Κ και ισορροπεί οριζόντια, δεμένη στο άλλο της άκρο Λ με κατακόρυφο νήμα, το όριο θραύσεως του οποίου είναι 70N . Στα σημεία Α και Λ της ράβδου, όπου $KA=AL=1\text{m}$ δένονται δύο μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=3\text{ kg}$ αντίστοιχα, ενώ με τη βοήθεια νήματος ασκούμε στη θέση Γ, όπου $AG=0,5\text{m}$ και $\theta=30^\circ$ δύναμη F , όπως στο σχήμα.



- Αν $F=40\text{N}$, να βρεθούν οι ροπές όλων των δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα ράβδος-μάζες, ως προς τα σημεία Κ και Γ.
- Αν αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της δύναμης F για ποια τιμή της, θα σπάσει το νήμα; Πόση θα είναι η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σύστημα τη στιγμή αυτή; $g=10\text{m/s}^2$.

83) Ένας ομογενής δίσκος μάζας $m=1,6\text{kg}$ και ακτίνας $R=25\text{cm}$ έχει το επίπεδό του οριζόντιο και περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα zz' , που διέρχεται από το κέντρο του, με γωνιακή



ταχύτητα $\omega_0=40\text{rad/s}$, χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκείται πάνω του, στο σημείο Α της περιφέρειάς του, εφαπτομενικά οριζόντια δύναμη $F=2\text{N}$, όπως στο σχήμα. Η δύναμη F καταργείται τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$.

- Να προσδιορίσετε τη ροπή της δύναμης και τη γωνιακή επιτάχυνση που προκαλεί.
- Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.
- Ποιες χρονικές στιγμές η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι ίση με 10J και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, τις στιγμές αυτές;

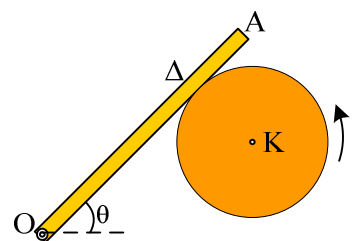
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του

$$I = \frac{1}{2} m \cdot R^2.$$

84) Ένας τροχός αυτοκινήτου μάζας 10 kg , ακτίνας $R=0,4\text{m}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu=0,4$. Σε μια στιγμή $t=0$, δέχεται σταθερή ροπή ως προς τον άξονά του $\tau=18\text{Nm}$, μέσω του συστήματος κίνησης, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$, οπότε η ροπή μηδενίζεται. Ας αγνοήσουμε το υπόλοιπο αυτοκίνητο και ας μελετήσουμε την κίνηση του τροχού σαν μεμονωμένο σώμα, θεωρώντας ότι ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

- Σχεδιάστε ένα σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό.
- Πώς υπολογίζουμε την επιτάχυνση και πώς τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού;
- Ποια ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού για $t_2=10\text{s}$;
- Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις για $t=12\text{s}$; $g=10\text{m/s}^2$.

85) Ο κύλινδρος του σχήματος μάζας $m_1=5\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,8\text{m}$, στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που περνά από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{rad/s}$. Θέλοντας να ακινητοποιήσουμε τον κύλινδρο, φέρνουμε σε επαφή με τον κύλινδρο μια ομογενή ράβδο ΟΑ, μήκους 4m και μάζας $m_2=6\text{kg}$, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στη θέση επαφής η ράβδος σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\theta=60^\circ$ και το σημείο επαφής Δ απέχει από το άκρο Α απόσταση 1m . Ο



συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σανίδας και κυλίνδρου είναι $\mu=0,5$.

- i) Πόση κάθετη δύναμη δέχεται η ράβδος από τον κύλινδρο στο σημείο επαφής Δ;
- ii) Υπολογίστε την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- iii) Πόσες περιστροφές θα κάνει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει;
Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

86) Η ομογενής ράβδος (AB) του σχήματος έχει μήκος 4m, μάζα 30 kg και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το σημείο O, όπου (AO)=1m. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, δεμένη στο άκρο της B με κατακόρυφο νήμα.

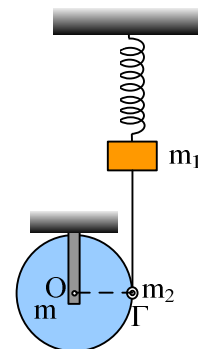


- i) Βρείτε την τάση του νήματος, καθώς και τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα.
- ii) Σε μια στιγμή $t=0$, κόβουμε το νήμα.
 - a) Υπολογίστε την αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
 - b) Βρείτε τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής αμέσως μόλις κοπεί το νήμα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που

διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$ και $g=10 \text{ m/s}^2$.

87) Σώμα A μάζας $m_1=1\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=400\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένας κατακόρυφος ομογενής δίσκος μάζας $m=18\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ έχει προσκολλημένο σε κάποιο σημείο Γ της περιφέρειάς του ένα μικρό σώμα B, που θεωρείται υλικό σημείο, μάζας m_2 , ενώ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του O. Τα σώματα A και B συνδέονται με αβαρές και μη εκτατό κατακόρυφο νήμα με όριο θραύσης 10N, με τέτοιο τρόπο ώστε το τμήμα OΓ να είναι οριζόντιο και το σύστημα ισορροπεί.



- i) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της μάζας του σώματος B, ώστε το νήμα να κοπεί.
- ii) Για την τιμή της μάζας του προηγούμενου ερωτήματος, να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος δίσκος-σώμα B:

- a) Τη στιγμή που κόβεται το νήμα.
 - b) Όταν το σύστημα έχει στραφεί κατά 60° .
 - iii) Ποια η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα Β.
 - iv) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για το σώμα Α, αν για $t=0$ κόβεται το νήμα και θετική θεωρείται η φορά προς τα πάνω.
- Δίνεται για τον δίσκο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Ερωτήσεις Θεωρίας

- 1) Συμπληρώστε τα κενά:

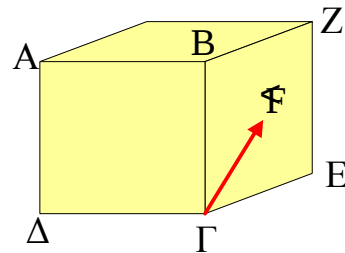
Η ροπή δύναμης ως προς σημείο έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί , διεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από και φορά που ορίζεται από

- 2) Στην κορυφή Γ του κύβου ασκείται η δύναμη $\mathbf{F}$ η οποία κατευθύνεται προς την απέναντι κορυφή Z .

i) Να υπολογίσετε τη ροπή της δύναμης ως προς την ακμή AD .

ii) Να σχεδιάσετε στο σχήμα το διάνυσμα της ροπής.

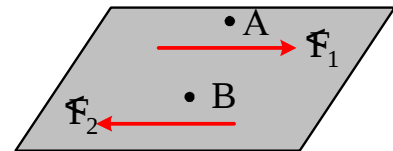
iii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις για τη ροπή ως προς την κορυφή E ;



- 3) Ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Θεωρήστε δύο στοιχειώδεις μάζες του σώματος που απέχουν διαφορετική απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Ποια από τα μεγέθη α) γραμμική ταχύτητα β) γωνιακή ταχύτητα γ) γωνιακή επιτάχυνση και δ) κεντρομόλος επιτάχυνση, έχουν την ίδια τιμή για τις δύο μάζες;

- 4) Τι ονομάζουμε ζεύγος δυνάμεων;

Να βρείτε τη ροπή του ζεύγους των οριζοντίων δυνάμεων $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ με μέτρο 10N , όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι $0,5\text{m}$ και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της ως προς:



- i) Το σημείο A , το οποίο απέχει $0,2\text{m}$ από την F_1 .
 ii) Το σημείο B , το οποίο απέχει $0,4\text{m}$ από την F_1 .

- 5) Ένα υλικό σημείο ανήκει σε στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

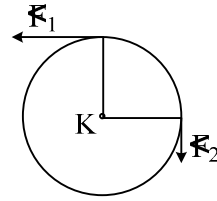
- i) δεν επιταχύνεται
 ii) έχει σταθερή κεντρομόλο επιτάχυνση
 iii) έχει γωνιακή επιτάχυνση
 iv) το μέτρο της περιστροφικής γραμμικής ταχύτητας του είναι σταθερό

- 6) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού δεν εξαρτάται από :

- i) τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής
 ii) τη μάζα του
 iii) τη θέση του άξονα περιστροφής

iv) το σχήμα του

- 7) Η κυκλική στεφάνη του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα R , μάζα m , μπορεί να στρέφεται γύρω από κάθετο σε αυτή άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και δέχεται την επίδραση των δυνάμεων F_1 και F_2 , με μέτρα $F_1=2F_2=2F$. Αν η μάζα της θεωρείται συγκεντρωμένη στη περιφέρειά της, τότε η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά είναι ίση με:



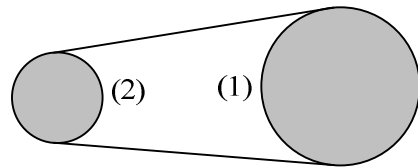
α. $\frac{2F}{mR}$. β. $\frac{F}{mR}$. γ. $\frac{3F}{mR}$. δ. $\frac{\sqrt{2}F}{mR}$.

- 8) Καλλιτέχνης του πατινάζ που περιστρέφεται αρχικά έχει τα χέρια του απλωμένα και στη συνέχεια τα συμπύσσει, τότε :

- i) η ροπή αδράνειας του ως προς τον άξονα περιστροφής μεγαλώνει
- ii) η στροφορμή του μικραίνει
- iii) η στροφορμή του μεγαλώνει
- iv) η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μεγαλώνει

- 9) Στο σύστημα τροχών με ιμάντα δίνονται : $R_1 = 10 \text{ cm}$,
 $R_2 = 2 \text{ cm}$ και $\omega_1 = 5 \text{ r/s}$. Είναι :

α. $\omega_2 = 5 \text{ r/s}$ β. $\omega_2 = 25 \text{ r/s}$ γ. $\omega_2 = 1 \text{ r/s}$

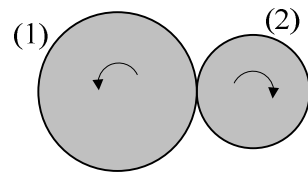


Η απάντηση να αιτιολογηθεί

- 10) Υλικό σημείο ανήκει σε στερεό που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

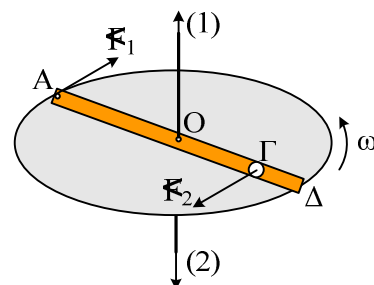
- α. Η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή
- β. Η περιστροφική γραμμική εφαπτομενική επιτάχυνση είναι μηδέν
- γ. Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι σταθερή
- δ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι σταθερό

- 11) Στο σύστημα των οδοντωτών τροχών ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ;



- α. $\omega_1 = \omega_2$
- β. Τα σημεία επαφής των δυο τροχών έχουν ίσες περιστροφικές γραμμικές ταχύτητες
- γ. $\omega_1 < \omega_2$

- 12) Μια ράβδος ΑΔ στρέφεται οριζόντια γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της Ο, με γωνιακή ταχύτητα ω , όπως στο σχήμα. Στο σημείο Γ της ράβδου έχει προσδεθεί σταθερά μια σημειακή μάζα m_1 . Σε



μια στιγμή ασκείται στο άκρο Α της ράβδου οριζόντια δύναμη F_1 κάθετη στην ράβδο, ενώ στη μάζα m_1 αντιπαράλληλη δύναμη F_2 ίδιου μέτρου.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες.

- i) Η ροπή της δύναμης F_2 ως προς τον άξονα, έχει μέτρο $\tau = F_2 \cdot (ΟΓ)$ και φορά όπως το διάνυσμα (2).
 - ii) Για το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος ισχύει $F_1 \cdot (ΑΓ) = I_0 a_{\gamma\omega\nu}$, όπου I_0 η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής.
 - iii) Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος έχει φορά όπως το διάνυσμα (2).
 - iv) Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σύστημα μέσω της δύναμης F_1 είναι $\frac{1}{2} F_1 \cdot (ΑΔ) \cdot \omega$.
 - v) Η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα, είναι κατακόρυφη, όπως το διάνυσμα (1).
 - vi) Η στροφορμή της μάζας m_1 ως προς τον άξονα, έχει μέτρο $L = m_1 \omega (ΟΓ)^2$.
 - vii) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα, είναι κατακόρυφη όπως το διάνυσμα (1).
- 13) Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου αφήνουμε να κυλήσουν χωρίς ολίσθηση διαδοχικά δύο συμπαγείς κυλίνδρους με μάζες $m_1 > m_2$ και ακτίνες $R_1 > R_2$. Να συγκρίνετε :
- i) τους χρόνους κίνησης τους στο κεκλιμένο επίπεδο
 - ii) τις γωνιακές ταχύτητες περιστροφής όταν φθάνουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
- 14) Συμπαγής κυκλικός δίσκος και κυκλικός δακτύλιος έχουν την ίδια μάζα m , την ίδια ακτίνα R και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους .
- A.** Να συγκρίνετε τις ροπές αδράνειας των δύο στερεών
- B.** Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζουμε να ασκούμε στα δύο σώματα εφαπτομενικά ίσες δυνάμεις μέτρου F η κάθε μία. Μετά από χρόνο t να συγκρίνετε :
- i) τη στροφορμή τους
 - ii) τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τους
- 15) Δυο υλικά σημεία ανήκουν σε στερεό που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Το ένα σημείο απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση r_1 και το άλλο απόσταση r_2 ($r_2 < r_1$). Τότε ισχύει :

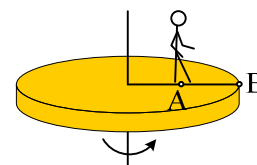
α. $\alpha_{κ1} = \alpha_{κ2}$

β. $\alpha_{κ1} < \alpha_{κ2}$

γ. $\alpha_{κ1} > \alpha_{κ2}$

Η απάντηση να αιτιολογηθεί

- 16) Μια πλατφόρμα στρέφεται όπως στο σχήμα με γωνιακή ταχύτητα ω , ενώ στο σημείο Α στέκεται ένα μικρό παιδί. Σε μια στιγμή αρχίζει



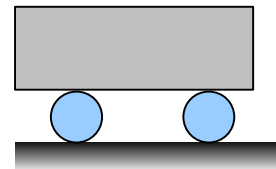
να περπατά και μετά από λίγο φτάνει στο σημείο Β. Κατά τη διάρκεια της μετακίνησης του παιδιού:

- α) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής παραμένει σταθερή.
- β) Η κινητική ενέργεια του συστήματος πλατφόρμα-παιδί παραμένει σταθερή.
- γ) Η στροφορμή του συστήματος μειώνεται.
- δ) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής μειώνεται.

17) Κατά τη στροφική κίνηση ενός σώματος, γύρω από σταθερό άξονα:

- i) όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.
- ii) κάθε σημείο του σώματος κινείται με γραμμική ταχύτητα $v = \omega r$ (ω η γωνιακή ταχύτητα, r η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής).
- iii) κάθε σημείο του σώματος έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = v_{cm}/R$ (v_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας, R η απόσταση του σημείου από το κέντρο μάζας).
- iv) η διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας μεταβάλλεται.

18) Οι δυο όμοιοι τροχοί κυλίνουν με μεταφορική ταχύτητα v μεταφέροντας το κιβώτιο που ακουμπάει πάνω τους χωρίς να γλιστράει. Η ταχύτητα με την οποία μεταφέρεται το κιβώτιο είναι :



- α. v β. $2v$ γ. $\frac{1}{2}v$.

Η απάντηση να αιτιολογηθεί

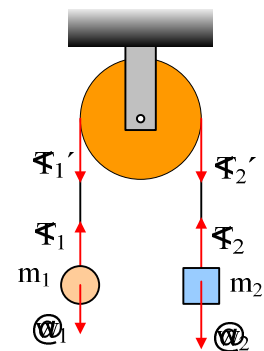
19) Ομογενής κύλινδρος ακτίνας R κυλάει χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή μεταφορική ταχύτητα πάνω σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο.

Να αιτιολογηθεί η ορθότητα των προτάσεων :

- α. Το σημείο του κυλίνδρου που είναι στην κατώτερη θέση έχει ταχύτητα μηδέν
- β. Το σημείο του κυλίνδρου που είναι στην ανώτερη θέση έχει διπλάσια ταχύτητα από αυτήν του κέντρου μάζας
- γ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου υπολογίζεται από τη σχέση : $v_{cm} = \omega R$

20) Στο διπλανό σχήμα δίνεται $m_2 > m_1$. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.

- i) Αν η τροχαλία είναι αβαρής, τότε $T_1' = T_2'$.
- ii) Αν το νήμα είναι αβαρές $T_1 = T_1'$.
- iii) Αν η τροχαλία έχει μάζα M και το σχοινί δεν γλιστράει στο αυλάκι της, τότε:
- iv) Οι μάζες m_1 και m_2 έχουν την ίδια επιτάχυνση.
- v) Το βάρος $w_2 > T_2'$.
- vi) Η T_2' είναι μεγαλύτερη από την T_1' .



vii) Η επιτάχυνση της μάζας m_2 συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας με τη σχέση $a = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$.

21) Ομογενής σφαίρα ακτίνας R κινείται πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο. Κάποια στιγμή t το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα v_0 ενώ το ανώτερο σημείο της A έχει γραμμική ταχύτητα $v_A = 3/2 v_0$. Να βρεθούν:

- α. αν η σφαίρα κυλάει με ή χωρίς ολίσθηση.
- β. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της σφαίρας
- γ. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κατώτερου σημείου B της σφαίρας

22) Η ροπή αδράνειας στερεού σώματος εξαρτάται από:

- α. τη θέση του άξονα περιστροφής
- β. τη γωνιακή ταχύτητα
- γ. τη γωνιακή επιτάχυνση
- δ. την ακτινική κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής

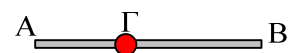
Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστές ;

23) Ομογενής δίσκος τίθεται σε περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό και ακίνητο άξονα , ξεκινώντας από την ηρεμία, υπό την επίδραση σταθερής ροπής .

Να αιτιολογηθεί η ορθότητα ή μη των προτάσεων :

- α. Το έργο της ροπής ανά περιστροφή είναι το ίδιο
- β. Η μέση ισχύς ανά περιστροφή είναι σταθερή

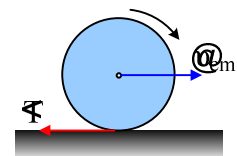
24) Δίνεται μια αβαρής ράβδος AB μήκους $1m$, σε σημείο Γ της οποίας στερεώνεται μια μικρή σημειακή μάζα $m=0,2kg$, η οποία απέχει απόσταση $d=0,4m$ από το άκρο A της ράβδου. Στο άκρο A ή στο B πρέπει να στηρίξουμε κατακόρυφα τη ράβδο στην παλάμη μας για να πετύχουμε καλύτερη ισορροπία, με την έννοια ότι αν εκτραπεί λίγο από την κατακόρυφο, θα αποκτήσει μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση;



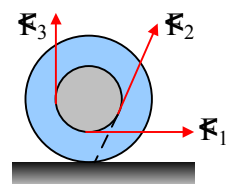
25) Ο εικονιζόμενος κύλινδρος κυλιέται ολισθαίνοντας .

Ποια από τις προτάσεις για τη δύναμη τριβής είναι η σωστή :

- α. Επιταχύνει και την περιστροφική και την μεταφορική κίνηση
- β. Επιβραδύνει και την περιστροφική και την μεταφορική κίνηση
- γ. Επιταχύνει την περιστροφική και επιβραδύνει την μεταφορική κίνηση
- δ. Επιταχύνει την μεταφορική κίνηση και επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση



26) Ένα γιο-γιο ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο τραπέζι και είναι ελεύθερο να κυληθεί. Τι θα συμβεί αν το νήμα τραβηχτεί με δύναμη όπως:



- η F_1 , οριζόντια προς τα δεξιά
 η F_2 , ο φορέας της περνά από το σημείο επαφής με το δάπεδο
 η F_3 , κατακόρυφα προς τα πάνω

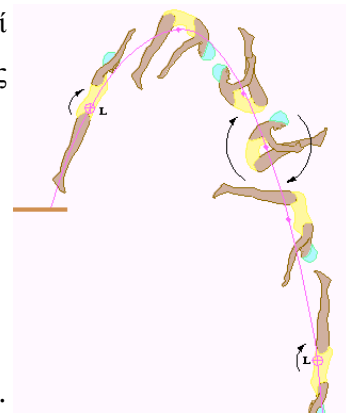
27) Μια συμπαγής ξύλινη σφαίρα κυλίνεται χωρίς ολίσθηση σε δυο κεκλιμένα επίπεδα του ίδιου ύψους και κλίσεων $\varphi_1 > \varphi_2$. Να συγκρίνετε :

- α.** τις ταχύτητες που φθάνουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου
β. τους χρόνους κίνησης επί του κεκλιμένου επιπέδου

28) Αθλητής καταδύσεων πηδά από την εξέδρα και εκτελεί περιστροφή στον αέρα πριν πέσει στο νερό συσπειρώνοντας το σώμα του· έτσι πετυχαίνει να μεγαλώσει:

- α.** την στροφορμή του
β. την ροπή αδράνειας του
γ. την γωνιακή ταχύτητα του

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας



29) Η Σελήνη εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη.

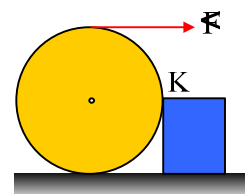
Ποια από τα παρακάτω μεγέθη, που αναφέρονται στη Σελήνη παραμένουν σταθερά ;

- α.** η γραμμική ταχύτητα
β. η γωνιακή ταχύτητα
γ. η ορμή
δ. η κινητική ενέργεια
ε. η στροφορμή

30) Μια χορεύτρια μπαλέτου εκτελεί περιστροφή γύρω από τον άξονα της με τα χέρια απλωμένα οριζόντια και ξαφνικά τα κατεβάζει μέχρι να κολλήσουν στο σώμα της. Ποια από τα παρακάτω μεγέθη θα αυξηθούν και γιατί ;

- α.** η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής
β. η στροφορμή
γ. η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής
δ. η κινητική περιστροφική ενέργεια

31) Γύρω από έναν κύλινδρο τυλίγουμε ένα νήμα στο άκρο του οποίου ασκούμε οριζόντια δύναμη F , με στόχο να υπερπηδήσει ο κύλινδρος ένα εμπόδιο, ύψους $h=R$, όπως στο σχήμα. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και ο κύλινδρος ισορροπεί.



- i) Σχεδιάστε τη δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο στο σημείο επαφής του με το εμπόδιο K, δικαιολογώντας την κατεύθυνσή της.

ii) Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου είναι:

- a) Μεγαλύτερη από το βάρος του κυλίνδρου.
- b) Ίση με το βάρος του κυλίνδρου.
- c) Μικρότερη από το βάρος.

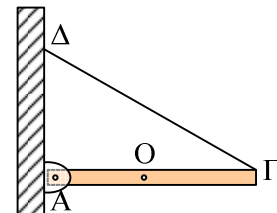
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

iii) Αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της δύναμης F . Τη στιγμή που ο κύλινδρος είναι έτοιμος να υπερπηδήσει το εμπόδιο, το μέτρο της δύναμης F είναι:

- a) Τουλάχιστο διπλάσιο του βάρους του κυλίνδρου.
- b) Ίσο με το βάρος του κυλίνδρου.
- c) Ίσο με την κάθετη αντίδραση του επιπέδου.
- d) Μεγαλύτερο από το μέτρο της δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο στο σημείο K .

Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παραπάνω προτάσεις.

32) Η ομογενής δοκός του σχήματος βάρους 50N και μήκους 4m , ισορροπεί οριζόντια αρθρωμένη σε κατακόρυφο τοίχο στο άκρο A και δεμένη με νήμα στο άλλο άκρο της Γ , όπως στο σχήμα.



i) Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- a) Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο A είναι -100Nm .
- b) Η ροπή της τάσης του νήματος ως προς το A είναι $+100\text{Nm}$.
- c) Η δοκός δέχεται από την άρθρωση κατακόρυφη δύναμη $<F$ με φορά προς τα πάνω.
- d) Η ροπή της δύναμης $<F$ ως προς το σημείο Δ είναι $+200\text{Nm}$.

ii) Να αποδείξετε την ακόλουθη πρόταση:

«Αν το νήμα είχε δεθεί στο μέσον O της ράβδου, τότε η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση είναι οριζόντια»

33) Περιστρέφουμε ένα στυλό με την ίδια γωνιακή ταχύτητα με δύο διαφορετικούς τρόπους:

- i) με άξονα παράλληλο προς τον άξονα του στυλό και
- ii) με άξονα κάθετο προς τον άξονα του στυλό.

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α. Σε ποια περίπτωση η ροπή αδράνειας του στυλό είναι μεγαλύτερη:

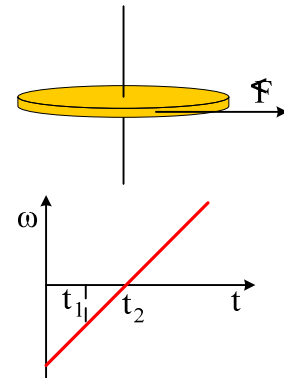
- i. όταν ο άξονας είναι κάθετος
- ii. όταν είναι παράλληλος
- iii. σε καμία.

β. Σε ποια περίπτωση η κινητική ενέργεια του στυλό είναι μεγαλύτερη:

- i. όταν ο άξονας είναι κάθετος
- ii. όταν ο άξονας είναι παράλληλος
- iii. είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

34) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι μικρότερη από τη ροπή αδράνειάς του ως προς οποιονδήποτε άλλο άξονα που είναι παράλληλος σ' αυτόν. Πώς ερμηνεύεται αυτό;

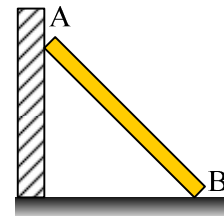
35) Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Στο δίσκο ασκείται οριζόντια δύναμη F που εφάπτεται στο δίσκο. Η δύναμη F μεταβάλλει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου όπως φαίνεται στο κάτω διάγραμμα.



Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;

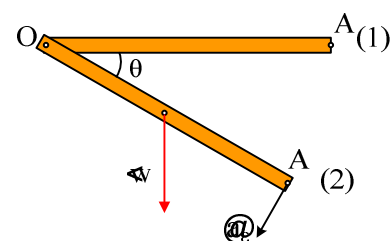
- i) Η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή.
- ii) Τη χρονική στιγμή t_2 που η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδέν, η δύναμη F είναι μηδέν.
- iii) Η ροπή της δύναμης αυξάνεται με το χρόνο.
- iv) Η δύναμη F έχει σταθερό μέτρο.
- v) Τη στιγμή t_1 η γωνιακή ταχύτητα έχει φορά προς τα πάνω.
- vi) Η γωνιακή επιτάχυνση τη στιγμή t_1 έχει φορά προς τα πάνω.

36) Μια δοκός ισορροπεί, όπως στο σχήμα, ακουμπώντας σε λείο κατακόρυφο τοίχο.



- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.
 - ii) Να εξηγήσετε γιατί το οριζόντιο επίπεδο δεν είναι λείο.
 - iii) Η δύναμη που δέχεται η δοκός από το έδαφος στο σημείο B (όχι η N) είναι:
 - α) Μικρότερη από το βάρος της δοκού.
 - β) Ίση με το βάρος της δοκού.
 - γ) Μεγαλύτερη του βάρους.
- Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

37) Μια ομογενής ράβδος OA μάζας m και μήκους ℓ , μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της O , χωρίς τριβές. Η ράβδος αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση (1) και μετά από λίγο περνάει από τη θέση (2). Για



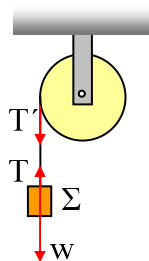
την ράβδο δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το

$$\text{μέσον της } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m\ell^2.$$

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

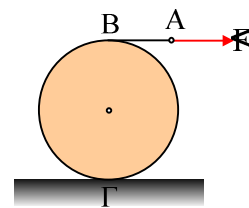
- i) Η συνολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, που δέχεται η ράβδος στη θέση (2) είναι ίση με $\tau = -\frac{1}{2} mg \cdot \eta \mu \theta$.
- ii) Καθώς πέφτει η ράβδος η γωνιακή της επιτάχυνση μικραίνει.
- iii) Το άκρο A της ράβδου στη θέση (2) έχει επιτόρξια επιτάχυνση $a_e = 3/2 g \sin \theta$
- iv) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των θέσεων (1) και (2), βρίσκουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στη θέση (2) συνδέεται με τη γωνία θ με τη σχέση: $\ell \cdot \omega^2 = 3g \cdot \eta \mu \theta$.

38) Γύρω από μια τροχαλία έχουμε τυλίξει ένα νήμα στο άκρο του οποίου δένεται ένα σώμα και αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί.



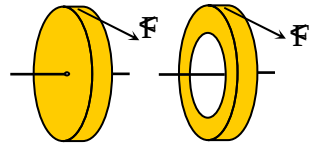
- i) Γράψτε το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:
 - a) Για το σώμα Σ.
 - b) Για την τροχαλία.
- ii) Να αποδείξετε ότι μεταξύ της επιτάχυνσης του σώματος Σ και της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας ισχύει η σχέση $a = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, όπου R η ακτίνα της τροχαλίας.
- iii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας δίνεται από την εξίσωση
- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος δίνεται από την εξίσωση
- v) Αν κάποια στιγμή t_1 η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι ω_1 :
 - a) πόσο είναι το έργο της T' από 0- t_1 ;
 - b) Με ποιο ρυθμό η τάση του νήματος προσφέρει ενέργεια στην τροχαλία τη στιγμή αυτή;

39) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο ο οποίος ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα. Για $t=0$ ασκούμε στο άκρο A του νήματος μια σταθερή οριζόντια δύναμη F . Δίνεται η ροπή αδράνειάς του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$. Να χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις, δίνοντας σύντομες επεξηγήσεις:



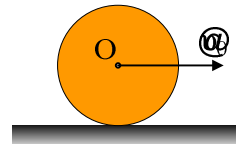
- i) Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου είναι ίση με $a_{cm}=F/m$.
- ii) Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου συνδέεται με την επιτάχυνση του άξονα με τη σχέση $a_{cm}=\alpha_{γων}\cdot R$.
- iii) Η επιτάχυνση του σημείου A είναι τριπλάσια από την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου παραμένει σταθερή.

- 40) Το σχήμα δείχνει ένα συμπαγή κυκλικό δίσκο και ένα κυκλικό δακτύλιο που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα και μπορούν να στρέφονται γύρω από οριζόντιο άξονα. Τη στιγμή μηδέν, που τα δύο σώματα είναι ακίνητα, ασκούνται σ' αυτά δυνάμεις του ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρειά τους. Να αποδείξετε ότι μετά από χρόνο t τα δύο σώματα θα έχουν ίσες στροφορμές.



- 41) Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι
- i) ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.
 - ii) αντίστροφα ανάλογη με τη μάζα του σώματος.
 - iii) ανάλογη με τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.
 - iv) ανάλογη με τη ροπή που ασκείται στο σώμα.

- 42) Ένας τροχός εκτοξεύεται σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ , με αρχική ταχύτητα v_0 και χωρίς να στρέφεται. Δίνεται η ροπή αδράνειάς του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= \frac{1}{2} m \cdot R^2$. Να χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

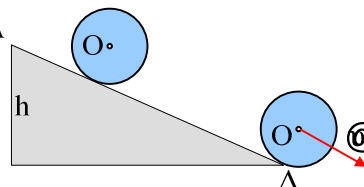


- i) Ο τροχός δέχεται δύναμη τριβής με φορά προς τα αριστερά και μέτρο $T=\mu mg$.
- ii) Η επιβράδυνση του κέντρου O του τροχού είναι ίση με μg .

iii) Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού είναι ίση με $\alpha_{γων} = \frac{2\mu g}{R}$.

- iv) Η τριβή μηδενίζεται μόλις η ταχύτητα του κέντρου O του τροχού γίνει $v=v_0/3$.

- 43) Ένας κύλινδρος αφήνεται στην κορυφή A ενός κεκλιμένου επιπέδου, οπότε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά από λίγο φτάνει με ταχύτητα v στη βάση του επιπέδου.



- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.
- ii) Να χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις:
 - a) Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση για την οποία ισχύει $v_{cm}=\omega \cdot R$.

- b) Ο κύλινδρος κινείται με σταθερή επιτάχυνση του κέντρου Ο.
 - c) Ο κύλινδρος έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση.
 - d) Η τελική ταχύτητα του κέντρου Ο μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $v=a_{cm} \cdot t$.
 - e) Η τριβή που ασκείται πάνω του είναι στατική.
 - f) Το μέτρο της τριβής υπολογίζεται από τη σχέση $T=\mu mg \sin \varphi$.
 - g) Το έργο της τριβής είναι αρνητικό.
- iii) Κατά τη διάρκεια της κίνησης η Μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.
- iv) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του κέντρου Ο του κυλίνδρου υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\alpha_{cm} = \frac{mg \eta \mu \theta}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (1)$$

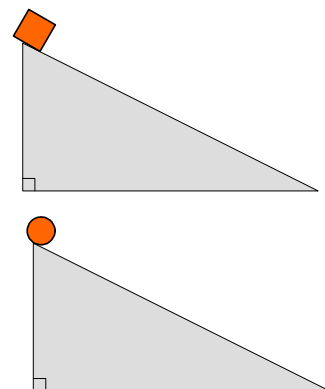
όπου I η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου και R η ακτίνα του.

- v) Με εφαρμογή της ΑΔΜΕ παίρνουμε $2mgh = (m + \frac{I}{R^2}) v^2$ (2), όπου v η τελική ταχύτητα του κυλίνδρου.
- vi) Αν αντί για κύλινδρο αφήναμε μια σφαίρα, ίσης μάζας και ίδιας ακτίνας, η οποία επίσης κυλιέται χωρίς ολίσθηση, χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις:
- a) Η ροπή αδράνειας της σφαίρας θα ήταν μικρότερη.
 - b) Οι εξισώσεις (1) και (2) θα ίσχυαν και για τη σφαίρα.
 - c) Η επιτάχυνση θα ήταν μικρότερη.
 - d) Ο χρόνος κίνησης θα ήταν μικρότερος.
 - e) Η ταχύτητα με την οποία η σφαίρα θα έφτανε στην κορυφή Δ θα ήταν μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ταχύτητα του κυλίνδρου.

- 44) Ένας κύβος από πάγο και μία σφαίρα αφήνονται από το ίδιο ύψος σε πλάγιο επίπεδο. Η σφαίρα κυλιέται κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου ενώ ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβή. Οι μάζες των δύο σωμάτων είναι ίσες και οι διαστάσεις τους μικρές σε σχέση με το ύψος από το οποίο αφέθηκαν να κινηθούν.

Να συγκρίνετε

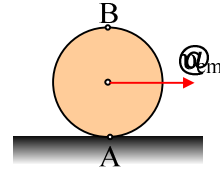
- i) Το έργο του βάρους κατά την κίνηση των δύο σωμάτων.
- ii) Την ταχύτητα με την οποία τα σώματα φτάνουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου.



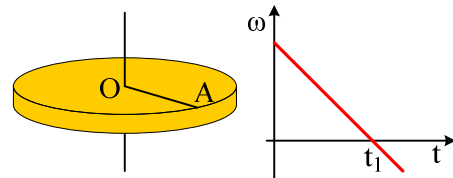
45) Ο τροχός του σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας v_{cm} .

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές.

- Ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση. Μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του.
- Η ταχύτητα του σημείου B είναι ίση με $2v_{cm}$.
- Η ταχύτητα του κέντρου μάζας συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα με τη σχέση $v_{cm} = \omega \cdot R$.
- Η επιτάχυνση του σημείου B είναι ίση με $a = \omega^2 \cdot R$.
- Ο τροχός εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο A, οπότε για τα σημεία O και B ισχύουν: $v_O = \omega \cdot R$ και $v_B = \omega \cdot (AB)$.

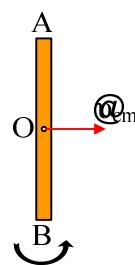


46) Ο δίσκος του διπλανού σχήματος στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.



- Σημειώστε στο σχήμα τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης για μια στιγμή $t < t_1$.
- Για την παραπάνω στιγμή σχεδιάστε την ταχύτητα και της επιτροχια επιτάχυνση του σημείου A, που βρίσκεται στην περιφέρειά του δίσκου.
- Ο δίσκος έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ή όχι και γιατί;
- Για την ροπή που ασκείται στον δίσκο:
 - Είναι μηδενική
 - Αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο
 - Μειώνεται γραμμικά με το χρόνο.
 - Είναι σταθερή.

47) Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας m . Σε μια στιγμή δέχεται κατάλληλο κτύπημα με αποτέλεσμα να αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα v_{cm} και γωνιακή ταχύτητα ω , όπως στο διπλανό σχήμα. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{12}ml^2$, χαρακτηρίστε τις παρακάτω

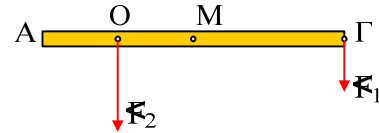


προτάσεις σαν σωστές.

- Η ράβδος θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση. Επιβραδυνόμενη μεταφορική και επιβραδυνόμενη στροφική.
- Η ταχύτητα του σημείου A έχει μέτρο $v_A = 2v_{cm}$.
- Η επιτάχυνση του σημείου A κατευθύνεται προς το μέσον O.

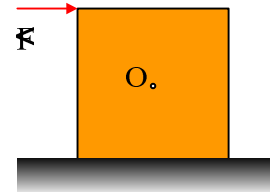
- iv) Τα σημεία A και B έχουν ίσες κατά μέτρο επιταχύνσεις.
 v) Αν η ταχύτητα του σημείου B είναι μηδενική, τότε η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι ίση με $K = \frac{3}{4} mv^2$.

48) Η ομογενής ράβδος ΑΓ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Μ και ισορροπεί οριζόντια με την επίδραση δύο κατακόρυφων δυνάμεων F_1 και F_2 όπου $(AO) = (OM)$. Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.



- i) Η ροπή της δύναμης F_1 είναι αρνητική.
 ii) Για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει $F_2 = 2F_1$.
 iii) Η ράβδος δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη N από τον άξονα στο μέσον της Μ.
 iv) Αν το βάρος της ράβδου είναι $w = F_1$, τότε:
 a) Η ροπή της δύναμης N του άξονα ως προς το άκρο Α είναι ίση με $\tau = + F_1 \cdot \ell$.
 b) Αν πάψει να ασκείται η δύναμη F_1 , αμέσως μετά η δύναμη N έχει μέτρο μεγαλύτερο από το βάρος της ράβδου.

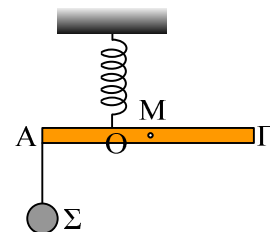
49) Πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα κυβικό βαρύ κιβώτιο. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω του μια οριζόντια δύναμη F στην αριστερή πάνω κορυφή του χωρίς να μπορέσουμε να κινήσουμε το κιβώτιο.



Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.

- i) Στο κιβώτιο ασκείται στατική τριβή με φορά προς τα αριστερά.
 ii) Η τριβή που ασκείται στο σώμα μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $T = \mu_s \cdot N$.
 iii) Η τριβή και η δύναμη F έχουν ίσες κατά μέτρο ροπές ως προς το κέντρο O του κιβωτίου.
 iv) Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου περνά από το κέντρο O.

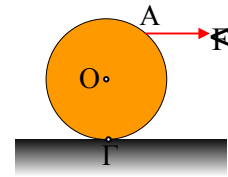
50) Η ομογενής ράβδος του διπλανού σχήματος ισορροπεί οριζόντια δεμένη στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο συνδέεται σε σημείο O όπου $(AO) = 2(OM)$, ενώ στο άκρο Α, μέσω νήματος κρέμεται μια σφαίρα βάρους w . Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:



- i) Η ράβδος είναι βαρύτερη από τη σφαίρα.
 ii) Στη ράβδο ασκούνται τρεις δυνάμεις. Το βάρος της, το βάρος της σφαίρας και η δύναμη του ελατηρίου.
 iii) Η δύναμη του ελατηρίου είναι τριπλάσια του βάρους της σφαίρας.

iv) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U=1,5\text{w (J)}$

51) Ένας κύλινδρος βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης F η οποία ασκείται σε σημείο A της περιφέρειάς του, όπως στο σχήμα.



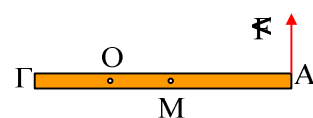
- i) Η ροπή της δύναμης
 - a) έχει φορά προς τα δεξιά.
 - b) Είναι οριζόντια με μέτρο $\tau=FR$.
 - c) Είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα στο σημείο A .
 - d) Είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα στο σημείο O και μέτρο μικρότερο από το γινόμενο FR .
- ii) Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.
 - a) Ο κύλινδρος θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση προς τα δεξιά.
 - b) Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου έχει σταθερό μέτρο.
 - c) Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα δίνεται από τη σχέση $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$.
 - d) Η επιτάχυνση του σημείου A έχει την κατεύθυνση της δύναμης F .
- iii) Αν το επίπεδο είναι λείο:
 - a) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου είναι ίσος με μηδέν.
 - b) Η αρχική ισχύς της δύναμης είναι μηδενική.
 - c) Ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
 - d) Η αρχική επιτάχυνση του σημείου Γ είναι μηδενική.

52) Η ράβδος του σχήματος έχει μάζα m και μήκος ℓ . Οι δύο μάζες m απέχουν $\ell/4$ από τον άξονα περιστροφής, ο οποίος περνά από το μέσον της ράβδου. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Αν οι δύο μάζες μεταφερθούν στα δύο άκρα της ράβδου, τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος:



- i) Θα παραμείνει ίση με $5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
- ii) Θα γίνει ίση με $10\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
- iii) Θα γίνει ίση με $20\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
- iv) Είναι πάνω από $40\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

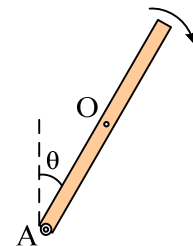
53) Μια ομογενής ράβδος $ΑΓ$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο O . Ασκούμε στο άκρο του A μια σταθερού μέτρου οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα (κάτοψη, το βλέπουμε από πάνω).



- i) Για τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου:

- a) Οφείλεται σε ένα ζεύγος δυνάμεων που ασκείται στη ράβδο η ροπή του οποίου έχει μέτρο $\tau = F \cdot d$.
- b) Έχει την κατεύθυνση της δύναμης F .
- c) Έχει το ίδιο μέτρο είτε ο άξονας περνά από το O , είτε περνά από το μέσον της M της ράβδου.
- d) Αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.
- ii) Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.
- a) Η κίνηση της ράβδου είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη.
- b) Για την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου ισχύει $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$.
- c) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι σταθερός.
- d) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
- e) Η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου κίνησης.
- f) Αν ο άξονας περιστροφής περνά από το άκρο Γ , η ράβδος θα αποκτούσε και μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση μιας και αυξάνεται ο μοχλοβραχίονας της δύναμης.
- g) Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά από μια πλήρη περιστροφή είναι ίση με
- $$K = 2\pi \cdot (OA) \cdot F.$$
- iii) Μετά από χρόνο t :
- a) η στροφορμή της ράβδου είναι ίση με $L = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$ όπου I η ροπή αδράνειας της ως προς τον άξονα περιστροφής.
- b) Η ράβδος έχει spin με μέτρο $I_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$ όπου I_1 η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσον της M .

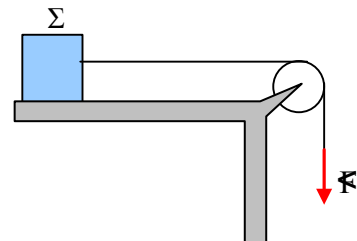
54) Μια ράβδος μήκους ℓ , μάζας m και ροπής αδράνειας ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της I_1 , στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A , ξεκινώντας με μηδενική γωνιακή ταχύτητα από την κατακόρυφη θέση. Σε μια στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ έχει γωνιακή ταχύτητα ω .



- i) Για τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου:
- a) Έχει την κατεύθυνση που δείχνει το βελάκι στο διπλανό σχήμα.
- b) Είναι κάθετη στο επίπεδο του χαρτιού με φορά προς τα μέσα και διέρχεται από το μέσον O της ράβδου.
- c) Αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.
- d) Θα αποκτήσει μέγιστη τιμή, τη στιγμή που η ράβδος θα γίνει κατακόρυφη.

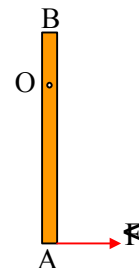
- ii) Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.
- Η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο έχει μέτρο $\tau = \frac{1}{2} mgl \cdot \eta\mu\theta$.
 - Η γωνιακή επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση : $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{mgl\eta\mu\theta}{2I_1}$.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι ίσος με $\frac{1}{2} mgl \cdot \eta\mu\theta$.
 - Η ισχύς του βάρους στη θέση αυτή είναι $P = \frac{1}{2} mg\omega \cdot \eta\mu\theta$.
 - Ο άξονας ασκεί μια δύναμη στη ράβδο που η κατακόρυφη συνιστώσα της είναι ίση με το βάρος της ράβδου.

55) Το σώμα Σ του διπλανού σχήματος έχει μάζα m και ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Δένουμε το σώμα στο άκρο νήματος, το οποίο αφού το περάσουμε από μια τροχαλία μάζας m και ακτίνας R , ασκούμε στο άλλο του άκρο μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη F . Το νήμα δεν γλιστράει στην τροχαλία, ενώ η ροπή αδράνειας της τροχαλίας δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.



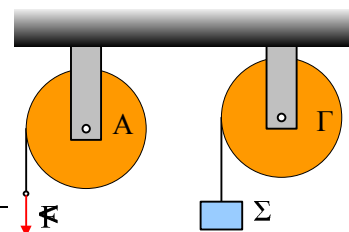
- Το σώμα Σ και η τροχαλία αποκτούν την ίδια επιτάχυνση.
- Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας υπολογίζεται από τη σχέση $F \cdot R = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$.
- Η επιτάχυνση του σώματος Σ υπολογίζεται από την εξίσωση $F = m \cdot a$.
- Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ είναι κάθε στιγμή διπλάσια της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας.

56) Μια ομογενής σανίδα μήκους l μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από ένα σημείο O , όπου $(BO) = l/4$. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στο άκρο A μια δύναμη F σταθερού μέτρου η οποία είναι πάντα κάθετη στη σανίδα, με αποτέλεσμα μετά από λίγο η σανίδα να βρίσκεται σε οριζόντια θέση.



- Η σανίδα θα αποκτήσει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση.
- Η σχέση που συνδέει κάθε στιγμή τη γωνία περιστροφής και τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι $\omega^2 = 2\theta \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου είναι σταθερός.
- Η κινητική ενέργεια της ράβδου τη στιγμή που θα είναι οριζόντια είναι ίση με το έργο της δύναμης, δηλαδή $K = \frac{3}{4} \pi \cdot F \cdot l$.
- Η κινητική ενέργεια της ράβδου τη στιγμή που θα είναι οριζόντια είναι μικρότερη από το έργο της δύναμης, δηλαδή $K < \frac{3}{4} \pi \cdot F \cdot l$.

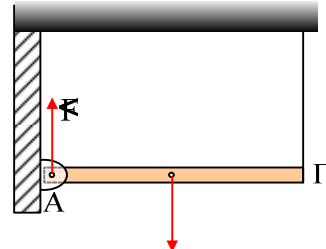
57) Γύρω από δύο όμοιες τροχαλίες A και Γ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και στο άκρο του στην A τροχαλία ασκούμε



μια δύναμη μέτρου F , ενώ στην Γ τροχαλία δένουμε ένα σώμα βάρους $w=F$.

- i) Και οι δύο τροχαλίες αποκτούν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση.
- ii) Η A τροχαλία αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, όχι όμως και η Γ τροχαλία.
- iii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής και των δύο τροχαλιών είναι ίσος με FR .
- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος Γ είναι ίσος με FR .

58) Η ομογενής δοκός AG είναι αρθρωμένη σε κατακόρυφο τοίχο και ισορροπεί οριζόντια όταν το άκρο Γ δένεται με κατακόρυφο νήμα.



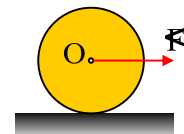
- i) Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.
 - a) Η δύναμη που δέχεται η δοκός από τη άρθρωση είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα.
 - b) Το μέτρο της δύναμης $<F$ είναι ίσο με το μισό του βάρους της ράβδου.

59) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Αν για τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{3}m\ell^2$ και για τη

χρονική στιγμή αμέσως μετά:

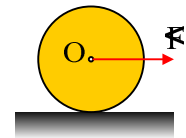
- a) Η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού είναι ανάλογη της μάζας.
- b) Η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού είναι ανάλογη του μήκους της δοκού.
- c) Η δύναμη από την άρθρωση είναι κατακόρυφη και ίση με το μισό του βάρους της ράβδου.
- d) Η επιτάχυνση του κέντρου βάρους της δοκού είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g .
- e) Η επιτάχυνση του άκρου Γ είναι μεγαλύτερη από g .

60) Ένας κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στον άξονά του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



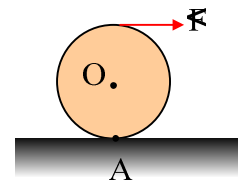
- i) Το επίπεδο δεν είναι λείο και στον κύλινδρο ασκείται στατική τριβή με φορά προς τα αριστερά.
- ii) Το επίπεδο είναι λείο.
- iii) Η μεταφορική κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλή.
- iv) Η μεταφορική κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που υπολογίζεται από τη σχέση $F=ma_{cm}$.

61) Ένας κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στον άξονά του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα. Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.



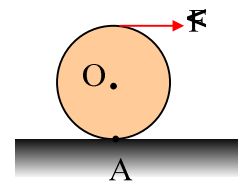
- i) Αν το επίπεδο είναι λείο τότε ο κύλινδρος θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.
- ii) Αν υπάρχει τριβή, αυτή θα έχει φορά προς τα αριστερά.
- iii) Υπεύθυνη για την περιστροφή του κυλίνδρου είναι η ασκούμενη τριβή.
- iv) Η ασκούμενη τριβή είναι στατική και υπολογίζεται από την εξίσωση $T = \mu_s \cdot mg$.
- v) Αν η τριβή είναι στατική, τότε ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
- vi) Αν ο κύλινδρος ολισθαίνει ή όχι εξαρτάται από το μέτρο της δύναμης F .

62) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κατόπιν τον τοποθετούμε σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τραβώντας το νήμα για $t=0$ ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα. Αν ως προς τον άξονα του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.



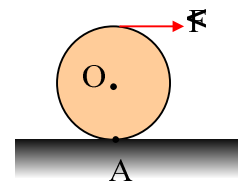
- i) Ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
- ii) Ο κύλινδρος θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
- iii) Ένα σημείο A επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο έχει μηδενική ταχύτητα.
- iv) Το σημείο A έχει επιτάχυνση προς τα αριστερά.

63) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κατόπιν τον τοποθετούμε σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Τραβώντας το νήμα για $t=0$ ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα. Αν ως προς τον άξονα του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.



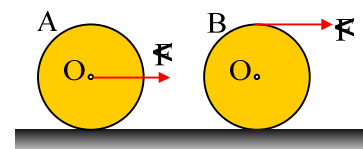
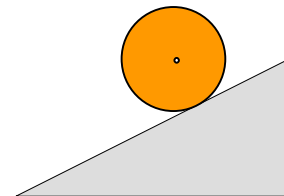
- i) Ο κύλινδρος θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
- ii) Η ασκούμενη τριβή έχει φορά προς τα αριστερά.
- iii) Το σημείο A έχει επιτάχυνση προς τα αριστερά.
- iv) Για την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου ισχύει $a_{cm} > F/m$.

64) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κατόπιν τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο. Τραβώντας το νήμα για $t=0$ ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα, οπότε ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αν ως προς τον άξονα του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.



- i) Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.
 - a) Η επιτάχυνση του άξονα είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας του κυλίνδρου.
 - b) Η γωνιακή επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας του κυλίνδρου.

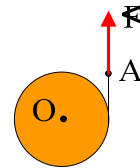
- c) Η ασκούμενη τριβή έχει μέτρο $T = F/3$.
- d) Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\mu_s \geq \frac{F}{3mg}$
- ii) Αν ο άξονας του κυλίνδρου μετακινηθεί κατά x , τότε το έργο της δύναμης F είναι ίσο με:
- a) $F \cdot x$. β) $F \cdot R \cdot x$. γ) $2 F \cdot x$ δ) τριπλάσιο από το έργο της τριβής.
- iii) Ο ρυθμός μεταβολής τα στροφορμής του κυλίνδρου:
- a) Αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.
- b) Είναι σταθερός και ίσος με $F \cdot R$.
- c) Είναι σταθερός και μικρότερος από $F \cdot R$.
- d) Είναι σταθερός και μεγαλύτερος από $F \cdot R$.
- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι:
- a) σταθερός β) $F \cdot v_{cm}$. γ) $F \cdot R \cdot \omega$. δ) $2 F \cdot v_{cm}$.
- 65) Ο κύλινδρος του σχήματος αφήνεται να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο, οπότε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
- i) Ποια πρόταση είναι σωστή:
- a) Το επίπεδο είναι λείο.
- b) Στον κύλινδρο ασκείται στατική τριβή με φορά προς τα πάνω.
- c) Το έργο του βάρους είναι ίσο με την μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.
- d) Το έργο της τριβής είναι ίσο με μηδέν.
- e) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου έχει μέτρο $mg \cdot R \cdot \eta \mu \theta$.
- ii) Αν ο κύλινδρος εκκινείτο προς τα πάνω κατά μήκος του επιπέδου, χωρίς ολίσθηση:
- a) Το επίπεδο είναι λείο.
- b) Στον κύλινδρο ασκείται στατική τριβή με φορά προς τα πάνω.
- c) Το έργο του βάρους είναι ίσο με την μείωση της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου.
- d) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου έχει μέτρο $mg \cdot R \cdot \eta \mu \theta$.
- 66) Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο όμοιοι κύλινδροι. Για $t=0$ ασκείται πάνω τους η ίδια σταθερή δύναμη F , στον Α κύλινδρο στον άξονά του και στον Β εφαπτομενικά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι κύλινδροι κυλίνουν χωρίς ολίσθηση.



Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

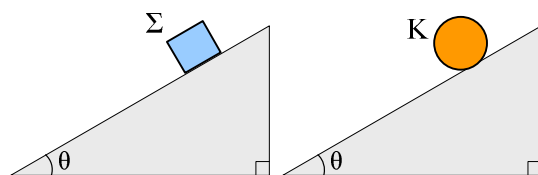
- i) Αν η επιτάχυνση του Α κυλίνδρου είναι a_1 , τότε του Β είναι $a_2=2a_1$.
- ii) ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Β κυλίνδρου έχει διπλάσιο μέτρο από τον αντίστοιχο ρυθμό για τον Α.
- iii) Μετά από χρόνο t_1 :
- Για τις κινητικές ενέργειες των κυλίνδρων ισχύει $K_2=2K_1$.
 - Για τα παραγόμενα από τη δύναμη F έργα ισχύουν $W_1=W_2$.
 - Για το ρυθμό με τον οποίο παρέχεται ενέργεια στους κυλίνδρους ισχύει $P_2=2P_1$.

67) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα. Τραβάμε το νήμα ασκώντας στο άκρο του Α σταθερή κατακόρυφη δύναμη F , ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε τον κύλινδρο να κινηθεί. Αν ως προς τον άξονα του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} m R^2$.



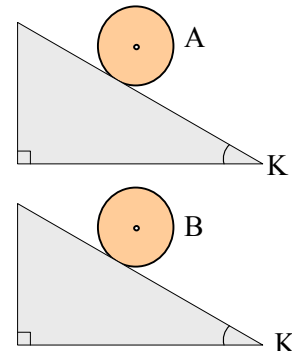
- i) Αν $F=mg$, τότε:
- Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση.
 - Το σημείο Α παραμένει ακίνητο.
 - Το σημείο Α κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση $a=2F/m$.
 - Ο κύλινδρος κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση $a=2F/m$.
- ii) Αν $F=mg/2$ ποια πρόταση είναι λάθος;
- Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με φορά προς τα κάτω και στροφική ομαλά επιταχυνόμενη.
 - Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου έχει μέτρο $g/2$ και φορά προς τα κάτω.
 - Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας του.
 - Η επιτάχυνση του σημείου Α έχει μέτρο $g/2$ και φορά προς τα κάτω.
- iii) Αν ο κύλινδρος μετατοπισθεί κατακόρυφα κατά h , τότε η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου θα είναι ίση:
- με το έργο του βάρους.
 - με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας του κυλίνδρου.
 - Με $2mgh$
 - Με $1,5mgh$.

68) Από το ίδιο ύψος σε δύο κεκλιμένα επίπεδα αφήνονται να κινηθούν ένα σώμα Σ και ένας κύλινδρος K ίδιας μάζας. Το σώμα Σ κινείται χωρίς τριβές ενώ ο κύλινδρος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες.



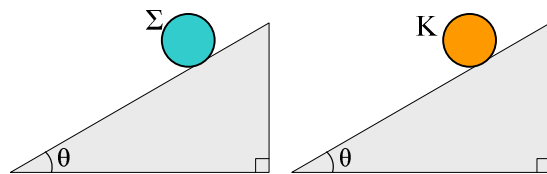
- i) Στον κύλινδρο ασκείται δύναμη τριβής με φορά προς τα πάνω.
- ii) Η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο δίνεται από τη σχέση $T = \mu N$, όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.
- iii) Μεγαλύτερη επιτάχυνση αποκτά το σώμα Σ .
- iv) Στην βάση του επιπέδου θα φτάσει πρώτο το σώμα Σ με μεγαλύτερη ταχύτητα.
- v) Στην βάση του επιπέδου θα φτάσει πρώτο το σώμα Σ με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.
- vi) Ισχύει η διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας και για τις δύο περιπτώσεις.
- vii) Επειδή στον κύλινδρο ασκείται τριβή, η Μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου μειώνεται.

69) Από το ίδιο ύψος δύο όμοιων κεκλιμένων επιπέδων, αφήνονται ταυτόχρονα δύο κύλινδροι να κινηθούν. Ο κύλινδρος A δεν εμφανίζει τριβή με το επίπεδο, ενώ ο B εμφανίζει αρκετά μεγάλο συντελεστή τριβής με το δεύτερο επίπεδο και έτσι δεν ολισθαίνει. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες.



- i) Οι δύο κύλινδροι θα αποκτήσουν την ίδια επιτάχυνση.
- ii) Ο A κύλινδρος θα φτάσει στην κορυφή K του επιπέδου με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτήν του B κυλίνδρου.
- iii) Εξαιτίας της μεγάλης τριβής που παρουσιάζει ο B κύλινδρος με το επίπεδο, πιθανόν να μην κινηθεί.
- iv) Ο κύλινδρος B θα φτάσει με μικρότερη ταχύτητα στην κορυφή K, επειδή, λόγω τριβής, ένα μέρος της αρχικής δυναμικής ενέργειας, μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.

70) Από το ίδιο ύψος σε δύο κεκλιμένα επίπεδα αφήνονται να κινηθούν μια σφαίρα Σ και ένας κύλινδρος K με την ίδια ακτίνα και ίσες μάζες. Τα σώματα κυλίσουν χωρίς να

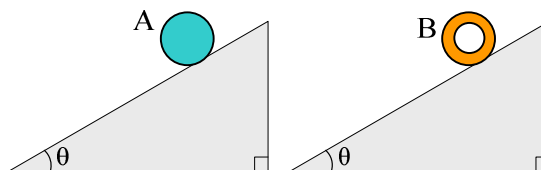


ολισθαίνουν. Αν οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες περιστροφής δίνονται από τις σχέσεις για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και για τη σφαίρα $I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$, να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες.

- i) Τα δύο σώματα αποκτούν την ίδια επιτάχυνση a_{cm} .
- ii) Η τριβή που ασκείται στα σώματα έχει φορά προς τα πάνω.
- iii) Μεγαλύτερη τριβή ασκείται στον κύλινδρο.
- iv) Φτάνοντας στη βάση του επιπέδου μεγαλύτερη ταχύτητα έχει ο κύλινδρος.
- v) Φτάνοντας στη βάση του επιπέδου μεγαλύτερη κινητική ενέργεια έχει ο κύλινδρος.

71) Από το ίδιο ύψος σε δύο κεκλιμένα επίπεδα

αφήνονται να κινηθούν από το ίδιο ύψος, ένας κύλινδρος A και ένας δεύτερος όμοιος από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας ομοαξονικός κύλινδρος, με αποτέλεσμα να

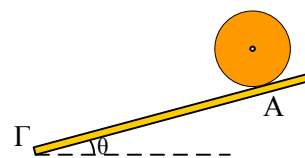


πάρουμε ένα κυλινδρικό κέλυφος. Τα σώματα κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν.

Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

- Μεγαλύτερη ροπή αδράνειας παρουσιάζει το B σώμα.
- Μεγαλύτερη επιτάχυνση αποκτά ο A κύλινδρος.
- Πρώτο θα φτάσει στη βάση του επιπέδου το σώμα B.
- Ο κύλινδρος A θα φτάσει στη βάση του επιπέδου με μεγαλύτερη ταχύτητα από το B.
- Ο κύλινδρος A θα φτάσει στη βάση του επιπέδου με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από το B.

72) Αφήνουμε ένα κύλινδρο από ύψος h , να κυλήσει χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος μιας σανίδας κλίσεως θ , οπότε φτάνει στη βάση της σανίδας, σημείο Γ με ταχύτητα v . Αν μεγαλώσει η γωνία κλίσεως θ , χωρίς να μεταβληθεί το ύψος h , τότε:

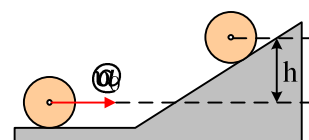


i) Θα φτάσει στο σημείο Γ με ταχύτητα v_1 , όπου:

- α) $v_1 = v$ β) $v_1 > v$ γ) $v_1 < v$

ii) Σε ποια περίπτωση ο κύλινδρος φτάνει στο σημείο Γ με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

73) Ένας τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_{cm} = v_0$, όταν συναντά λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ , στο οποίο αρχίζει να ανεβαίνει. Το μέγιστο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο φτάνει είναι h . Αν δίνεται για τον τροχό

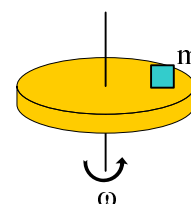


$I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$, ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

- Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής στο οριζόντιο επίπεδο είναι $\omega_0 = v_0/R$.
- Η αρχική κινητική ενέργεια του τροχού είναι ίση με $K = \frac{3}{4} m v_0^2$.
- Η επιβράδυνση στη διάρκεια της ανόδου στο κεκλιμένο επίπεδο έχει μέτρο $a_{cm} = g \sin \theta$.
- Τα μέτρα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας και της γωνιακής επιτάχυνσης συνδέονται με τη σχέση $a_{cm} = a_{γων} \cdot R$.

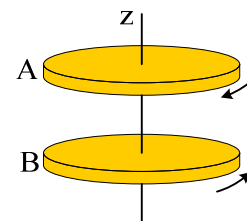
v) Το μέγιστο ύψος δίνεται από τη σχέση $h = \frac{3v_0^2}{4g}$.

74) Ένας κυκλικός δίσκος στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Αν πάνω του τοποθετήσουμε ένα σώμα μάζας m , τότε:



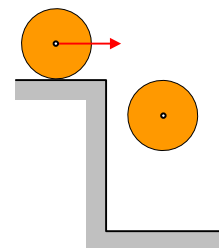
- i) Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος:
 α) Θα αυξηθεί β) θα μειωθεί γ) θα παραμείνει σταθερή.
- ii) Η κινητική ενέργεια:
 α) Θα αυξηθεί β) θα μειωθεί γ) θα παραμείνει σταθερή.
- iii) Αν αντί να τοποθετήσουμε το σώμα πάνω στο δίσκο, οπότε το σύστημα αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω_1 , το αφήναμε να πέσει από ορισμένο ύψος και κολλούσε στην ίδια θέση, για τη γωνιακή ταχύτητα ω_2 που θα αποκτούσε το σύστημα ισχύει:
 α) $\omega_2 = \omega_1$ β) $\omega_2 > \omega_1$ γ) $\omega_2 < \omega_1$.

75) Οι δύο όμοιοι δίσκοι Α και Β του σχήματος στρέφονται γύρω από τον ίδιο άξονα με αντίθετη φορά με ίσες κατά μέτρο γωνιακές ταχύτητες ω . Αν αφήσουμε τον Α δίσκο να πέσει και να κολλήσει στον δίσκο Β, τότε το σύστημα:



- i) Θα μείνει ακίνητο.
 ii) Θα περιστραφεί δεξιόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω .
 iii) Θα περιστραφεί αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω .
 iv) Θα περιστραφεί δεξιόστροφα με γωνιακή ταχύτητα 2ω .

76) Ο κύλινδρος του σχήματος κυλίεται στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει και σε μια στιγμή εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_{cm} . Κατά την οριζόντια βολή που θα εκτελέσει:



- i) Η ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου:
 α) αυξάνεται β) μειώνεται γ) παραμένει σταθερή.
- ii) Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου:
 α) αυξάνεται β) μειώνεται γ) παραμένει σταθερή.
- iii) Η στροφορμή του κυλίνδρου:
 α) αυξάνεται β) μειώνεται γ) παραμένει σταθερή.
- iv) Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου:
 α) αυξάνεται β) μειώνεται γ) παραμένει σταθερή.

77) Συμπληρώστε τα κενά ώστε να ισχύουν οι αντιστοιχίες

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
.....	I: ροπή αδράνειας
ορμή $p=mv$	
.....	τ : ροπή
$\Sigma F=ma$	
1 ~	

78) Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l ηρεμεί σε οριζόντια θέση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα σώμα Σ μάζας επίσης m που θεωρείται υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα v_0 σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και προσκολλάται στο άκρο Γ . Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

- Πριν την σύγκρουση η ολική στροφορμή είναι ίση με $I\omega$, όπου I η ροπή αδράνειας του σώματος Σ .
- Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.
- Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.
- Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.
- Το σύστημα μετά την σύγκρουση θα περιστρέφεται γύρω από το μέσον O της ράβδου.
- Για τις γραμμικές ταχύτητες λόγω περιστροφής των σημείων A και Γ ισχύει $v_A = 3v_\Gamma$.

