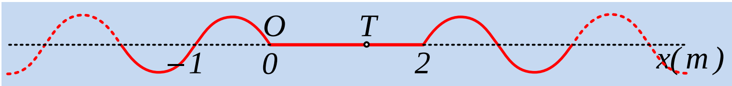
Δύο τρέχοντα κύματα και περιοχές συμβολής.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα x, διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους A=0,2m, τα οποία διαδίδονται αντίθετα με συχνότητα 1Hz. Τη στιγμή t=0 το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο O, στη θέση x=0, ενώ το δεύτερο απέχει κατά 2m από το O, όπως στο σχήμα.



i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.

ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

iii) α) Να σχεδιάστε τη μορφή του ελαστικού μέσου, στην περιοχή -2m ≤ x≤ 3m, τη χρονική στιγμή t_1=1,25s.

β) Να σχεδιάστε επίσης τη μορφή του μέσου τη στιγμή $t_1΄$=1s.

iv) Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει αυτό σχηματισθεί, τη χρονική στιγμή t_2=1,75s.

v) Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση x=0,5m. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, από t=0, έως και t=4s.

Απάντηση:

i) Από το σχήμα $\lambda=2m \rightarrow \upsilon=\lambda f=2m/s$.

Οπότε η εξίσωση του πρώτου κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά θα είναι:

$$y_1 = A\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right)\ \text{(S.I.)}\ \text{με } t\geq 0.$$

Το σημείο εξάλλου που φτάνει το 2^{ο} κύμα ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά), οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$y=A\cdot\eta\mu\omega t$$

Αλλά τότε το τυχαίο σημείο T, στη θέση x, θα καθυστερήσει να αρχίσει να ταλαντώνεται κατά χρονικό διάστημα $t_1=\frac{s}{\upsilon}=\frac{2-x}{2}s$ και η εξίσωση της απομάκρυνσής του (η εξίσωση του 2^{ου} κύματος), θα είναι:

$$y_2 = A\cdot\eta\mu 2\pi f\left(t-t_1\right)=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{2-x}{2}\right)\ \text{ή}$$

$$y_2=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t+\frac{x}{2}-1\right)\ \text{με } t\geq 0 \text{ και } x\geq -2t+2\quad \text{(S.I.)}$$

ii) Από την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε $y=y_1+y_2$ ή

$$y=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{t-\frac{x}{2}-t-\frac{x}{2}+1}{2}\cdot\eta\mu 2\pi\frac{t-\frac{x}{2}+t+\frac{x}{2}-1}{2}$$

$$y=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi-\pi x)\cdot\eta\mu(2\pi t-\pi)\text{ ή}$$

$$y=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot\eta\mu(2\pi t)\text{ (S.I.) με } t\geq 0{,}5s \text{ και } 2\text{-}2t\leq x\leq 2t$$

iii) α) Η παραπάνω εξίσωση του στάσιμου έχει «πεδίο ορισμού» $2\text{-}2t \leq x \leq 2t$ και για t_1=1,25s παίρνουμε -0,5m $\leq$ x $\leq$ 2,5m ή εναλλακτικά, το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση x=υ·t=2,5m και αντίστοιχα το κύμα προς τα αριστερά, έχει διαδοθεί κατά 2,5m έχοντας φτάσει στη θέση x=-0,5m. Προφανώς σε αυτήν την περιοχή έχει δημιουργηθεί το στάσιμο. Για την περιοχή αυτή έχουμε:

$$y=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot\eta\mu(2\pi t)=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot\eta\mu(2\pi\cdot 1{,}25)=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Αλλά τότε στην περιοχή -2m $\leq$ x <-0,5m διαδίδεται το πρώτο κύμα το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά και η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$y=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right)=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(1{,}25-\frac{x}{2}\right)=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x \quad \text{-2m} \leq x < \text{-0,5m}$$

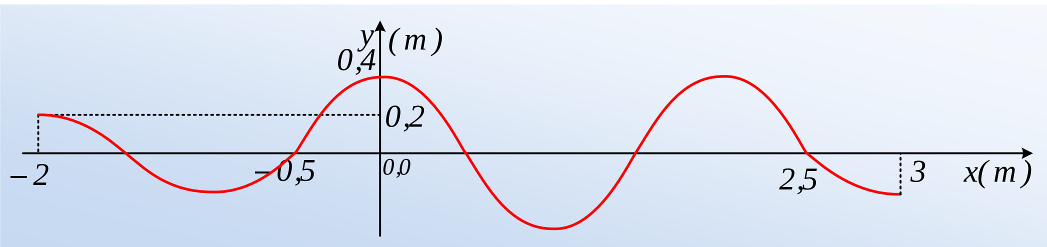
ενώ στην περιοχή 2,5m < x $\leq$3m υπάρχει το δεύτερο κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά, οπότε:

$$y=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t+\frac{x}{2}-1\right)=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(1{,}25+\frac{x}{2}-1\right)=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x,\quad 2{,}5\text{m} < x \leq 3\text{m}$$

Ας δούμε την κατάσταση συγκεντρωτικά:

$$y=\begin{cases}0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x & \text{όταν } -2\text{m}\leq x<-0{,}5\text{m}\\ 0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x) & \text{όταν } -0{,}5\text{m}\leq x\leq 2{,}5\text{m}\\ 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x & \text{όταν } 2{,}5\text{m}<x\leq 3\text{m}\end{cases}$$

Με βάση αυτά η μορφή του μέσου, είναι αυτή του σχήματος:



i) β) Με τον ίδιο τρόπο, από το πεδίο ορισμού στο στάσιμο $2\text{-}2t \leq x \leq 2t$ και για t_1'=1s παίρνουμε: 0m $\leq$ x $\leq$ 2m ή εναλλακτικά, το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση x=υ·t=2m και αντίστοιχα το κύμα προς τα αριστερά, έχει διαδοθεί κατά 2m έχοντας φτάσει στη θέση x=0m. Για την περιοχή αυτή έχουμε:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi t) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 0) = 0$$

Εξάλλου στην περιοχή -2m ≤ x <0 m διαδίδεται το πρώτο κύμα το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά και η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$y = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(1 - \frac{x}{2}\right) = -0{,}2 \cdot \eta\mu\pi x \quad -2m \le x < 0m$$

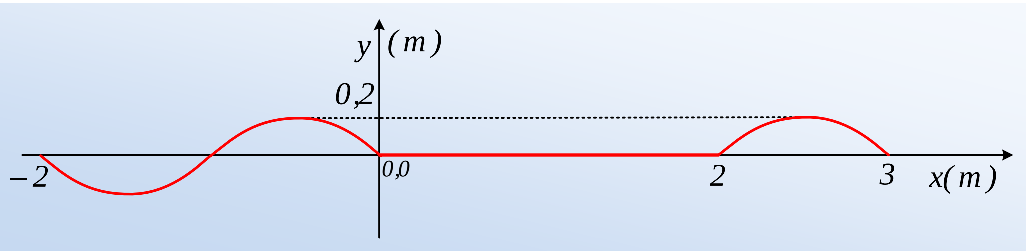
ενώ στην περιοχή 2m < x ≤ 3m υπάρχει το δεύτερο κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά, οπότε:

$$y = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t + \frac{x}{2} - 1\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(1 + \frac{x}{2} - 1\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu\pi x, \quad 2m < x \le 3m$$

Ας δούμε ξανά συγκεντρωτικά:

$$y = \begin{cases} -0{,}2 \cdot \eta\mu\pi x & \text{όταν } -2m \le x < 0m \\ 0 & \text{όταν } 0 \le x \le 2\,m \\ 0{,}2 \cdot \eta\mu\pi x & \text{όταν } 2m < x \le 3m \end{cases}$$

Και η αντίστοιχη γραφική παράσταση:



ii) Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση του στάσιμου t_1=1,75s παίρνουμε:

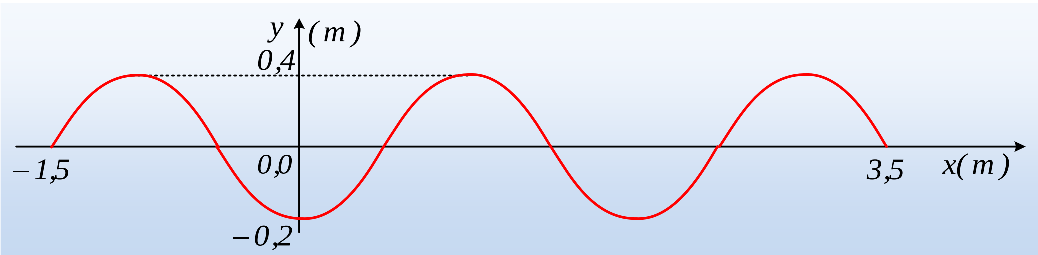
$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi t) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 1{,}75) \text{ ή}$$

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi t) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 1{,}75)$$

$$y = -0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Ενώ με βάση το πεδίο ορισμού που δόθηκε παραπάνω -1,5m ≤ x ≤ 3,5m ή εναλλακτικά, το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση x=υ·t=3,5m και αντίστοιχα το κύμα προς τα αριστερά, έχει διαδοθεί κατά 3,5m έχοντας φτάσει στη θέση x=-1,5m.

Με βάση αυτά, το ζητούμενο στιγμιότυπο έχει τη μορφή:



iii) Το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο Σ, τη στιγμή t=$\frac{x}{\upsilon}=0{,}25s$ ενώ το δεύτερο τη στιγμή

t΄=$\frac{2-x}{\upsilon}=0{,}75s$. Μετά τη συμβολή το Σ είναι δεσμός και δεν ταλαντώνεται, αφού το πλάτος ταλάντωσής του είναι:

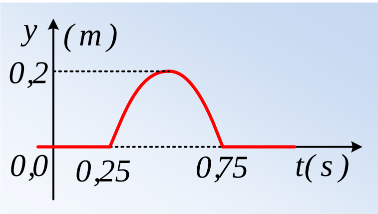
$$A_\Sigma = \left|0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\right| = \left|0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot 0{,}5)\right| = 0$$

Στο χρονικό διάστημα 0,25s ≤ t ≤ 0,75s ταλαντώνεται εξαιτίας του πρώτου κύματος, οπότε:

$$y_1 = 0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right) = 0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{0{,}5}{2}\right)$$

$$y_1 = 0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

και η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει τη μορφή:



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης