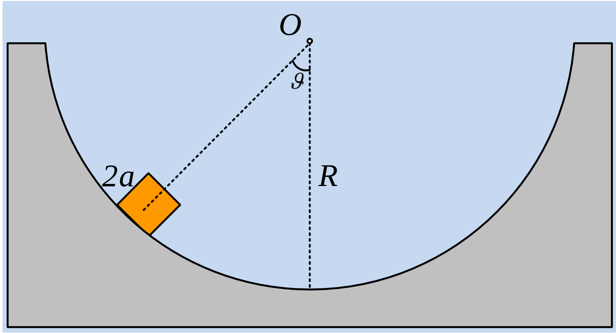
Ένας κύβος σε ημικυλινδρική κοίλη επιφάνεια.



Ένας κύβος ακμής 2α και μάζας m, τοποθετείται στο εσωτερικό μιας κοίλης ημικυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R=10α, σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα που περνά από το κέντρο μάζας του, να σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

i) Αν για το συντελεστή οριακής στατικής τριβής, μεταξύ κύβου και επιφάνειας ισχύει μ_s=0,5, τότε ο κύβος:

α) Θα ισορροπήσει.

β) Θα ανατραπεί.

γ) Θα ολισθήσει κατά μήκος της επιφάνειας.

δ) Θα ολισθήσει και ταυτόχρονα θα ανατραπεί.

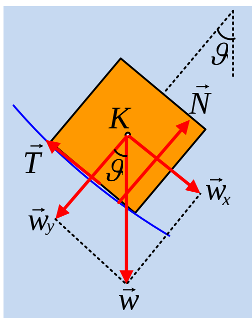
ii) Αν τη στιγμή που η ακτίνα που περνά από το κέντρο μάζας Κ του κύβου, γίνεται κατακόρυφη, το μέτρο της ταχύτητας του Κ, είναι $\upsilon_1 = \sqrt{2ga}$, τότε η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, κατά την κάθοδο του κύβου, είναι:

α) μικρότερη από $0{,}8mga$, β) ίση με $0{,}8mga$ γ) μεγαλύτερη από $0{,}8mga$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Θεωρείστε την απόσταση του κέντρου Κ του κύβου από το κέντρο της τροχιάς Ο ίση με R-α=9α.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο. Στην πραγματικότητα η κάθετη αντίδραση και η τριβή ασκούνται στις δύο ακμές του κύβου, που έρχονται σε επαφή με την ημικυλινδρική επιφάνεια, αλλά για λόγους ευκολίας έχουν σχεδιαστεί ενιαία σε μια θέση.

Στην διεύθυνση της ακτίνας ο κύβος ισορροπεί, οπότε $N=w_y=mg\cdot συνθ$, οπότε η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, που μπορεί να εμφανιστεί (η οριακή τριβή) έχει μέτρο $T_{op}=\mu_s\cdot N=\mu_s\cdot mg\cdot συνθ$. Αλλά τότε στη διεύθυνση x έχουμε:

$$\Sigma F_{x,min} = w_x - T_{op} = mg\cdot ημθ - \mu_s\, mg\cdot συνθ = mg(ημθ - \mu_s\cdot συνθ) > 0 \,,$$

Αφού $ημθ-\mu_s\cdot συνθ=0{,}6-0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}2$.

Συνεπώς ο κύβος δεν θα ισορροπήσει, αλλά θα ολισθήσει προς τα κάτω. Ας σημειωθεί ότι τελικά θα ασκηθεί τριβή ολίσθησης, μικρότερου μέτρου και από την οριακή τριβή και η συνισταμένη δύναμη που θα επιταχύνει τον κύβο, θα έχει μεγαλύτερο μέτρο από αυτό που υπολογίσαμε.

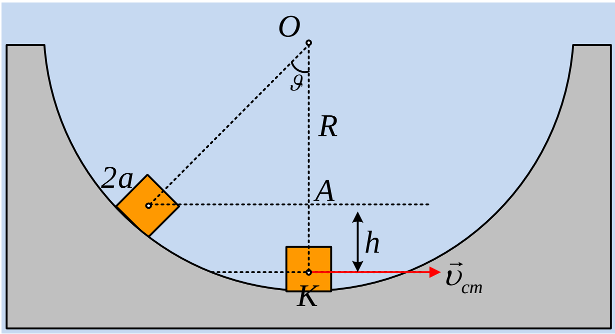
Για να μην ανατρέπεται ο κύβος, θα πρέπει η κάθετη αντίδραση να έχει τέτοια κατεύθυνση, όπου ο φορέας της να απέχει από το κέντρο Κ απόσταση $x \leq α$, οπότε τότε και μόνο τότε θα υπάρχει στήριξη από την επιφάνεια.

Ας υποθέσουμε ότι ανατρέπεται ο κύβος, τότε (θεωρώντας τη ροπή της τριβής θετική), πρέπει $Στ_K>0$, ενώ ο φορέας της Ν πρέπει να απέχει κατά α, από το κέντρο, δηλαδή ο κύβος θα στηρίζεται μόνο στην δεξιά ακμή του στο επίπεδο, συνεπώς:

$$Στ_K= T_{ορ}\cdot α-N\cdot α =μ_s\cdot N\cdot α-N\cdot α= - ½\, N\cdot α <0$$

Άρα η υπόθεση ότι ο κύβος ανατρέπεται δεν είναι σωστή. Συνεπώς ο κύβος θα ολισθήσει προς τα κάτω, χωρίς να ανατρέπεται και σωστή είναι η γ) επιλογή.

ii) Στη θέση που η ακτίνα ΟΚ γίνεται κατακόρυφη, η κατάσταση είναι αυτή που εμφανίζεται στο σχήμα.



Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την κατώτερη θέση του κέντρου Κ, τότε στην αρχική θέση ο κύβος έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_{αρχ}=mgh$$

Όπου $h=(OK)-(OA)=9α-(OK)\cdot συνθ=9α-9α\cdot 0{,}8=1{,}8α$, οπότε $U_{αρχ}=1{,}8mgα$.

Η παραπάνω ενέργεια κατά την προς τα κάτω κίνηση, κατά ένα μέρος της θα μετατραπεί σε κινητική και το υπόλοιπο σε θερμική εξαιτίας της τριβής ολίσθησης, οπότε:

$$U_{αρχ}=K+Q_{θερμ} \rightarrow$$

$$Q_{θερμ}=U_{αρχ}-K=U_{αρχ}-\left(\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2\right)$$

$$Q_{θερμ}= U_{αρχ}-\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2-\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=1{,}8mga-\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2ga}\right)^2-\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \rightarrow$$

$$Q_{θερμ}= U_{αρχ}=1{,}8mga-mga-\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=0{,}8mga-\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2<0{,}8mga$$

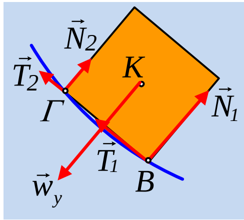
Σωστή η α) πρόταση.

Αξίζει να **τονισθεί** ότι καθώς ο κύβος κατέρχεται κατά μήκος του ημικυκλίου, αλλάζει προσανατολισμό, συνεπώς στρέφεται αποκτώντας γωνιακή ταχύτητα.

Έτσι όταν μιλάμε για κινητική ενέργεια θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής.

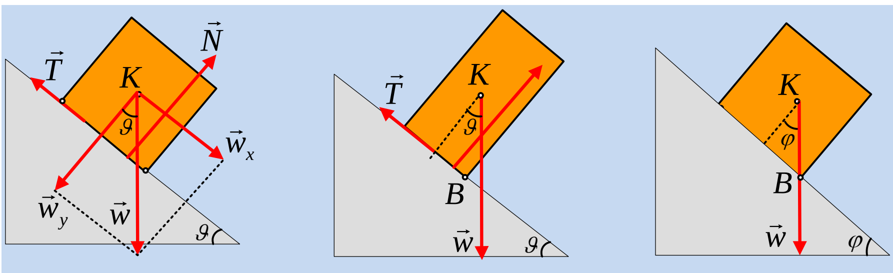
Σχόλια:

1) Στην πραγματικότητα ο κύβος δεν εφάπτεται σε όλα τα σημεία της βάσης του με την ημικυλινδρική επιφάνεια, παρά μόνο με δυο ακμές του, που στο σχήμα, (όπου έχουμε σχεδιάσει μια τομή του στερεού) αντιπροσωπεύονται από τα σημεία Β και Γ. Αλλά τότε δέχεται δυο κάθετες αντιδράσεις N_1 και N_2 και δυο τριβές T_1 και T_2, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου $N_1+N_2=w_y=N$, όπου Ν η «κάθετη αντίδραση» που χρησιμοποιήσαμε στη λύση. Εξάλλου $T_{1ορ}=μ_s·N_1$ και $T_{2ορ}=μ_s·N_2$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $T_{1ορ}+T_{2ορ}=μ_s·(N_1+N_2)=μ_s·N=T_{ορ}$.



Αλλά τότε, όταν επίκειται ανατροπή του κύβου, μηδενίζεται η N_2 και ο κύβος ακουμπά στο επίπεδο μόνο στην ακμή του που περνά από την κορυφή Β, δεχόμενος την αντίδραση $N_2=N$ και τριβή $T_{2ορ}=μ_s·N=T_{ορ}$. Έτσι στην παραπάνω περίπτωση δεν πρόκειται να ανατραπεί ο κύβος, αφού η ροπή της Ν, ως προς το κέντρο Κ, θα ήταν $τ_N=+N·α= +mg·α·συνφ$, ενώ η ροπή της οριακής στατικής τριβής θα ήταν $τ_{Tορ}= -T_{ορ}.α =- μ_s·mg·α·συνθ = - 0,5· mg·α·συνθ$, δηλαδή μικρότερη (κατά μέτρο) από τη ροπή της Ν, που , ακόμη και αν για κάποιο λόγο ανασηκώνονταν ο κύβος, θα τον σταθεροποιούσε…

2) Η αρχική τοποθέτηση του κύβου πάνω στην ημικυλινδρική επιφάνεια, είναι ισοδύναμη με την τοποθέτησή του πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως θ, όπως στο σχήμα (1). Αλλά με βάση το σχήμα το βάρος περνάει από τη βάση στήριξη και ο κύβος δεν πρόκειται να ανατραπεί.



(1) (2) (3)

Αντίθετα αν στο ίδιο επίπεδο τοποθετούσαμε ένα άλλο ορθογώνιο σώμα, όπως στο (2) σχήμα, που το βάρος δεν περνά από τη βάση στήριξης, τότε το βάρος παρουσιάζει ροπή, ως προς την ακμή που περνάει από το Β, και, άσχετα με το τι συμβαίνει με την ύπαρξη ή όχι τριβής, το σώμα θα ανατραπεί.

Βέβαια θα μπορούσαμε να έχουμε ανατροπή, αν τον κύβο μας τον τοποθετούσαμε, πιο ψηλά στην ημικυλινδρική επιφάνεια. Αρχικά είχαμε το τοποθετήσει τον κύβο ώστε η (ΟΚ) να σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία θ, με ημθ=0,6, δηλαδή θ≈36,9°. Αν για παράδειγμα η (ΟΚ) σχημάτιζε γωνία φ=45° με την κατακόρυφη, η κατάσταση θα ήταν όμοια με το (3) σχήμα, όπου το βάρος περνά από το Β (εφφ=$\frac{a}{a}=1$). Η κατάσταση αυτή, είναι μια κατάσταση οριακής ισορροπίας, αφού και η Ν περνάει από το Β και το σώμα «είναι έτοιμο» να ανατραπεί.

Επιμέλεια: ***Διονύσης Μάργαρης***