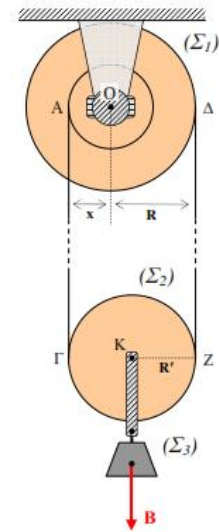


Αναβατόριο με διπλή τροχαλία.

Η διπλή τροχαλία Σ_1 (δύο κολλημένοι δίσκοι) του σχήματος έχει εξωτερική ακτίνα $R = 0,2 \text{ m}$ και εσωτερική $x = R/2 = 0,1 \text{ m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα O (κατά τη φορά του ρολογιού ή αντίθετα) με τη βοήθεια ηλεκτρικού κινητήρα που της ασκεί κατάλληλη ροπή T . Στα δύο αυλάκια της είναι στερεωμένα και τυλιγμένα με αντίθετες φορές τα δύο άκρα μη εκτατού συρματόσκοινου.



Το ενδιαμέσο τμήμα του συρματόσκοινου είναι περασμένο γύρω από την περιφέρεια δεύτερης τροχαλίας Σ_2 ακτίνας R' , την οποία στηρίζει και μπορεί να τη στρέφει γύρω από τον κινητό της άξονα K χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρειά της. Τα τμήματα $ΑΓ$ και $ΔΖ$ του συρματόσκοινου είναι κατακόρυφα.

Από τον άξονα της τροχαλίας Σ_2 είναι κρεμασμένο σώμα Σ_3 βάρους $B = 2000 \text{ N}$, το οποίο ανυψώνεται αν τεθεί σε λειτουργία ο κινητήρας της τροχαλίας Σ_1 .

Υποθέτουμε ότι οι τροχαλίες και το συρματόσκοινο έχουν ασήμαντη μάζα σε σχέση με τη μάζα του Σ_3 και ότι η ανύψωση γίνεται με μικρή σταθερή ταχύτητα.

- α)** Με ποιά φορά πρέπει να στρέφεται η τροχαλία Σ_1 ώστε το σώμα Σ_3 να ανυψώνεται;
- β)** Αν ο κινητήρας στρέφει την τροχαλία Σ_1 με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 \text{ r/s}$, να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω' της τροχαλίας Σ_2 καθώς και την ταχύτητα ανύψωσης v_K του σώματος Σ_3 .
Να απεικονίσετε γραφικά τη σχέση $v_K(x)$ για $0 < x < R$.
- γ)** Αν το επιδιωκόμενο ύψος ανύψωσης είναι H , να υπολογίσετε το ελάχιστο απαιτούμενο μήκος S συρματόσκοινου που πρέπει να είναι αρχικά τυλιγμένο στον μικρό δίσκο της τροχαλίας Σ_1 .
- δ)** Να βρείτε τη ροπή T που πρέπει να ασκεί ο κινητήρας στην τροχαλία Σ_1 και την ισχύ του P σε συνάρτηση με την ακτίνα x του μικρού δίσκου, καθώς επίσης και τον χρόνο ανύψωσης t σε ύψος H .

Να απεικονίσετε γραφικά τις σχέσεις $T(x)$, $P(x)$ και $t(x)$ για $0 < x < R$.

Εφαρμογή για $x = R/2 = 0,1 \text{ m}$ και $H = 10 \text{ m}$.

Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ανάλογα με τη φορά περιστροφής της Σ_1 , το συρματόσκοινο τυλίγεται στον ένα από τους δύο δίσκους και ξετυλίγεται από τον άλλο, στα σημεία A και Δ. Αν η Σ_1 στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , τότε τα μέτρα των αντίστοιχων ταχυτήτων είναι:

$$v_A = \omega \cdot x \text{ και } v_\Delta = \omega \cdot R \text{ οπότε } v_A < v_\Delta \quad (1)$$

Για να ανέρχεται το Σ_3 , θα πρέπει να μικραίνουν τα κατακόρυφα τμήματα AΓ και ΔZ, να είναι δηλαδή το τύλιγμα πιο γρήγορο από το ξετύλιγμα. Λόγω της (1), το συρματόσκοινο πρέπει να τυλίγεται στον εξωτερικό δίσκο και η v_Δ να έχει φορά προς τα επάνω.

Άρα η τροχαλία Σ_1 πρέπει να στρέφεται **αντίθετα από το ρολόι**.

β) Έστω ω και ω' οι γωνιακές ταχύτητες των Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα (προφανώς ομόρροπες).

Επειδή το συρματόσκοινο είναι μη εκτατό, τα σημεία A, Γ καθώς και τα Δ, Z έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων, οπότε:

$$v_\Gamma = v_A = \omega \cdot x \text{ και } v_Z = v_\Delta = \omega \cdot R \quad (2)$$

Η τροχαλία Σ_2 κάνει σύνθετη κίνηση. Αν v_K είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας της, τότε:

$$-v_\Gamma = v_K - \omega' \cdot R' \text{ και } v_Z = v_K + \omega' \cdot R' \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στις (3) παίρνουμε:

$$-\omega \cdot x = v_K - \omega' \cdot R' \text{ και } \omega \cdot R = v_K + \omega' \cdot R' \quad (4)$$

Θέτοντας στις (4) $2 \cdot R' = R + x$ (βλέπε διπλανό σχήμα)

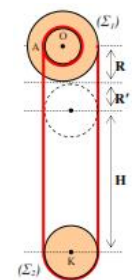
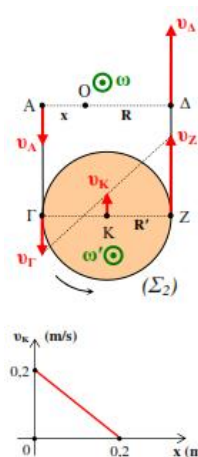
και επιλύοντας, βρίσκουμε τελικά:

$$\omega' = \omega \text{ και } v_K = \omega \cdot \frac{R+x}{2} \quad (5)$$

και με αντικατάσταση: $\omega' = 2 \text{ r/s}$ και $v_K = 0,1 \text{ m/s}$

Τέλος, η v_K σε συνάρτηση με την ακτίνα x του μικρού δίσκου της Σ_1 είναι:

$$\text{Από (5)} \rightarrow v_K = 0,2 - x \text{ (S.I.) με } 0 < x < 0,2 \text{ m}$$



γ) Όταν η Σ_2 βρίσκεται στην κατώτερη θέση, ένα τμήμα του συρματόσκοινου μή-

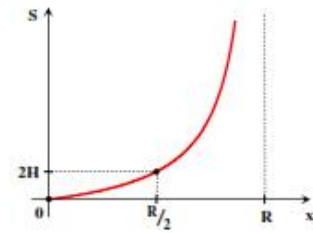
κους S πρέπει να είναι αρχικά τυλιγμένο στο μικρό δίσκο της Σ_1 ώστε να μπορεί να ξετυλιχθεί καθώς η τροχαλία ανεβαίνει, ενώ το υπόλοιπο, μήκους $2 \cdot (R+R'+H) + \pi \cdot R'$ κρέμεται συγκρατώντας τη Σ_2 .

Όταν η τροχαλία Σ_2 ανέλθει κατά $\mathbf{H}$, θα έχει ξετυλιχτεί όλο το συρματόσκοινο από τον μικρό δίσκο, ενώ στον μεγάλο θα έχει τυλιχτεί αντίστοιχα μήκος $\mathbf{S} + 2 \cdot \mathbf{H}$, διότι το κρεμασμένο μήκος έχει μειωθεί κατά $2 \cdot \mathbf{H}$.

Το αρχικά τυλιγμένο τμήμα πρέπει να είναι τουλάχιστον $\mathbf{S} = \mathbf{v}_A \cdot \Delta t = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} \cdot \Delta t$,

όπου $\Delta t = \mathbf{H}/\mathbf{v}_K$ ο χρόνος ανόδου.

Οπότε: $\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{v}_K}$ και μέσω της (5): $\mathbf{S} = \frac{2 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{R} - \mathbf{x}}$ (6)



Για $\mathbf{x} = \mathbf{R}/2 = 0,1 \text{ m}$ προκύπτει τελικά ότι: $\mathbf{S} = 2 \cdot \mathbf{H}$.

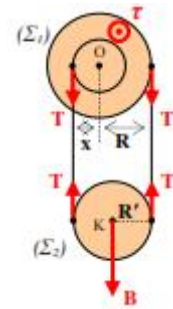
δ) Οι τροχαλίες και το συρματόσκοινο έχουν ασημαντη μάζα, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε την τάση ίδια σε όλο το μήκος του.

Για τη Σ_2 ισχύει: $2 \cdot \mathbf{T} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{B}/2$

για τη Σ_1 : $\Sigma \boldsymbol{\tau}_{(O)} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\tau} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{x})$

και τελικά:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{x})}{2} \rightarrow \boldsymbol{\tau} = 200 - 1000 \cdot \mathbf{x} \text{ (S.I.) με } 0 < \mathbf{x} < 0,2 \text{ m} \quad (7)$$



Ο κινητήρας προσφέρει ενέργεια με ρυθμό ίσο με το ρυθμό αύξησης της δυναμικής ενέργειας του Σ_3 :

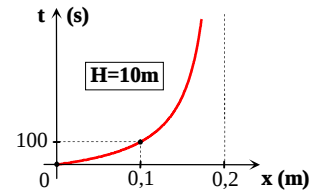
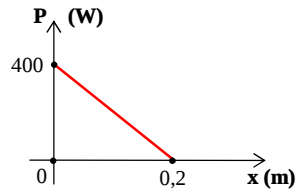
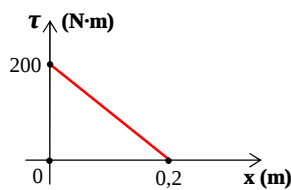
$$\mathbf{P} = dW/dt = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = dU/dt = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_K$$

οπότε:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{x})}{2} \rightarrow \mathbf{P} = 400 - 2000 \cdot \mathbf{x} \text{ (S.I.) με } 0 < \mathbf{x} < 0,2 \text{ m} \quad (8)$$

Ο χρόνος ανόδου σε $\mathbf{H}$ είναι:

$$t = \mathbf{H}/\mathbf{v}_K \rightarrow t = \frac{2 \cdot \mathbf{H}}{\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{x})} \rightarrow t = \frac{\mathbf{H}}{0,2 - \mathbf{x}} \text{ (S.I.) με } 0 < \mathbf{x} < 0,2 \text{ m} \quad (9)$$



Τέλος, για $x = R/2 = 0,1 \text{ m}$ και $H = 10 \text{ m}$ προκύπτουν τιμές:

$$(7) \rightarrow \tau = 100 \text{ N}\cdot\text{m} , (8) \rightarrow P = 200 \text{ Watt} \text{ και } (9) \rightarrow t = 100 \text{ s}$$

Και για το τέλος, ένα ... bonus ερώτημα:

ε) Με τη βοήθεια του προηγούμενου συστήματος που αποτελείται από **(i)** ένα ηλεκτρικό κινητήρα ισχύος $P(x)$, **(ii)** μια διπλή σταθερή τροχαλία με ακτίνες R, x που ο κινητήρας τη στρέφει με γωνιακή ταχύτητα ω και **(iii)** μια κινητή τροχαλία με ακτίνα $R' = R + x$, ανυψώσαμε ένα βάρος B σε ύψος H σε χρόνο $t(x)$.

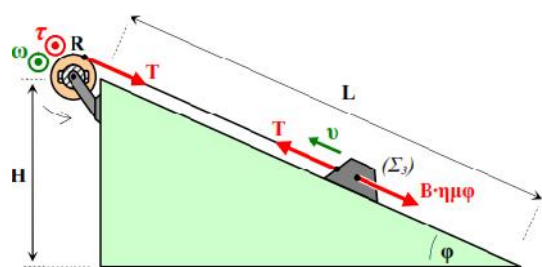
Θέλουμε τώρα να αντικαταστήσουμε το σύστημα αυτό με ένα δεύτερο που να αποτελείται από **(i)** τον ίδιο κινητήρα που να στρέφει με την ίδια ω μια απλή σταθερή τροχαλία ακτίνας R (στη θέση της προηγούμενης διπλής) και **(ii)** ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ , πάνω στο οποίο το βάρος B ολισθαίνοντας, να ανέρχεται στο ίδιο ύψος H στον ίδιο χρόνο t (αντί να ανυψώνεται μέσω της προηγούμενης κινητής τροχαλίας).

Ποια πρέπει να είναι η σχέση $\eta\mu\phi = f(x)$ που συνδέει το ημίτονο της γωνίας ϕ του κεκλιμένου με την εσωτερική ακτίνα x της διπλής τροχαλίας του πρώτου συστήματος (με $0 < x < R$);

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το νέο σύστημα, όπου το σώμα Σ3 ανέρχεται με μικρή σταθερή ταχύτητα v στο κεκλιμένο, συρόμενο από το συρματόσκοινο.

Τα κοινά στοιχεία που συνδέουν τα συστήματα (1) και (2) είναι τα εξής:



1ος τρόπος:

Η κοινή ισχύς του κινητήρα.

Από (8) είχαμε βρει: $\mathbf{P}_{(1)} = \frac{\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{x})}{2}$

Από το σχήμα: $\mathbf{P}_{(2)} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \cdot \eta\mu\phi \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}$

οπότε: $\mathbf{P}_{(1)} = \mathbf{P}_{(2)} \rightarrow \eta\mu\phi = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{x}}{2 \cdot \mathbf{R}}$

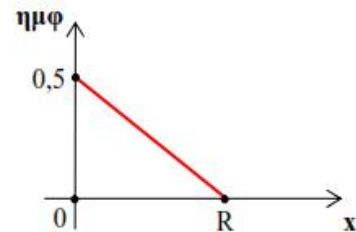
2ος τρόπος:

Το κοινό μήκος $\mathbf{L}$ του συρματόσκοινου που τυλίγεται και στις δύο περιπτώσεις στην περιφέρεια του εξωτερικού δίσκου που στρέφει ο κινητήρας. Τούτο συμβαίνει διότι έχουμε ίδια επιτόχια ταχύτητα $\mathbf{v}_\Delta = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}$ και ίδιο χρόνο ανόδου $\mathbf{t}(\mathbf{x})$.

Στο (γ) ερώτημα είχαμε δει ότι στον εξωτερικό δίσκο τυλίγεται συρματόσκοινο $\mathbf{L} = \mathbf{S} + 2 \cdot \mathbf{H}$.

Από τη σχέση (6): $\mathbf{L} = \frac{2 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{R} - \mathbf{x}} + 2 \cdot \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{L} = \frac{2 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{R} - \mathbf{x}}$

οπότε από το σχήμα: $\eta\mu\phi = \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{L}} \rightarrow \eta\mu\phi = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{x}}{2 \cdot \mathbf{R}}$



Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η κινητή τροχαλία στο 1^ο σύστημα περιορίζει το ελάχιστο απαιτούμενο μήκος συρματόσκοινου για τύλιγμα σε $\mathbf{L}_{\min} = 2 \cdot \mathbf{H}$ (για $\mathbf{x} = 0$), επομένως και την μέγιστη γωνία κλίσης του κεκλιμένου στο 2^ο σύστημα σε $\phi_{\max} = 30^\circ$.

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μητρόπουλος