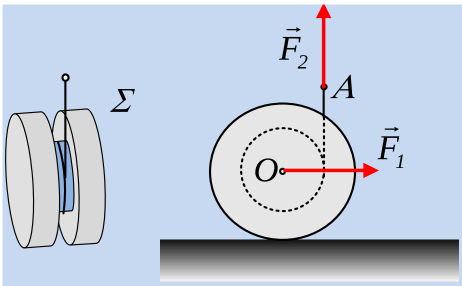
Οι κινήσεις πάνε και έρχονται….

Διαθέτουμε ένα στερεό Σ (ένα καρούλι), αποτελούμενο από δυο δίσκους οι οποίοι συνδέονται με κύλινδρο, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Η μάζα του Σ είναι M=20kg και η εξωτερική του ακτίνα R=0,4m. Τοποθετούμε το στερεό Σ λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή ασκούμε στο κέντρο μάζας του Ο μια σταθερή οριζόντια δύναμη F_1=20N, ενώ ταυτόχρονα τραβάμε το άκρο Α του νήματος ασκώντας διαρκώς μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη F_2=16N, όπως στο σχήμα.



Μετά από λίγο ο άξονας του στερεού (που διέρχεται από το κέντρο Ο) έχει μετατοπισθεί κατά x=2m, ενώ έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους 0,25m. Για την θέση αυτή ζητούνται:

i) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού Σ.

ii) Η γωνιακή του ταχύτητα.

iii) Η ταχύτητα ενός σημείου Β, επαφής του στερεού με το έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του στερεού γύρω από τον άξονα περιστροφής του I= 0,4MR^2.

Απάντηση:

i) Κατά τη διάρκεια της κίνησης που πραγματοποιεί το στερεό μας, η οριζόντια δύναμη F_1 παράγει έργο:

$$W_{F1}=F_1\cdot x=20N\cdot 2m=40J$$

Το παραπάνω έργο εκφράζει την αύξηση της «μεταφορικής» κινητικής ενέργειας του στερεού. Συνεπώς:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2=W_{F_1}\rightarrow$$

$$\upsilon_{cm}=\sqrt{\frac{2W_{F_1}}{M}}=\sqrt{\frac{2\cdot 40}{20}}m/s=2m/s$$

ii) Κατά την παραπάνω κίνηση, η ροπή της δύναμης F_2 επιταχύνει στροφικά το στερεό μας, αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Η ενέργεια που μεταφέρεται στο στερεό μας, μέσω του έργου της δύναμης F_2 είναι ίσο:

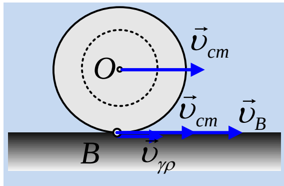
$$W_{F2}=F_2\cdot y=16N\cdot 0{,}25m=4J$$

Το παραπάνω έργο εκφράζει την αύξηση της «στροφικής» κινητικής ενέργειας του στερεού. Συνεπώς:

$$\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=W_{F_2}\rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{F_2}}{I_{cm}}} = \sqrt{\frac{5W_{F_2}}{MR^2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 4}{20 \cdot 0{,}4^2}} rad/s = 2{,}5 rad/s$$

iii) Το σημείο επαφής Β του στερεού μας με το έδαφος έχει μια συνιστώσα ταχύτητας υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια συνιστώσα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R=2{,}5\cdot 0{,}4 m/s=1m/s$ εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης, που οφείλεται στην στροφική κίνηση του στερεού, όπως στο διπλανό σχήμα.



Συνεπώς:

$$\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=3m/s$$

Με φορά προς τα δεξιά.

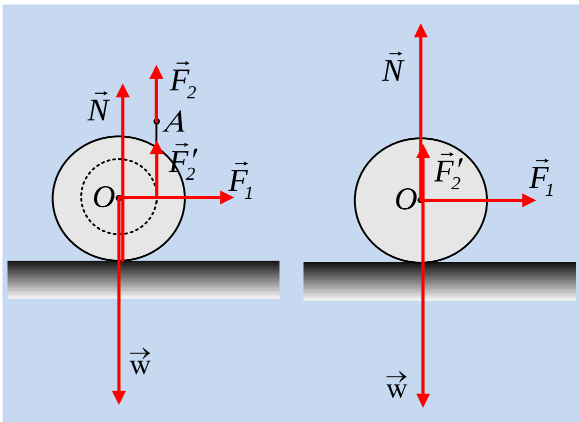
Σχόλια:

Στα παραπάνω στηριχθήκαμε στην διατήρηση της ενέργειας, αναφερόμενοι στην μεταφορική κίνηση που προκαλείται από την δράση της δύναμης F_1 και στην περιστροφική κίνηση του στερεού που προκαλείται εξαιτίας της δράσης της ροπής, ως προς τον άξονα περιστροφής, της δύναμης F_2.

Ας δούμε την ίδια εικόνα, από μια άλλη οπτική γωνία.

i) Το σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση. Πώς μελετάμε μια τέτοια κίνηση; Στην πραγματικότητα «δεν βλέπουμε» κανένα στερεό να μεταφέρεται, απλά μελετάμε την κίνηση του κέντρου μάζας, θεωρώντας το στερεό υλικό σημείο. Όπως ακριβώς μελετήσαμε την κίνηση του τραίνου στην Α΄Λυκείου.

Στο αριστερό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό, ενώ στο δεξιό, τις δυνάμεις όπως σχεδιάζονται **στο υλικό σημείο Ο**, μάζας Μ.



Αλλά τότε για το υλικό σημείο Ο (**κέντρο μάζας**) θα ισχύουν, όλα όσα ισχύουν για το υλικό σημείο και προφανώς το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w+W_N+W_{F1}+W_{F2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 - 0 = 0 + 0 + F_1 \cdot x + 0 \rightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{2F_1 x}{M}} = 2m/s$$

Αφού το βάρος, η κάθετη αντίδραση Ν και η F_2 δεν παράγουν έργο επειδή είναι κάθετες στη μετατόπιση.

ii) Το σώμα εκτελεί (μόνο) στροφική κίνηση γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας

Ο του στερεού Σ. Στο αριστερό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό, όπου F_2' η δύναμη που ασκείται στο στερεό μας, μέσω του νήματος, ίσου μέτρου με την δύναμη που εμείς ασκούμε στο άκρο Α.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη στροφική κίνηση του στερεού παίρνουμε:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{τw}+W_{τN}+W_{τF1}+W_{τF'2}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=0+0+0+(F_2r)\cdot\theta\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=F_2\cdot(r\cdot\theta)\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=F_2\cdot\Delta\ell=F_2y\rightarrow$$

$$\omega=2{,}5rad/s$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης