

Ράβδος και δακτυλίδι

Μία λεπτή ομογενής ράβδος μήκους ℓ και μάζας $M = 3m$

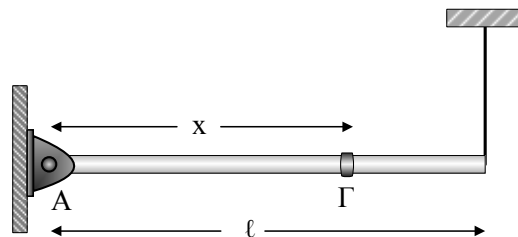
ισορροπεί οριζόντια, με την βοήθεια κατακόρυφου νήματος στο

ένα άκρο της και έχει το άλλο άκρο της στερεωμένο σε ακλόνητη

άρθρωση. Περνάμε ένα δακτυλίδι μάζας m κατά μήκος του

άξονα της ράβδου το οποίο μπορεί να κινείται (πάνω στον άξονα) χωρίς τριβές. Κόβουμε κάποια στιγμή το

νήμα και το δακτυλίδι αρχίζει να απομακρύνεται από την ράβδο και κάποια στιγμή την εγκαταλείπει.



A. Σε ποια απόσταση από την άρθρωση πρέπει να τοποθετήσουμε το δακτυλίδι ώστε την στιγμή που κόβουμε το νήμα να μην δεχθεί δύναμη από την ράβδο.

α. $x = \frac{\ell}{3}$

β. $x = \frac{\ell}{2}$

γ. $x = \frac{2\ell}{3}$

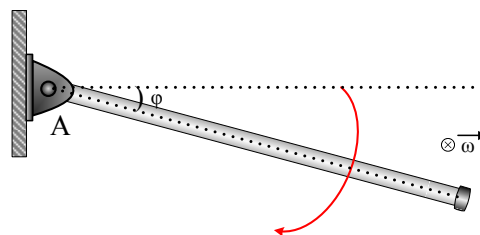
B. Το δακτυλίδι εγκαταλείπει την ράβδο όταν αυτή σχηματίζει

γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση. Αν είχαμε στερεωμένο το

δακτυλίδι στην θέση που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα

και αφήναμε το σύστημα ελεύθερο να περιστραφεί, στην ίδια

θέση (ίδια γωνία ϕ) το σύστημα θα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_2 που σε σχέση με την αρχική ισχύει:



α. $\omega_2 < \omega_1$

β. $\omega_2 = \omega_1$

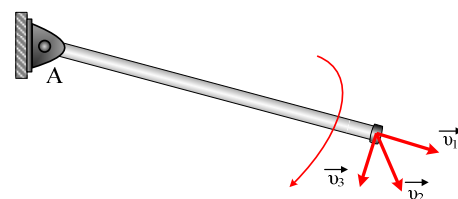
γ. $\omega_2 > \omega_1$

Γ. Την στιγμή της εγκατάλειψης η ταχύτητα του δακτυλιδιού είναι η:

α. $\vec{v}_1$

β. $\vec{v}_2$

γ. $\vec{v}_3$



Δ. Για την παραπάνω γωνία ϕ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

του δακτυλιδιού όταν αυτό είναι στερεωμένο στο άκρο της ράβδου είναι:

α. $\frac{5}{4}mg\ell\sin\phi$

β. $\frac{3}{4}mg\ell\sin\phi$

γ. $mg\ell\sin\phi$

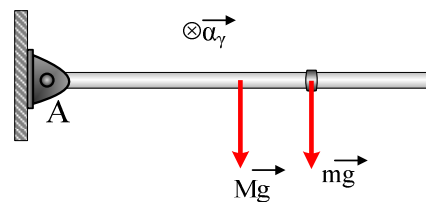
Να αιτιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας.

Δίνεται για την ράβδο η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{3}M\ell^2$

Λύση

A. Την στιγμή της εκκίνησης ισχύει για το δακτυλίδι:

$$\Sigma \tau = I_{\delta\alpha\kappa} \alpha_{\gamma} \Rightarrow \tau_w = I_{\delta\alpha\kappa} \alpha_{\gamma} \Rightarrow mgx = mx^2 \alpha_{\gamma} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{g}{x}$$



Ενώ για το σύστημα ισχύει:

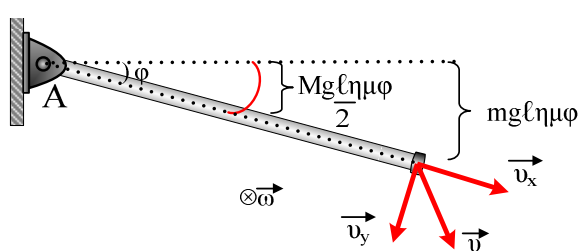
$$\Sigma \tau = I_{\sigma\lambda} \alpha_{\gamma} \Rightarrow Mg \frac{\ell}{2} + mgx = \left(\frac{1}{3} M \ell^2 + mx^2 \right) \frac{g}{x} \Rightarrow M \frac{\ell}{2} + mx = \frac{1}{3} M \frac{\ell^2}{x} + mx \Rightarrow M \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} M \frac{\ell^2}{x} \Rightarrow x = \frac{2\ell}{3}$$

Άρα σωστή απάντηση η **γ**.

B. Για το ελεύθερο δακτυλίδι την στιγμή της εγκατάλειψης

$$\text{ισχύει: } K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} M \ell^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v^2 = Mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \phi + mg \ell \eta \mu \phi \Rightarrow$$



$$\frac{1}{2} m \ell^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v^2 = 2,5 mg \eta \mu \phi \Rightarrow \frac{1}{2} \ell^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2) = 2,5 g \eta \mu \phi \Rightarrow \frac{1}{2} \ell^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} \ell^2 \omega_1^2 = 2,5 g \eta \mu \phi \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2,5 g \eta \mu \phi}{\ell} - \frac{v_x^2}{2 \ell^2}}$$

όπου v_x η ακτινική συνιστώσα και v_y η κάθετη στη ράβδο.

Αν το δακτυλίδι είναι ακλόνητο πάνω στη ράβδο ισχύει:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M \ell^2 + m \frac{4}{9} \ell^2 \right) \omega_2^2 = Mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \phi + mg \frac{2}{3} \ell \eta \mu \phi \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{13}{9} m \ell \omega_2^2 = \frac{13 mg \eta \mu \phi}{6} \Rightarrow$$

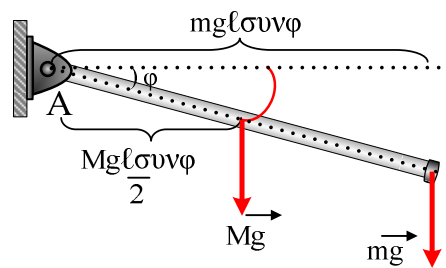
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3 g \eta \mu \phi}{\ell}}$$

Άρα σωστή απάντηση η **γ**.

Γ. Την στιγμή εγκατάλειψης της ράβδου το δακτυλίδι έχει μία ταχύτητα η οποία είναι παράλληλη στον άξονα της ράβδου και μία γραμμική ταχύτητα που είναι κάθετη στον άξονα της ράβδου, έτσι η ταχύτητα του δακτυλιδιού την στιγμή της αποχώρησης είναι η $\vec{v}_2$.

Άρα σωστή απάντηση η **β**.

Δ. Στην διπλανή εικόνα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια (δεν έχει σχεδιαστεί η δύναμη από την άρθρωση).



Ισχύει:

$$\Sigma \tau = I_{\text{συστ}} \alpha_{\gamma} \Rightarrow Mg \frac{\ell}{2} \cos \varphi + mg \ell \cos \varphi = \left(\frac{1}{3} M \ell^2 + m \ell^2 \right) \alpha_{\gamma} \Rightarrow \frac{5}{2} mg \ell \cos \varphi = 2m \ell \alpha_{\gamma} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{5g \cos \varphi}{4\ell}$$

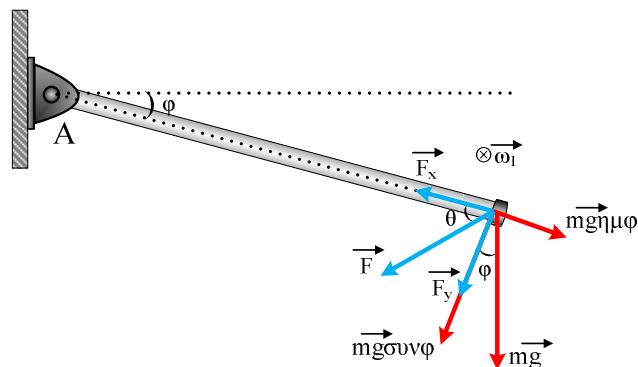
Για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δακτυλιδιού έχουμε:

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{\text{δακ}} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = I_{\text{δακ}} \alpha_{\gamma} = m \ell^2 \frac{5g \cos \varphi}{4\ell} \Rightarrow \left. \frac{dL}{dt} \right|_{\text{δακ}} = \frac{5}{4} mg \ell \cos \varphi$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η **α**.

Παρατήρηση: 1. Το κλασικό λάθος που γίνεται εδώ είναι ότι θεωρούμε, το βάρος στο δακτυλίδι ως μοναδική δύναμη που δέχεται το δακτυλίδι και ξεχνάμε την δύναμη από την ράβδο.

Αυτή μπορεί να υπολογιστεί και είναι:



$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{\text{δακ}} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi} \Rightarrow \frac{5}{4} mg \ell \cos \varphi = mg \ell \cos \varphi + F_y \ell \Rightarrow F_y = \frac{1}{4} mg \cos \varphi$$

και φορά ίδια μ' αυτή του βάρους.

Η συνιστώσα της $\vec{F}$ κατά μήκος της ράβδου μπορεί να βρεθεί από την συνθήκη της κεντρομόλου δύναμης έτσι έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_R = \vec{F}_K \Rightarrow F_x - mg \sin \varphi = \frac{mv_{\text{δακ}}^2}{\ell} \Rightarrow F_x = mg \sin \varphi + m \omega_1^2 \ell \Rightarrow F_x = mg \sin \varphi + m \frac{2,5g \sin \varphi}{\ell} \ell \Rightarrow F_x = 3,5 mg \sin \varphi$$

$$\text{Οπότε: } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mg \sqrt{(3,5 \sin \varphi)^2 + \frac{\sin^2 \varphi}{16}} \quad \text{με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία:}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\frac{1}{4}mg\sigma\varphi}{3,5mg\eta\mu\varphi} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{14\varepsilon\varphi\varphi}$$

2. Ας δούμε τώρα την περίπτωση που το δακτυλίδι είναι στερεωμένο στην απόσταση x .

Για το σύστημα ισχύει:

$$\Sigma\tau = I_{\text{ολ}} \alpha_\gamma \Rightarrow Mg \frac{\ell}{2} \sigma\varphi + mg \frac{2\ell}{3} \sigma\varphi = \left(\frac{1}{3}M\ell^2 + m\frac{4\ell^2}{9}\right)\alpha_\gamma \Rightarrow \frac{13}{6}mg\sigma\varphi = \frac{13}{9}m\ell\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{3g\sigma\varphi}{2\ell}$$

$$\text{και για τον δακτυλίδι: } \Sigma\tau = I_{\text{δακ}} \alpha_\gamma \Rightarrow mg \frac{2\ell}{3} \sigma\varphi + F_y \frac{2\ell}{3} = \frac{4}{9}m\ell^2 \frac{3g\sigma\varphi}{2\ell} \Rightarrow F_y = 0$$

Η συνιστώσα της $\vec{F}$ κατά μήκος της ράβδου μπορεί να βρεθεί από την συνθήκη της κεντρομόλου δύναμης έτσι έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_\kappa \Rightarrow F_x - mg\eta\mu\varphi = \frac{mv_{\text{δακ}}^2}{x} \Rightarrow F_x = mg\eta\mu\varphi + m\omega_2^2 x \Rightarrow F_x = mg\eta\mu\varphi + m \frac{3g\eta\mu\varphi}{\ell} \frac{2\ell}{3} \Rightarrow F_x = 3mg\eta\mu\varphi$$

Δηλαδή σε κάθε θέση υπάρχει **μόνο** ακτινική συνιστώσα!!!

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Βασίλης Λουκατζής