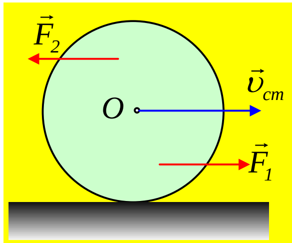
Ροπή του ζεύγους δυνάμεων.

Ή πώς φρενάρει το αυτοκίνητο



Μια σφαίρα μάζας 10kg και ακτίνας 0,2m, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm}=10m/s. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω της μια σταθερή ροπή, ενός ζεύγους δυνάμεων, οπότε η σφαίρα σταματά σε απόσταση x=7m, χωρίς να ολισθήσει στη διάρκεια του φρεναρίσματος.

i) Να σχεδιάστε ένα σχήμα στο οποίο να φαίνονται οι ασκούμενες στη σφαίρα δυνάμεις.

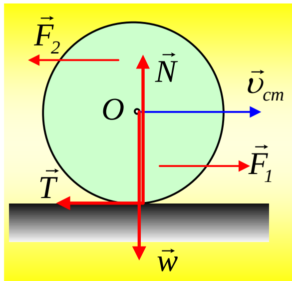
ii) Να υπολογιστεί το μέτρο της ασκούμενης ροπής.

iii) Πόσο είναι το μέτρο της ασκούμενης τριβής;

iv) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής της στατικής οριακής τριβής, ώστε να μην ολισθήσει η σφαίρα;

Δίνεται g=10m/s^2 ενώ η ροπή αδράνειας της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $I=\frac{2}{5}mR^2$.

Απάντηση:



i) Αφού στη διάρκεια της επιβράδυνσης της σφαίρας δεν υπάρχει ολίσθηση, η ασκούμενη τριβή, είναι στατική και είναι η δύναμη που μειώνει την ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνισταμένη του ζεύγους είναι μηδενική και άρα δεν υπάρχει άλλη δύναμη να επιβραδύνει την σφαίρα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι ασκούμενες δυνάμεις στη σφαίρα (το ζεύγος εδώ παριστάνεται με τις άγνωστες δυνάμεις F_1 και F_2, οι οποίες όμως δεν μας ενδιαφέρουν, αφού το μόνο που έχει αξία είναι η ροπή του ζεύγους).

Να σημειωθεί ότι η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει την φορά της ασκούμενης συνολικής ροπής, κάθετης στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα έξω, ώστε να μειώνεται η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας.

ii) Για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας και αναφερόμενοι στα μέτρα, έχουμε:

$$\Sigma F_x= m\alpha_{cm} \rightarrow T= m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Αντίστοιχα για την περιστροφική κίνηση θα έχουμε:

$$\Sigma\tau= I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau\text{-}T\cdot R = \frac{2}{5}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\frac{\tau}{R}-T=\frac{2}{5}mRa_{\gamma\omega\nu}$$

και αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$\frac{\tau}{R}-T=\frac{2}{5}ma_{cm} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{\tau}{R}=\frac{7}{5}ma_{cm} \rightarrow$$

$$\tau = \frac{7}{5} mRa_{cm} \quad (3)$$

Το ζεύγος ασκεί σταθερή ροπή, συνεπώς και η επιτάχυνση του κέντρου Ο της σφαίρας είναι σταθερού μέτρου και η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, για την οποία έχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha_{cm} t \quad (4) \quad \text{και} \quad x = \upsilon_0 t - ½\, \alpha_{cm} \cdot t^2 \quad (5)$$

Τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας υ=0 και με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ των (4) και (5) παίρνουμε:

$$x = \frac{\upsilon_0^2}{2a_{cm}} \rightarrow a_{cm} = \frac{\upsilon_0^2}{2x} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{100}{14} = \frac{50}{7} m/s^2 \quad (6)$$

Οπότε από την σχέση (3) έχουμε:

$$\tau = \frac{7}{5} mRa_{cm} = \frac{7}{5} 10 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{50}{7} = 20 N \cdot m$$

iii) Με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε την ασκούμενη τριβή:

$$T = m\alpha_{cm} = 10 \cdot \frac{50}{7} N = \frac{500}{7} N$$

iv) Για να μην ολισθήσει η σφαίρα θα πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$TP\ T_{op} \rightarrow \frac{500}{7} \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{500}{7 \cdot mg} \rightarrow$$

$$\mu_s \geq \frac{5}{7}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης