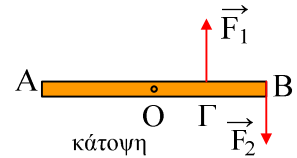


3.2. Ισορροπία στερεού.

3.2.1. Ροπές και ισορροπία.

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται μια ράβδος μήκους $l=4\text{m}$, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το μέσον της O . Ασκούμε πάνω της δύο οριζόντιες δυνάμεις με ίσα μέτρα $F_1=F_2=20\text{N}$, όπως στο σχήμα, όπου $(OG)=(GB)$.



- Βρείτε την συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής.
- Υπολογίστε την οριζόντια δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα.
- Πόση η συνολική ροπή των δυνάμεων F_1-F_2 ως προς το άκρο A;
- Για να μην περιστραφεί η ράβδος ασκούμε πάνω της οριζόντια δύναμη F_3 στο άκρο A, παράλληλη προς τις F_1, F_2 .
 - Να σχεδιάσετε την δύναμη F_3 .
 - Πόση οριζόντια δύναμη δέχεται τώρα η ράβδος από τον άξονα;

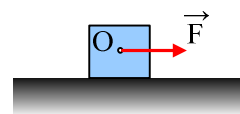
3.2.2. Ισορροπία αρθρωμένης ράβδου.

Μια ομογενής ράβδος μήκους 4m και βάρους 100N ισορροπεί οριζόντια, όταν στο άκρο της A αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άλλο της άκρο είναι δεμένο με νήμα που σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τη ράβδο.

- Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.
- Βρείτε την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης F που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση.
- Ποια είναι η κατεύθυνση της δύναμης F ;

3.2.3. Ισορροπία και κάθετη αντίδραση

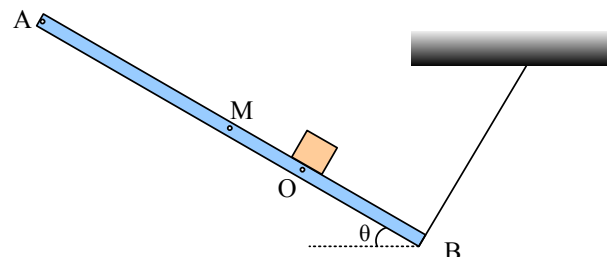
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύβος ακμής $a=1\text{m}$ και μάζας $m=50\text{kg}$ ο οποίος ηρεμεί σε ένα οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,2$. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη μέτρου $F=60\text{N}$, ο φορέας της οποίας διέρχεται από το κέντρο του κύβου.



- Να υπολογίστε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- Πόσο απέχει ο φορέας της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου από το κέντρο O του κύβου; $g=10\text{m/s}^2$.

3.2.4. Ισορροπία δοκού και η δύναμη από ένα κινούμενο σώμα.

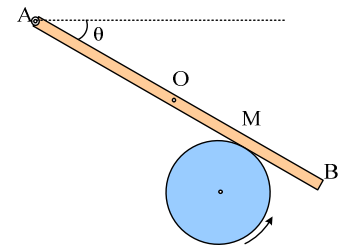
Η ράβδος AB μήκους 4m και βάρους 100N μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A και ισορροπεί όπως στο σχήμα, δεμένη με νήμα στο άκρο της B, το οποίο είναι κάθετο σε αυτήν. Κατά μήκος της ράβδου κινείται ένα σώμα Σ μάζας $m_1=5\text{kg}$ με επιτάχυνση $a=2\text{m/s}^2$. Αν η κλίση



της σανίδας είναι θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\theta=0,8$, να βρεθούν η τάση του νήματος και οι συνιστώσες της δύναμης που δέχεται η σανίδα από τον άξονα F_x και F_y , όπου η μια έχει την διεύθυνση της σανίδας και η άλλη κάθετη σε αυτήν τη στιγμή που το σώμα περνά από την θέση O, απέχοντας 1m από το άκρο B. $g=10\text{m/s}^2$.

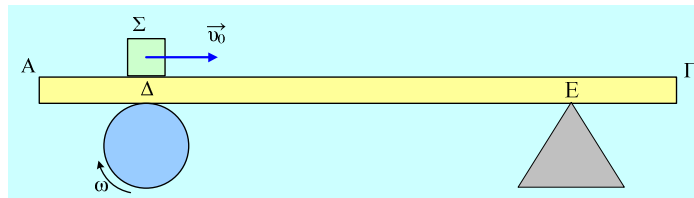
3.2.5. Ισορροπία ράβδου και τριβή.

Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος 4m και μάζα $m=30\text{kg}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της A, ενώ στηρίζεται σε κύλινδρο σε σημείο M, που απέχει 1m από το άκρο της B. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σανίδας και κυλίνδρου είναι $\mu=0,2$, ενώ η γωνία κλίσεως της ράβδου έχει $\eta\mu\theta=0,6$. Ο κύλινδρος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=1\text{rad/s}$, γύρω από τον άξονά του.



- Να βρεθούν οι συνιστώσες της δύναμης που ασκείται από τον άξονα στη ράβδο, την F_x παράλληλη προς την ράβδο και F_y κάθετη σ' αυτήν.
- Πώς θα μεταβληθεί το μέτρο των παραπάνω συνιστωσών αν αυξήσουμε τη γωνιακή ταχύτητα στην τιμή $\omega_1=2\text{rad/s}$;
- Πώς θα μεταβληθεί το μέτρο των παραπάνω συνιστωσών αν αντιστραφεί η φορά περιστροφής του κυλίνδρου;

3.2.6. Ισορροπία και τριβές.



Η λεπτή ομογενής δοκός ΑΓ του σχήματος έχει μήκος 6m, μάζα $M=2\text{kg}$ και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στα σημεία Δ και Ε σε περιστρεφόμενο κύλινδρο και σε τρίποδο. Τα σημεία Δ και Ε απέχουν 1m από τα άκρα της ράβδου. Ένα σώμα Σ μάζας 0,5kg, που θεωρείται υλικό σημείο, εκτοξεύεται για $t=0$ από το σημείο Δ και φτάνει μέχρι το σημείο Ε, όπου σταματά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, τόσο μεταξύ δοκού και σώματος Σ, όσο και μεταξύ δοκού και κυλίνδρου είναι ίσος με $\mu=0,2$ και σε όλη τη διάρκεια της κίνησης η δοκός ισορροπεί.

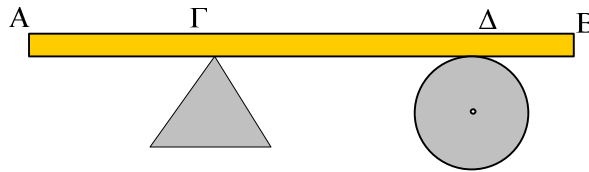
- Ποια η αρχική ταχύτητα του σώματος Σ και πόσο χρόνο διαρκεί η κίνησή του;
- Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στη δοκό από το τρίποδο σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση από 0-3s.
- Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ δοκού και τρίποδου για να ισορροπεί η δοκός;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

3.2.7. Μια ράβδος σε ισορροπία.

Η ομογενής ράβδος ΑΒ έχει μήκος 6m, μάζα $M=15\text{kg}$ και ισορροπεί όπως στο σχήμα στηριζόμενη στο τρί-

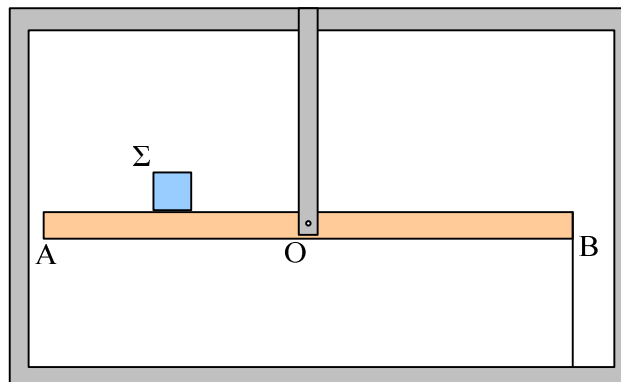
ποδο στο σημείο Γ, όπου $(AG) = 2\text{m}$ και σε κύλινδρο στο σημείο Δ με $(\Delta B) = 1\text{m}$.



- Βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στα σημεία στήριξης.
- Σε μια στιγμή θέτουμε σε περιστροφή τον κύλινδρο με φορά όπως οι δείκτες του ρολογιού. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης κυλίνδρου-ράβδου είναι $\mu = 0,6$ και η ράβδος συνεχίζει να ισορροπεί, να βρείτε την τριβή που ασκείται στη ράβδο από τον κύλινδρο.
- Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής της οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και τρίποδου για να εξασφαλίζεται η ισορροπία της ράβδου;
- Ποια η μέγιστη κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω που πρέπει να ασκηθεί στο άκρο Α, χωρίς να ανατρέπεται η ράβδος; Πόση θα είναι τότε η τριβή που δέχεται η ράβδος από το τρίποδο; Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

3.2.8. Ποιες είναι οι δυνάμεις που ασκούνται;

Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ και μάζας $M = 3\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Πάνω στη ράβδο στηρίζεται ένα σώμα Σ, μάζα $m = 2\text{kg}$, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, σε απόσταση από το άκρο Α ίση με $\ell/4$. Το άλλο άκρο Β της ράβδου είναι δεμένο με κατακόρυφο νήμα, με αποτέλεσμα η ράβδος να μην στρέφεται.



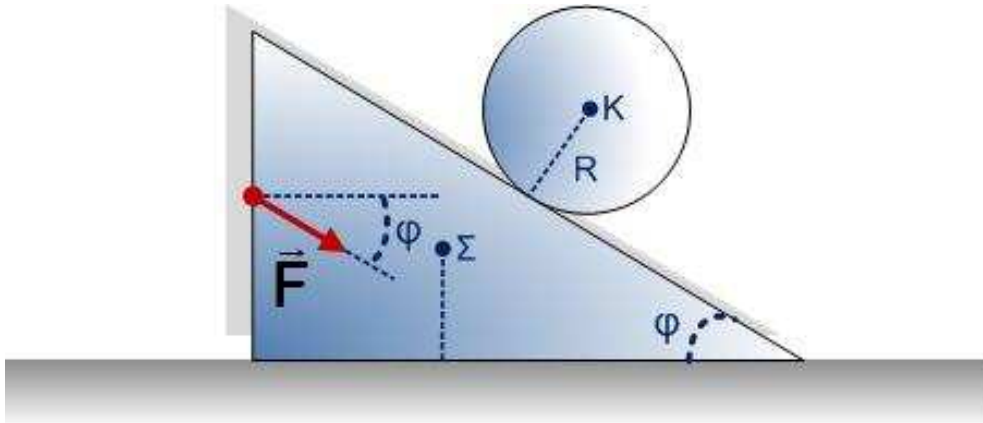
Το σύστημα αυτό βρίσκεται μέσα σε ένα ανελκυστήρα (ασανσέρ) ο οποίος κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση $a = 2\text{m/s}^2$.

- Να υπολογίσετε την τάση του νήματος.
- Να εξετάσετε την ορθότητα της πρότασης: «Για να υπολογίσουμε τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής, αρκεί να πάρουμε ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το άκρο Β ίσο με μηδέν»
Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

3.2.9. Ένας Κύλινδρος Πάνω σε μια Σφήνα

Ομογενής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R εφάπτεται επί σώματος μάζας M , σφηνοειδούς μορφής (γων-

νία κλίσης φ). Στη σφήνα ασκούμε δύναμη F υπό γωνία φ , τέτοια ώστε ο κύλινδρος να μη κυλίεται επί της κεκλιμένης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν ο συντελεστή τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του σώματος είναι μ_1 και μεταξύ του οριζοντίου επιπέδου και της σφήνας είναι μ_2 , να υπολογιστούν

- η επιτάχυνση του συστήματος
- το μέτρο της δύναμης F .

Δίνεται: $I_C = \frac{1}{2} mR^2$, $\varphi = \pi/4$, g

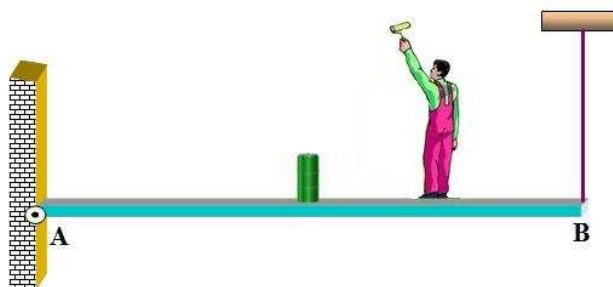
3.2.10. Ποιο είναι το σημείο εφαρμογής της N ;

Ένα σώμα μάζας m σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει κάποια στιγμή ταχύτητα v ενώ κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εφάπτεται συνεχώς. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ . Ποιο είναι το σημείο εφαρμογής της κάθετης αντίδρασης N ;

3.2.11. Μέχρι πόσες μύρες μπορεί να πει ο μπογιατζής;

Μια ομογενής σανίδα AB μάζας $m_1 = 99\text{ kg}$ και μήκους ℓ , έχει το ένα άκρο της A αρθρωμένο σε κατακόρυφο τοίχο ενώ το άλλο άκρο της B συγκρατείται από κατακόρυφο αβαρές σχοινί.

Η σανίδα είναι οριζόντια και πάνω σ' αυτή, στέκεται όρθιος ένας μπογιατζής μάζας $m_3 = 68\text{ kg}$ σε σταθερή απόσταση $3\ell/4$ από τον τοίχο.



Έξι όμοια κουτιά μύρας συνολικής μάζας $m_2 = 3\text{ kg}$, είναι τοποθετημένα στο μέσον της σανίδας και το

σύστημα είναι σε ισορροπία.

α) Υπολογίστε την τάση του σχοινιού και τη δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη σανίδα.

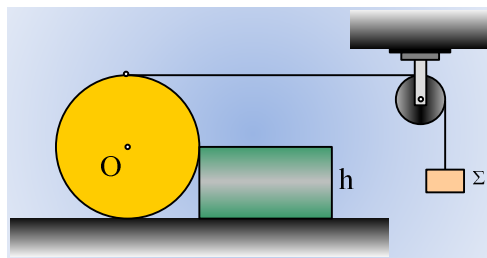
β) Τώρα υποθέτουμε ότι ο μπογιατζής αρχίζει να πίνει τις μπίρες. Να υπολογιστεί η τάση του σχοινιού όταν θα τις έχει πει όλες.

γ) Αν η τάση θραύσης του σχοινιού ήταν $T_0 = 1025\text{N}$, μέχρι πόσες μπίρες θα μπορούσε να πει ο μπογιατζής χωρίς να σπάσει το σχοινί;

Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$, ότι η μάζα που έχουν τα άδεια κουτιά της μπίρας είναι αμελητέα.

3.2.12. Μια ισορροπία κυλίνδρου με εμπόδιο

Γύρω από ένα κύλινδρο ακτίνας $R=0,4\text{m}$ και μάζας $M=10\text{kg}$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του δένουμε ένα σώμα Σ μάζας $m_1=1\text{kg}$.



Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο και το σύστημα ισορροπεί, αφού ο κύλινδρος εμποδίζεται να κινηθεί, από ένα εμπόδιο ύψους $h=R$. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους είναι $\mu_s=\mu=0,2$, ενώ δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ κυλίνδρου και εμποδίου. Το νήμα μεταξύ κυλίνδρου και τροχαλίας είναι οριζόντιο, $g=10\text{m/s}^2$, ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} MR^2$.

i) Να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.

ii) Αντικαθιστούμε το σώμα Σ με άλλο Σ' μάζας $m_2=3\text{kg}$ και παρατηρούμε ότι κινείται προς τα κάτω.

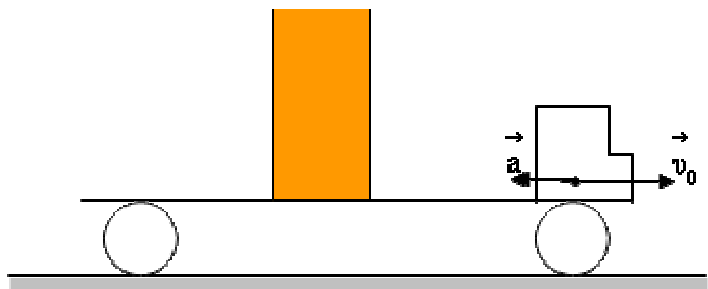
α) Να βρεθεί η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα Σ' .

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του;

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου μετά από 2s από τη στιγμή που άρχισε να στρέφεται.

3.2.13. Ισορροπία στερεού σώματος και χρόνος κίνησης.

Στην πλατφόρμα ενός φορτηγού έχει τοποθετηθεί ένα κιβώτιο μάζας m το οποίο θεωρούμε ως ομογενές στερεό σώμα με μορφή ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις $\alpha=\beta=0,6\text{m}$ και $\gamma=1,2\text{m}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κιβωτίου και πλατφόρμας του φορτηγού είναι μ (θεωρούμε ότι $\mu_{\text{στ,ορ}}=\mu_{\text{ολ}}=\mu$). Το κιβώτιο έχει τοποθετηθεί έτσι ώστε να



είναι σε επαφή με την πλατφόρμα μια έδρα του με το μικρότερο εμβαδόν, ενώ δύο παράλληλες έδρες του με το μεγαλύτερο εμβαδόν να είναι παράλληλες με τις πλευρές του φορτηγού. Το φορτηγό κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_0=54\text{Km/h}$. Κάποια στιγμή λόγω ενός κινδύνου ο οδηγός

αρχίζει να επιβραδύνει το φορτηγό μέσω δύναμης που ασκεί το σύστημα πέδησης στους τροχούς προσδίδοντας σ' αυτό σταθερή επιτάχυνση(επιβράδυνση) μέτρου a .

α. Να υπολογιστούν οι τιμές του συντελεστή τριβής κιβωτίου – πλατφόρμας για τις οποίες:

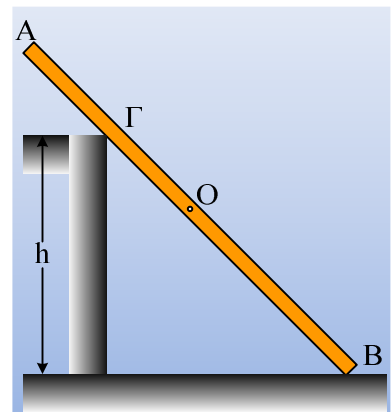
α₁. η ολίσθηση του κιβωτίου αρχίζει πριν την ανατροπή του.

α₂. η ανατροπή του κιβωτίου γίνεται πριν αρχίσει αυτό να ολισθαίνει.

β. Να βρεθεί ο ελάχιστος χρόνος για να σταματήσει το φορτηγό χωρίς το κιβώτιο να ολισθήσει ή να ανατραπεί. Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του φορτηγού αναφέρονται ως προς ακίνητο παρατηρητή.

3.2.14. Μια δοκός ακουμπά σε κοντότερο τοίχο.

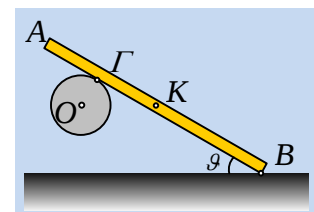
Μια ομογενής δοκός μήκους $(AB)=4\text{m}$ και βάρους 300N , στηρίζεται όπως στο σχήμα σε τοίχο ύψους $h=1,8\text{m}$, σε σημείο Γ , όπου $(A\Gamma)=1\text{m}$ και σε λείο οριζόντιο έδαφος.



- Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στην δοκό στο σημείο στήριξης Γ .
- Να υπολογιστεί ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ του κατακόρυφου τοίχου και της δοκού, για να υπάρξει η παραπάνω ισορροπία.
- Αν πάνω στη ράβδο τοποθετήσουμε ένα σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων και βάρους w_1 , το οποίο εμφανίζει με τη δοκό συντελεστή οριακής τριβής $\mu_{s1}=0,8$, να εξετάσετε αν το σύστημα θα συνεχίσει να ισορροπεί, δεχόμενοι ότι ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ σανίδας και τοίχου, έχει τιμή, ίση με αυτή που υπολογίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα.

3.2.15. Μια ισορροπία ράβδου σε κύλινδρο που μπορεί και να στρέφεται.

Ο κύλινδρος του σχήματος μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονά του, που ενώνει τα κέντρα των δύο βάσεων του OO' και είναι ακινητοποιημένος, μη επιτρέποντάς του την περιστροφή. Στηρίζουμε στον κύλινδρο μια ομογενή ράβδο (AB) μήκους 4m και μάζας $M=30\text{kg}$ στο σημείο Γ , όπου $(A\Gamma)=1\text{m}$ ενώ το άλλο της άκρο B ακουμπά σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σχηματίζοντας γωνία $\theta=30^\circ$, με το επίπεδο. Η ράβδος εμφανίζει με τον κύλινδρο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,8$ και αφήνοντάς την στη θέση αυτή, βλέπουμε ότι ισορροπεί.

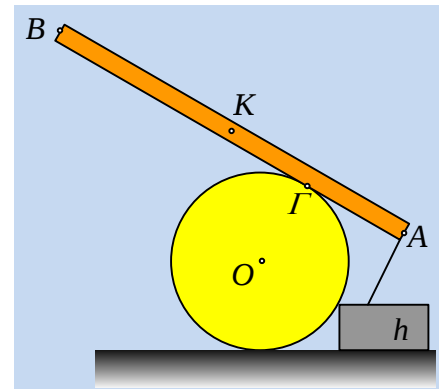


- Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος στα σημεία στήριξής της, B και Γ .
- Να υπολογιστεί η τριβή που θα δεχτεί ο κύλινδρος από την ράβδο.
- Θέτουμε ένα όμοιο κύλινδρο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τον αναγνώστη. Στηρίζουμε ξανά τη ράβδο στον κύλινδρο αυτό σε τέτοια θέση, ώστε να πετύχουμε ξανά ισορροπία με το ίδιο σημείο επαφής Γ της ράβδου. Να βρεθεί η γωνία που πρέπει να σχηματίζει τώρα η ράβδος με το λείο οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

3.2.16. Μια ράβδος και ένας κύλινδρος σε ισορροπία.

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους 4m και βάρους 400N, ισορροπεί σε επαφή με κύλινδρο, όπως στο σχήμα, όπου (ΑΓ)=1m, δεμένη στο άκρο της Α, με νήμα. Το νήμα σχηματίζει γωνία 90° με τη ράβδο, η οποία σχηματίζει γωνία θ , ($\eta\mu\theta=0,6$) με την οριζόντια διεύθυνση. Ο κύλινδρος βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με ένα λείο εμπόδιο ύψους h .



- i) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος.
- ii) Να βρεθεί ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου για την παραπάνω ισορροπία.
- iii) Να βρεθεί η τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το έδαφος.
- iv) Σε σημείο Δ, όπου (ΒΔ)=1m αφήνουμε τη στιγμή $t_0=0$, ένα σώμα Σ μάζας 2kg, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο. Το σώμα ολισθαίνει κατά μήκος της ράβδου, χωρίς τριβές και εγκαταλείπει τη ράβδο από το άκρο Α. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της τάσης του νήματος που συγκρατεί ακίνητη τη ράβδο, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....