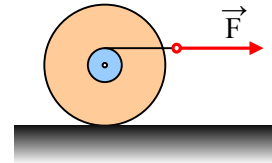


### 3.5. Έργο – Ενέργεια.

#### 3.5.1. Έργο δύναμης- ροπής και Κινητική Ενέργεια.

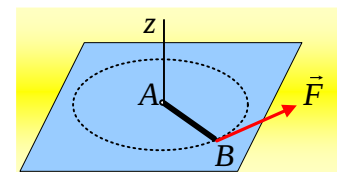
Το ομοαξονικό σύστημα των δύο κυλίνδρων με ακτίνες  $R_1=0,1\text{m}$  και  $R_2=0,5\text{m}$  ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τυλίγουμε γύρω από τον κύλινδρο ακτίνας  $R_1$  ένα αβαρές νήμα, ασκώντας στο άκρο του Α οριζόντια δύναμη  $F=40\text{N}$ . Το σύστημα αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Για μετακίνηση κατά  $x=10\text{m}$  του άξονα των κυλίνδρων, να βρεθούν:



- Το έργο της δύναμης  $F$ .
- Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο κυλίνδρων.

#### 3.5.2. Έργο και ισχύς κατά την περιστροφή

Η ομογενής οριζόντια ράβδος  $AB$  μήκους  $\lambda=2\text{m}$  και μάζας  $6\text{kg}$ , μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της  $A$ . Στο άκρο της  $B$  ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου  $F=10\text{N}$ , που είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη και η ροπή



αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο  $A$ ,  $I = \frac{1}{3} \text{ml}^2$ .

- Πόσο είναι το έργο της δύναμης στη διάρκεια της πρώτης και στη διάρκεια της δεύτερης περιστροφής.
- Για το τέλος της πρώτης και δεύτερης περιστροφής, να βρεθούν:
  - η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου,
  - ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής,
  - η ισχύς της δύναμης  $F$

#### 3.5.3. Εφαρμογή του ΘΜΚΕ και της ΑΔΜΕ

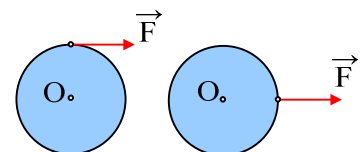
Ένας κύλινδρος μάζας  $30\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,4\text{m}$  αρχίζει να ανεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως  $\theta=30^\circ$ . Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, έχοντας αρχική ταχύτητα  $v_0=10\text{m/s}$ . Να βρεθεί η ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου μετά από μετατόπιση κατά  $x=15\text{m}$ .

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του  $I = \frac{1}{2} mR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### 3.5.4. Έργο μιας μη σταθερής ροπής.

Ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας  $R=0,5\text{m}$  και μάζας  $m=4\text{kg}$  μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του  $O$ .

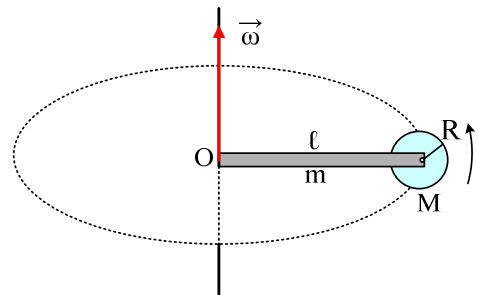
Σε μια στιγμή ασκείται πάνω του μια σταθερή δύναμη  $F=18\text{N}$ , η οποία ασκείται σε σταθερό σημείο  $A$ , όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου, τη στιγμή που έχει στραφεί κατά γωνία  $90^\circ$ .



Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του  $I = \frac{1}{2} mR^2$ .

### 3.5.5. Κινητική ενέργεια στερεού.

Μια σφαίρα μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  είναι προσδεσμένη με ράβδο μήκους  $\ell$  και μάζας  $m$ , όπως στο σχήμα (η σφαίρα έχει τρυπηθεί και το άκρο της ράβδου φτάνει στο κέντρο της σφαίρας  $K$ ), έχοντας έτσι δημιουργήσει ένα στερεό  $\Pi$ . Το στερεό αυτό στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο  $O$  της ράβδου με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ .



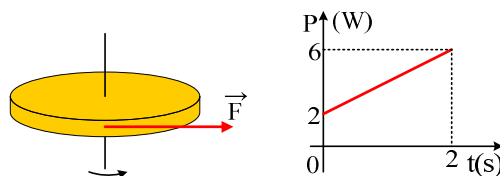
- Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του στερεού  $\Pi$ .
- Να υπολογιστεί η παραπάνω ενέργεια στις εξής περιπτώσεις:
  - $m \rightarrow 0$
  - $m \rightarrow 0$  και  $R \rightarrow 0$

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ως προς μια διάμετρό της  $I_{cm} = \frac{2}{5} MR^2$  και η αντίστοιχη της ράβδου

ως προς άξονα κάθετο προς αυτήν που περνά από το μέσον της  $I_1 = \frac{1}{12} m\ell^2$ .

### 3.5.6. Ισχύς ροπής και Κινητική ενέργεια

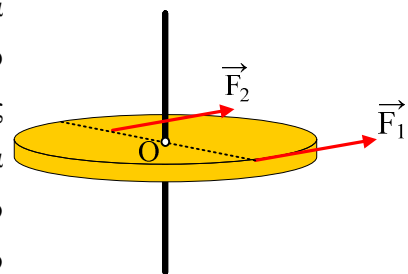
Ένας δίσκος ακτίνας  $R=0,5\text{m}$  στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$ . Για  $t=0$  δέχεται την επίδραση δύναμης σταθερού μέτρου  $F=1\text{N}$  εφαπτόμενης στο δίσκο. Η ισχύς της δύναμης δίνεται στο διάγραμμα.



- Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης από 0-5s.
- Να βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- Πόση είναι η τελική κινητική ενέργεια του δίσκου;

### 3.5.7. Περιστροφή ενός δίσκου από δύο ροπές.

Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας  $2\text{m}$  και μάζας  $314\text{kg}$  μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του  $O$ , χωρίς τριβές. Σε μια στιγμή ασκούνται πάνω του δύο οριζόντιες ίσες δυνάμεις, μέτρου  $F=40\text{N}$ , όπως στο σχήμα, όπου η  $F_1$  δρα πάντα εφαπτομενικά, ενώ η  $F_2$  είναι πάντα παράλληλη προς την  $F_1$  και το σημείο εφαρμογής της είναι πάνω στην ίδια διάμετρο με το σημείο



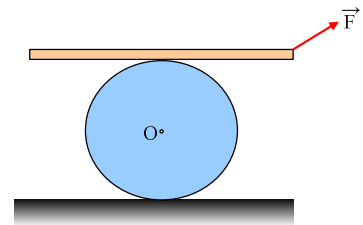
εφαρμογής της  $F_1$ . Τη χρονική στιγμή  $t_1$  που ο δίσκος ολοκληρώνει 5 περιστροφές έχει γωνιακή ταχύτητα  $\omega=2\text{rad/s}$ .

- i) Ποια η απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης  $F_2$  από τον άξονα περιστροφής;
- ii) Για τη στιγμή  $t_1$  να βρεθούν:
  - α) Η ισχύς της δύναμης  $F_1$ .
  - β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου.
- iii) Τη στιγμή  $t_1$  καταργείται η δύναμη  $F_1$ .
  - α) Ποια η ισχύς της δύναμης  $F_2$  αμέσως μετά;
  - β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής του τη στιγμή  $t_1+2s$  και ποια η στροφορμή του δίσκου τη στιγμή αυτή;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του  $I = \frac{1}{2} MR^2$ .

### 3.5.8. Κύλινδρος και δοκός σε κίνηση.

Στο σχήμα ένας κύλινδρος μάζας  $m$  ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τοποθετούμε πάνω του μια δοκό μάζας  $m_1=10m$  και ασκούμε πάνω της μια κατάλληλη δύναμη  $F$ , ώστε η δοκός να παραμένει οριζόντια όπως στο σχήμα.



Αν ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει ούτε ως προς το επίπεδο, ούτε ως προς την δοκό:

- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.
- ii) Αν κάποια στιγμή η δοκός έχει ταχύτητα  $v_1=0,6\text{m/s}$  ποια η ταχύτητα του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου;
- iii) Αν κάποια στιγμή  $t_1$  η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι ίση με  $3J$ , πόση είναι τη στιγμή αυτή η κινητική ενέργεια της δοκού;
- iv) Υπολογίστε το έργο της δύναμης  $F$ , μέχρι τη στιγμή  $t_1$ .

Δίνεται για τον κύλινδρο  $I = \frac{1}{2} mR^2$ .

### 3.5.9. Έργο στατικής τριβής

Σε ένα πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\varphi$  αφήνεται από ύψος  $h$ , ένα στερεό σώμα με κατανομή μάζας συμμετρική ως προς το κέντρο του. ( Το στερεό μπορεί να είναι συμπαγής σφαίρα, συμπαγής κύλινδρος, κοίλη σφαίρα, κούφιος κύλινδρος, δίσκος, δακτύλιος). Το στερεό **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει** και φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μεταφορικής ( $v$ ) και περιστροφικής ( $\omega$ ) κίνησης τη στιγμή που φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (για το δίσκο και το δακτύλιο είναι και κάθετος στο επίπεδό τους, ενώ για τους κυλίνδρους συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας τους) δίνεται από τη σχέση:  $I = \lambda MR^2$ , όπου  $\lambda$  θετική αδιάστατη σταθερά.

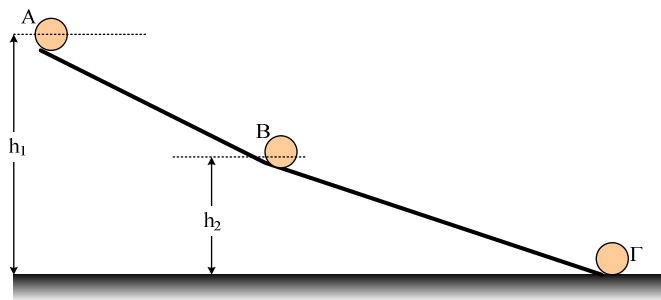
### 3.5.10. Έργο ζεύγους δυνάμεων.

Μια σφαίρα μάζας  $10\text{kg}$  και ακτίνας  $0,2\text{m}$ , κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας  $v_{\text{cm}}=10\text{m/s}$ . Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω της μια σταθερή ροπή, ενός ζεύγους δυνάμεων, οπότε η σφαίρα σταματά σε απόσταση  $x=3,5\text{m}$ , χωρίς να ολισθήσει στη διάρκεια του φρεναρίσματος.

- Πού οφείλεται η μείωση της ταχύτητας του κέντρου μάζας;
- Να σχεδιάσετε ένα σχήμα στο οποίο να φαίνεται το διάνυσμα της ροπής.
- Να υπολογιστεί το μέτρο της ασκούμενης ροπής.

### 3.5.11. Κύλιση και ολίσθηση σφαίρας.

Μια μικρή σφαίρα ακτίνας  $r=5\text{cm}$  αφήνεται να κινηθεί από τη θέση Α σε ύψος  $h_1=13,25\text{m}$  κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου ΑΒ, όπου κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Φτάνοντας στο Β σε ύψος  $h_2=6,25\text{m}$  συνεχίζει την κίνησή της κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου ΒΓ.



Ζητούνται:

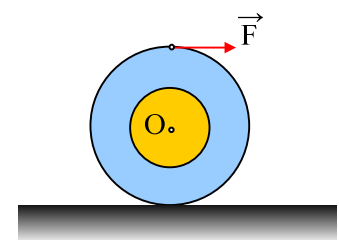
- Η ταχύτητα του κέντρου Ο της σφαίρας και η γωνιακή της ταχύτητα στη θέση Γ.
- Αν ο χρόνος κίνησης από το Β στο Γ είναι  $t_1=1\text{s}$ , ποια η γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο ΒΓ με το οριζόντιο επίπεδο;

Για την σφαίρα  $I = \frac{2}{5}mr^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

### 3.5.12. Ένας περίεργος κύλινδρος και η ροπή αδράνειάς του.

Ο κύλινδρος του σχήματος αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά (στο σχήμα με διαφορετικά χρώματα). Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο.

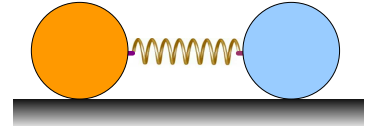
Ασκούμε στο άκρο του νήματος σταθερή οριζόντια δύναμη  $F=20\text{N}$ , οπότε αρχίζει να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Όταν το κέντρο Ο του κυλίνδρου μετατοπισθεί κατά  $x_1=4\text{m}$  η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι  $K_{\text{μετ}}=90\text{J}$ .



- Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- Πόση είναι την παραπάνω χρονική στιγμή η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου;
- Αν η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από την εξίσωση  $I = \lambda m \cdot R^2$ , να υπολογιστεί ο συντελεστής  $\lambda$ .

### 3.5.13. Ένας κύλινδρος με μια σφαίρα.

Στο διπλανό σχήμα ο κύλινδρος έχει μάζα  $m_1=14\text{kg}$  και ακτίνα  $R$  ενώ η σφαίρα έχει μάζα  $m_2=15\text{kg}$  και ακτίνα επίσης  $R$ . Το σύστημα των δύο στερεών ισορροπεί σε οριζόντιο έδαφος με την βοήθεια ιδανικού οριζώντιου ελατηρίου και οριζώντιου νήματος. Το ελατήριο έχει σταθερά  $K=4200\text{N/m}$  είναι συσπειρωμένο κατά  $x=0,4\text{m}$  και δεν είναι δεμένο σε κάποιο από τα δύο στερεά. Το κέντρα των δύο στερεών και το ελατήριο βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και τα δύο σώματα αρχίζουν να κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν. Να βρεθούν:

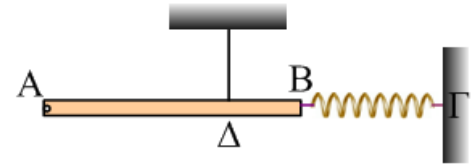


- Οι τελικές ταχύτητες των κέντρων μάζας των στερεών σωμάτων.
- Τι ποσοστό της αρχικής ενέργειας του ελατηρίου πήρε τελικά το κάθε στερεό σώμα;

Για την σφαίρα  $I_{cm}=0,4MR^2$  και για τον κύλινδρο  $I_{cm}=1/2 M \cdot R^2$ .

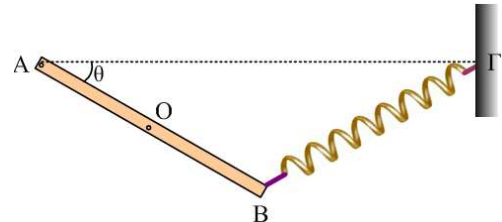
#### 3.5.14. Μια ράβδος, δεμένη και σε ελατήριο.

Μια ομογενής ράβδος μήκους  $\ell=2\text{m}$  και μάζας  $18\text{kg}$  μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της  $A$ . Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, όταν το άλλο της άκρο  $B$  δένεται με ιδανικό ελατήριο σταθεράς  $k=350\text{N/m}$  και φυσικού μήκους  $\ell_0=1,4\text{m}$ , το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο  $\Gamma$ , όπου  $(A\Gamma)=3,4\text{m}$ , ενώ είναι δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος όπως στο σχήμα.



Κόβουμε το νήμα και η ράβδος πέφτει. Για τη θέση που σχηματίζει γωνία  $\theta=30^\circ$  με τον ορίζοντα, ζητούνται:

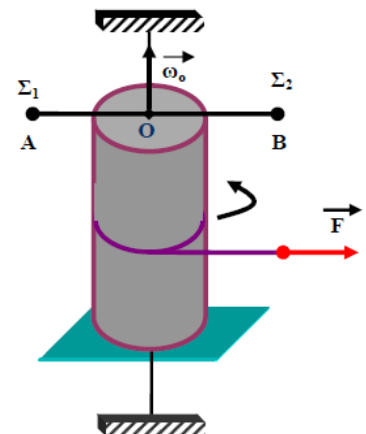
- Η στροφορμή της ράβδου ως προς (κατά τον) άξονα περιστροφής της.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς (κατά τον) άξονα περιστροφής της.
- Η ισχύς της δύναμης του ελατηρίου
- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου.
- Ο ρυθμός μείωσης της δυναμικής ενέργειας της ράβδου.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της  $I=1/3 m\ell^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### 3.5.15. Σύστημα κυλίνδρου - σφαιρών

Ο κύλινδρος του σχήματος, έχει μάζα  $M=4\text{Kg}$ , ακτίνα  $R=0,5\text{m}$  και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο αμετακίνητο άξονα που περνά από τα κέντρα των βάσεων του, στηριγμένος σε μια σταθερή οριζόντια επίπεδη και λεία επιφάνεια. Στην πάνω βάση του κυλίνδρου είναι στερεωμένη οριζόντια αβαρής ράβδος  $AB$  μήκους  $d=4R$  έτσι ώστε να τέμνεται από τον άξονα περιστροφής το μέσον της  $O$ .



Στα άκρα A, B της ράβδου είναι κολλημένα δυο σημειακά σφαιρίδια  $\Sigma_1, \Sigma_2$  με μάζες  $m_1 = m_2 = 0,5\text{Kg}$ . Ένα αβαρές μη εκτατό νήμα είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο, και στο ελεύθερο άκρο του δέχεται σταθερή οριζόντια δύναμη  $F$ .

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος έχει αλγεβρική τιμή  $\omega_0 = +2\text{rad/s}$ , ενώ, τη χρονική στιγμή  $t_1 = 4\text{ s}$ , ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι  $30\text{ J/s}$ .

Αν η ροπή της  $F$  ως προς τον άξονα περιστροφής έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα  $\omega_0$  να υπολογιστούν:

- Η κινητική ενέργεια του συστήματος την χρονική στιγμή  $t_1$ .
- Το έργο της δύναμης  $F$  από την χρονική στιγμή  $t = 0$ , μέχρι την χρονική στιγμή  $t_1$ .
- Το πλήθος των στροφών που έχει κάνει μια ακτίνα του κυλίνδρου από  $t = 0$  μέχρι την χρονική στιγμή  $t_1$ .
- Το μέτρο  $F$  της δύναμης.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως προς τον άξονά του υπολογίζεται με τη σχέση

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2.$$

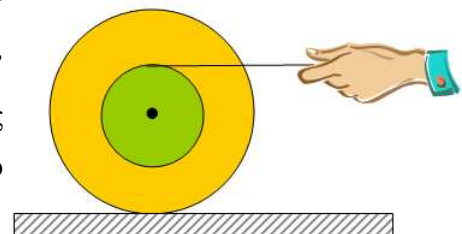
### 3.5.16. Κίνηση ρολού.

Ρολό χαρτιού με αρχική ακτίνα  $R$  βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια με το ένα άκρο του χαρτιού πιασμένο με πινέξες. Στο ρολό δίνουν μια ελαφριά ώθηση (θεωρούμε ότι η αρχική ταχύτητα  $u_0 = 0$ ) και το χαρτί ξετυλίγεται. Βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας όταν η ακτίνα του ρολού γίνεται  $r$ . Υποθέτουμε ότι το ρολό είναι ομογενές κύλινδρος με ροπή αδράνειας  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , όπου  $m$  η μάζα του απομένοντος ρολού και  $\rho$  η ακτίνα του.



### 3.5.17. Ο κύλινδρος και το νήμα

Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος έχει ακτίνα  $R$  και φέρει λεπτή κυκλική εγκοπή ακτίνας  $r = \frac{R}{2}$ . Στην εγκοπή τυλίγουμε ιδανικό, λεπτό, μη εκτατό και αβαρές νήμα το οποίο τραβάμε με το χέρι μας ώστε να παραμένει οριζόντιο και σε επίπεδο κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου.



Ασκούμε με το χέρι μας σταθερή οριζόντια δύναμη στο νήμα και ο κύλινδρος μετατοπίζεται κατά  $2\pi$  χωρίς να ολισθαίνει.

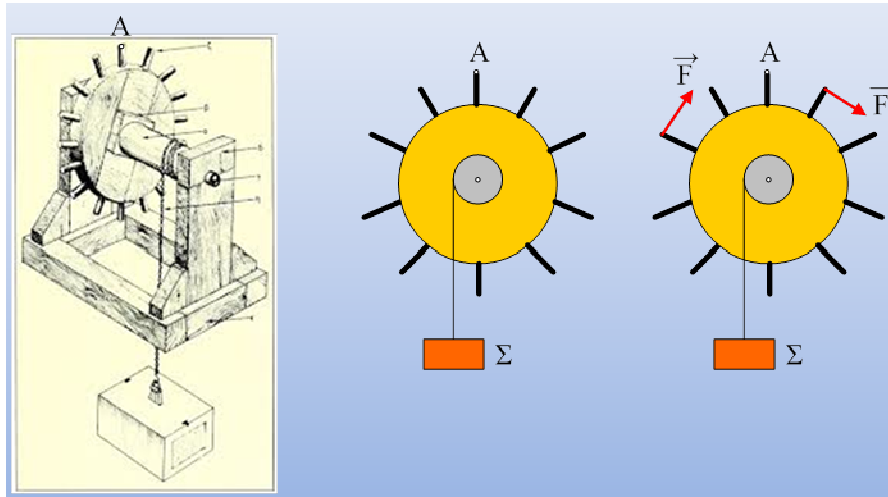
- Υπολογίσατε την μετατόπιση του χεριού.
- Υπολογίσατε το έργο που προσέφερε το χέρι στο σύστημα.

iii) Υπολογίσατε την μεταφορική και την περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

iv) Υπολογίσατε το μέτρο της στατικής τριβής.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι  $I = \frac{mR^2}{2}$ .

### 3.5.18. Στροφορμή και Ενέργεια σε ένα βαρούλκο.



Στο παραπάνω σχήμα βλέπετε ένα βαρούλκο, με την βοήθεια του οποίο ανεβάζουμε ένα βαρύ σώμα  $\Sigma$  μάζας 20kg. Δίνονται η ακτίνα του τυμπάνου γύρω από το οποίο τυλίγεται το σχοινί  $r=10\text{cm}$ , ενώ η ακτίνα του σημείου A είναι ίση με  $R=50\text{cm}$ .

A) Ασκώντας δυο δυνάμεις ίσου μέτρου  $F=24\text{N}$ , στα άκρα δύο χειρολαβών, κάθετα προς αυτές όπως στο σχήμα, μπορούμε να στρέφουμε το βαρούλκο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega=0,1\text{rad/s}$ .

B) Αν αυξήσουμε τα μέτρα των δύο δυνάμεων στην τιμή  $F_1=28\text{N}$ , τότε το τύμπανο αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha_{\text{γων}}=4\text{rad/s}^2$ , οπότε τη στιγμή  $t_1$  το σώμα  $\Sigma$  έχει ταχύτητα  $0,5\text{m/s}$ .

i) Αν το τύμπανο του βαρούλκου δέχεται σταθερή ροπή λόγω τριβής, από τον άξονα, να υπολογιστεί η τιμή της.

ii) Να βρεθεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του βαρούλκου, ως προς τον άξονα περιστροφής του τυμπάνου τη στιγμή  $t_1$ .

iii) Για την παραπάνω στιγμή  $t_1$  να βρεθούν επίσης:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του τυμπάνου.

β) Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρουμε ενέργεια στο σύστημα, μέσω των δύο δυνάμεων που ασκούμε.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma$  και του βαρούλκου.

δ) Ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

### 3.5.19. Μια πτώση σφαίρας.

Μια σφαίρα μάζας  $M=20\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,5\text{m}$  έχει προσκολληθεί στο άκρο ομογενούς ράβδου μάζας  $m=16\text{kg}$  μήκους  $\ell=0,75\text{m}$ , με αποτέλεσμα να έχει σχηματισθεί ένα στερεό  $\Sigma$ , το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο  $O$  της ράβδου. Φέρνουμε το στερεό σε τέτοια θέση, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.

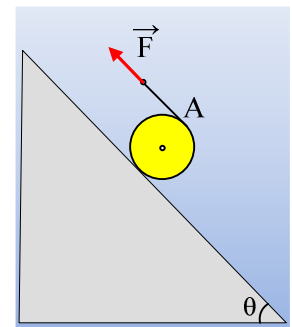


- Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου  $K$  της σφαίρας.
- Αν μειώσουμε τη μάζα της ράβδου, θα αυξηθεί ή θα μειωθεί η μέγιστη ταχύτητα της σφαίρας;
- Σε ποια τιμή τείνει η ταχύτητα του κέντρου  $K$  της σφαίρας, αν η ράβδος θεωρηθεί αβαρής;
- Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου  $K$  της σφαίρας στην περίπτωση που, η αβαρής ράβδος αντικατασταθεί με αβαρές νήμα μήκους  $\ell=1,25\text{m}$ . (Το νήμα συνδέεται στα άκρα μιας διαμέτρου, που ουσιαστικά είναι ισοδύναμο με το να έχει συνδεθεί στο κέντρο της σφαίρας).

Δίνεται για την σφαίρα  $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ , για τη ράβδο  $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

### 3.5.20. Ένας κύλινδρος σε κεκλιμένο επίπεδο.

Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας  $M=2\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,1\text{m}$  έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Τοποθετούμε τον κύλινδρο σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως  $\theta$ , όπου  $\eta\mu\theta=0,8$  και τη στιγμή  $t_0=0$  τον αφήνουμε να κινηθεί, ασκώντας σταθερή δύναμη μέτρου  $F=5\text{N}$ , στο άκρο  $A$  του νήματος παράλληλη στο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Αν ο κύλινδρος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής  $\mu=\mu_s=0,25$ , για τη στιγμή  $t_1=1\text{s}$ , να βρεθούν:

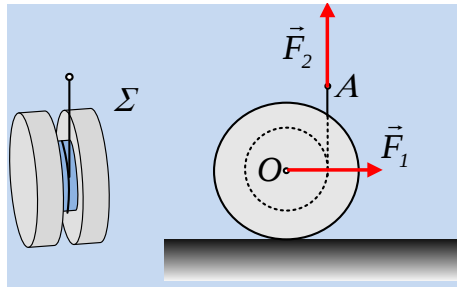


- Να διερευνήσετε προς τα που θα κινηθεί ο κύλινδρος, αν θα ολισθαίνει ή αν θα κυλιέται και τη φορά περιστροφής του.
- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και η μετατόπιση του άξονά του.
- Η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
- η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο.
- Οι ρυθμοί μεταβολής:
  - της στροφορμής του κυλίνδρου, ως προς τον άξονα περιστροφής του.
  - της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου.
  - της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του κυλίνδρου

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του  $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

### 3.5.21. Οι κινήσεις πάνε και έρχονται....

Διαθέτουμε ένα στερεό  $\Sigma$  (ένα καρούλι), αποτελούμενο από δυο δίσκους οι οποίοι συνδέονται με κύλινδρο, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Η μάζα του  $\Sigma$  είναι  $M=20\text{kg}$  και η εξωτερική του ακτίνα  $R=0,4\text{m}$ . Τοποθετούμε το στερεό  $\Sigma$  λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή ασκούμε στο κέντρο μάζας του  $O$  μια σταθερή οριζόντια δύναμη  $F_1=20\text{N}$ , ενώ ταυτόχρονα τραβάμε το άκρο  $A$  του νήματος ασκώντας διαρκώς μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη  $F_2=16\text{N}$ , όπως στο σχήμα.



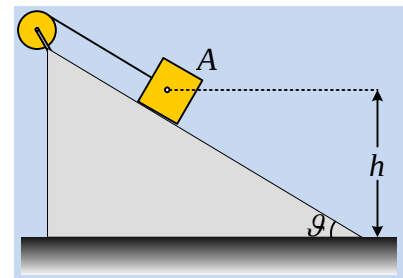
Μετά από λίγο ο άξονας του στερεού (που διέρχεται από το κέντρο  $O$ ) έχει μετατοπισθεί κατά  $x=2\text{m}$ , ενώ έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους  $0,25\text{m}$ . Για την θέση αυτή ζητούνται:

- Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού  $\Sigma$ .
- Η γωνιακή του ταχύτητα.
- Η ταχύτητα ενός σημείου  $B$ , επαφής του στερεού με το έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του στερεού γύρω από τον άξονα περιστροφής του  $I = 0,4MR^2$ .

### 3.5.22. Οι ενέργειες σε ένα σύστημα και σε έναν «τροχό».

Στην κορυφή ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου έχει στερεωθεί μια τροχαλία μάζας  $m=3\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,2\text{m}$ , στο αυλάκι της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές μη ελαστικό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε έναν κύβο μάζας  $M=m$ . Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο τον κύβο να γλιστρήσει από ένα σημείο  $A$ , το οποίο βρίσκεται σε ύψος  $h=2\text{m}$  από το οριζόντιο επίπεδο. Το νήμα είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο, ενώ δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της  $I = \frac{1}{2} mR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .



- Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του κύβου και της τροχαλίας, τη στιγμή που ο κύβος φτάνει στη βάση του επιπέδου.
- Να εξετάσετε αν υπάρξει και ποια αλλαγή, αν επαναλάβουμε το πείραμα αντικαθιστώντας τον κύβο με κύλινδρο ίσης μάζας, όπου το νήμα, με κατάλληλο μηχανισμό, συνδέεται στον άξονά του.
- Σε ένα άλλο κεκλιμένο επίπεδο ίδιας κλίσης και από ύψος επίσης  $h=2\text{m}$  από το οριζόντιο επίπεδο, αφήνουμε ελεύθερη την παραπάνω τροχαλία, η οποία κυλίεται και μετά από λίγο φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί η τελική κινητική της ενέργεια. Ποιο μέρος της ενέργειας αυτής αντιστοιχεί στην μεταφορική και ποιο στην περιστροφική της κίνηση;