

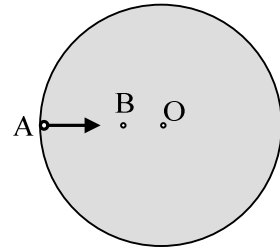
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Θέματα Εξετάσεων

- 1) Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σ' ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι μηδέν, τότε
- η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται.
 - η γωνιακή του ταχύτητα είναι σταθερή.
 - η γωνιακή του επιτάχυνση μεταβάλλεται.
 - η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του μεταβάλλεται.
- 2) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα φυσικά μεγέθη από τη Στήλη Ι και, δίπλα σε καθένα, τη μονάδα της Στήλης II που αντιστοιχεί σ' αυτό.

Στήλη Ι	Στήλη II
Ροπή αδράνειας I σώματος ως προς άξονα	$\text{N}\cdot\text{m}$
Στροφορμή L στερεού σώματος	rad/s
Γωνιακή ταχύτητα ω	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Ροπή δύναμης τ ως προς άξονα	F
Συχνότητα f περιοδικού φαινομένου	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
	Hz

- 3) Δίσκος παιδικής χαράς περιστρέφεται περί κατακόρυφο άξονα κάθετο στο επίπεδό του διερχόμενο από το κέντρο του δίσκου O. Στο δίσκο δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη. Ένα παιδί μετακινείται από σημείο A της περιφέρειας του δίσκου στο σημείο B πλησιέστερα στο κέντρο του. Τότε ο δίσκος θα περιστρέφεται:



- πιο αργά
- πιο γρήγορα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 4) Καλλιτέχνης του πατινάζ περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του, χωρίς τριβές. Στην αρχή ο καλλιτέχνης έχει τα χέρια απλωμένα και στη συνέχεια τα συμπύσσει. Ο καλλιτέχνης περιστρέφεται πιο γρήγορα, όταν έχει τα χέρια:

- απλωμένα
- συνεπτυγμένα.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 5) Η μονάδα μέτρησης της στροφορμής είναι
- $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.
 - $1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$.
 - $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
 - $1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}$.

- 6) Να εξηγήσετε γιατί η χρονική διάρκεια της περιστροφής της γης γύρω από τον εαυτόν της παραμένει σταθερή, δηλαδή 24 ώρες.

- 7) Στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω . Αν η ροπή

αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι I , να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της στροφικής του κίνησης δίνεται από τη σχέση

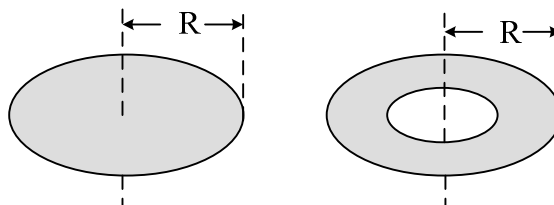
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

- 8) Κατά τη στροφική κίνηση ενός σώματος .
- i) όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.
 - ii) κάθε σημείο του σώματος κινείται με γραμμική ταχύτητα $v = \omega \cdot r$ (ω η γωνιακή ταχύτητα, r η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής).
 - iii) κάθε σημείο του σώματος έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = v_{cm}/R$ (v_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας, R η απόσταση του σημείου από το κέντρο μάζας).
 - iv) η διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας μεταβάλλεται.
- 9) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Φυσικό μέγεθος	Μέγεθος*	Μονάδες
Ροπή δύναμης ως προς σημείο.		$N \cdot m$
Στροφορμή σώματος.		
Γωνιακή ταχύτητα.	Διανυσματικό	
Ροπή αδράνειας ως προς άξονα.		$kg \cdot m^2$

* Να γράψετε μία από τις λέξεις μονόμετρο ή διανυσματικό.

- 10) Δίσκος και δακτύλιος με οπή, η μάζα του οποίου είναι ομογενώς κατανεμημένη, όπως στο σχήμα, έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα.



Αν $I_{\Delta\sigma}$ και $I_{\Delta\kappa}$ οι ροπές αδράνειας του δίσκου και του δακτυλίου αντίστοιχα ως προς άξονες κάθετους στο επίπεδο τους που διέρχονται από τα κέντρα τους, τι ισχύει;

- a. $I_{\Delta\sigma} > I_{\Delta\kappa}$
- β. $I_{\Delta\sigma} < I_{\Delta\kappa}$.
- γ. $I_{\Delta\sigma} = I_{\Delta\kappa}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 11) Σωστό - λάθος

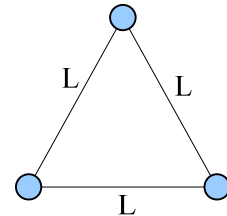
- i) Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι ανάλογη προς τη συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται στο σώμα.
- ii) Αν η στροφορμή ενός στερεού σώματος παραμένει σταθερή, τότε η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται στο σώμα είναι μηδέν.
- iii) Η ροπή αδράνειας εκφράζει την αδράνεια στη μεταφορική κίνηση.

- iv) Η μονάδα μέτρησης της ροπής αδράνειας είναι $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
- v) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που ορίζουν.
- vi) Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα στερεό σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα έχει πάντοτε μηδενική γωνιακή επιτάχυνση.
- 12) Σωστό - λάθος
- i) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι ανεξάρτητη από τη θέση του άξονα περιστροφής του.
- ii) Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.
- iii) Ένας αθλητής καταδύσεων, καθώς περιστρέφεται στον αέρα, συμπύσσει τα άκρα του. Με την τεχνική αυτή αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.
- iv) Η στροφορμή ενός στερεού σώματος παραμένει σταθερή, αν το αλγεβρικό άθροισμα ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό είναι διάφορο του μηδενός.
- v) η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων διάφορο του μηδενός.
- 13) Σωστό - λάθος
- i) Τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας ω και της γωνιακής επιτάχυνσης α έχουν πάντα την ίδια κατεύθυνση.
- ii) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού δεν εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής του.
- iii) Η Γη έχει στροφορμή λόγω της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο.
- iv) Η ροπή αδράνειας εκφράζει στη μεταφορική κίνηση ό,τι εκφράζει η μάζα στη στροφική κίνηση.
- v) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.
- 14) Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει :
- α.** η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να είναι μηδέν
- β.** το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να είναι μηδέν
- γ.** η συνισταμένη των δυνάμεων και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να είναι μηδέν
- 15) Συμπλήρωση κενών
- i) Το αλγεβρικό άθροισμα των που δρουν σ' ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής
- ii) Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, τότε η μεταβολή της ολικής στροφορμής του συστήματος είναι
- 16) Εάν η στροφορμή ενός σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα παραμένει σταθερή, τότε η συνολική εξωτερική ροπή πάνω στο σώμα
- α.** είναι ίση με το μηδέν.
- β.** είναι σταθερή και διάφορη του μηδενός.
- γ.** αυξάνεται με το χρόνο.
- δ.** μειώνεται με το χρόνο.

- 17) Δύο ομογενείς δακτύλιοι Α, Β των οποίων το πάχος είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα τους, έχουν την ίδια μάζα και ακτίνες R_A, R_B όπου $R_A > R_B$. Οι δακτύλιοι περιστρέφονται ο καθένας γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

- i) Ποιος από τους δύο δακτυλίους έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής;
ii) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 18) Τρεις σφαίρες αμελητέων διαστάσεων που η κάθε μία έχει την ίδια μάζα m , συνδέονται μεταξύ τους με ράβδους αμελητέας μάζας και μήκους L , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από μία από τις σφαίρες. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς αυτόν τον άξονα είναι:



α. mL^2

β. $2mL^2$

γ. $3mL^2$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 19) Σώμα ακίνητο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t=0$ να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Αν τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια λόγω της περιστροφής είναι K_1 και τη χρονική στιγμή $t_2=2t_1$ είναι K_2 , τότε:

α. $K_2=2K_1$

β. $K_2=4K_1$

γ. $K_2=8K_1$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 20) Ένα ομογενές σώμα με κανονικό γεωμετρικό σχήμα κυλίνεται, χωρίς να ολισθαίνει. Η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την κινητική του ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Το γεωμετρικό σχήμα του σώματος είναι:

α. σφαίρα.

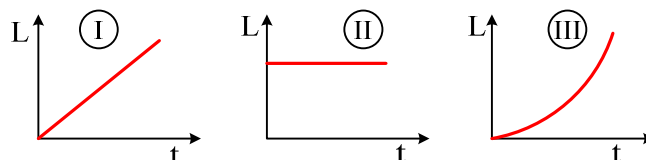
β. λεπτός δακτύλιος.

γ. κύλινδρος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 21) Ένας κύλινδρος που είναι αρχικά ακίνητος και μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σταθερό άξονά του δέχεται την επίδραση σταθερής ροπής.

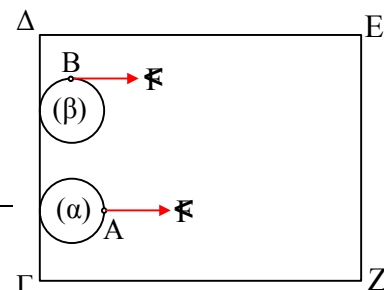
Τη στροφορμή του κυλίνδρου σε συνάρτηση με το χρόνο απεικονίζει το σχήμα



- α) το i, β) το ii γ) το iii

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 22) Δύο ίδιοι οριζόντιοι κυκλικοί δίσκοι (α) και (β) μπορούν να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο ορθογώνιο τραπέζι ΓΔΕΖ χωρίς τριβές, όπως στο σχήμα. Αρχικά οι δύο δίσκοι



σκοι είναι ακίνητοι και τα κέντρα τους απέχουν ίδια απόσταση από την πλευρά EZ. Ίδιες σταθερές δυνάμεις F με διεύθυνση παράλληλη προς τις πλευρές ΔE και ΓZ ασκούνται σ' αυτούς. Στο δίσκο (α) η δύναμη ασκείται πάντα στο σημείο A του δίσκου. Στο δίσκο (β) η δύναμη ασκείται πάντα στο σημείο B του δίσκου.

Αν ο δίσκος (α) χρειάζεται χρόνο t_α για να φτάσει στην απέναντι πλευρά EZ, ενώ ο δίσκος (β) χρόνο t_β , τότε:

$$\alpha. t_\alpha > t_\beta \quad \beta. t_\alpha = t_\beta \quad \gamma. t_\alpha < t_\beta$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 23) Άνθρωπος βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και κοντά στο κέντρο οριζόντιου δίσκου που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του. Αν ο άνθρωπος μετακινηθεί στην περιφέρεια του δίσκου, τότε η γωνιακή του ταχύτητα ω_2 θα είναι
- $\omega_2 = \omega_1$.
 - $\omega_2 > \omega_1$.
 - $\omega_2 < \omega_1$.
 - $\omega_2 = 0$.

- 24) Ομογενής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι v_{cm} . Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$.

Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι

$$\alpha) \frac{2}{5} mv_{cm}^2 \quad \beta) \frac{7}{10} mv_{cm}^2 \quad \gamma) \frac{9}{10} mv_{cm}^2$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 25) Τροχός ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Αν v_{cm} η ταχύτητα του τροχού λόγω μεταφορικής κίνησης, τότε η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού που απέχουν από το έδαφος απόσταση ίση με R , έχει μέτρο:
- v_{cm} .
 - $2v_{cm}$.
 - 0 .
 - $+2 v_{cm}$

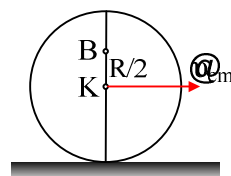
- 26) Υποθέτουμε ότι κλιματολογικές συνθήκες επιβάλλουν την μετανάστευση του πληθυσμού της Γης προς τις πολικές ζώνες. Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της:

- θα μείνει σταθερή.
- θα ελαττωθεί.
- θα αυξηθεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 27) Σε οριζόντιο επίπεδο ο δίσκος του σχήματος με ακτίνα R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του K είναι v_{cm} . Η ταχύτητα του σημείου που βρίσκεται στη θέση B της κατακόρυφης διαμέτρου και απέχει απόσταση $R/2$ από το K θα είναι

$$i) \frac{3}{2} v_{cm} \quad ii) \frac{2}{3} v_{cm} \quad iii) \frac{5}{2} v_{cm}$$



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 28) Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος υποδιπλασιαστεί, τότε η κινητική του ενέργεια θα
- υποτετραπλασιαστεί.
 - υποδιπλασιαστεί.
 - τετραπλασιαστεί.
 - παραμένει αμετάβλητη.

- 29) Δύο ομογενείς κυκλικοί δακτύλιοι Δ_1 και Δ_2 με ακτίνες R και $2R$, κυλινδρικοί σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερές γωνιακές ταχύτητες 3ω και ω , αντίστοιχα. Ο λόγος των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2 είναι
- α) $3/2$ β) $1/2$ γ) 1

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

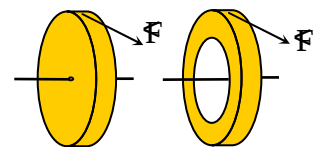
- 30) Η μονάδα μέτρησης της στροφορμής στο σύστημα S.I. είναι
- α. $\text{Kg}\cdot\text{m/s}$ β. $\text{Kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ γ. $\text{Kg}\cdot\text{m/s}^2$ δ. $\text{J}\cdot\text{s}$
- 31) Η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της είναι σταθερή. Αυτό οφείλεται στο ότι η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο
- δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονά της.
 - δημιουργεί μηδενική ροπή ως προς τον άξονά της.
 - έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης σε ένα σημείο του Ισημερινού της Γης.
 - έχει τέτοιο μέτρο που δεν επηρεάζει την περιστροφή της Γης.
- 32) Ένας απομονωμένος ομογενής αστεράς σφαιρικού σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από τον εαυτό του (ιδιοπεριστροφή) με συχνότητα f_0 . Ο αστεράς συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο της συρρίκνωσής του η νέα συχνότητα ιδιοπεριστροφής του θα είναι
- μεγαλύτερη από την αρχική συχνότητα f_0 .
 - μικρότερη από την αρχική συχνότητα f_0 .
 - ίση με την αρχική συχνότητα f_0 .

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμα.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

- 33) Μία σφαίρα κυλίνεται χωρίς ολίσθηση κινούμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου (αρχικά ανέρχεται και στη συνέχεια κατέρχεται).
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της μεταβάλλεται.
 - Η φορά του διανύσματος της στατικής τριβής παραμένει σταθερή.
 - Η φορά του διανύσματος της γωνιακής επιτάχυνσης μεταβάλλεται.
 - Η φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας παραμένει σταθερή.

- 34) Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος (I) και ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δακτύλιος (II), που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα.



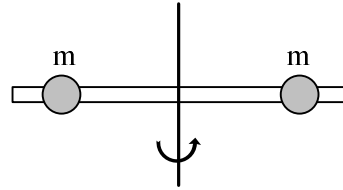
Κάποια χρονική στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά δυνάμεις

ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρεια. Οι γωνιακές επιταχύνσεις που θα αποκτήσουν θα είναι

α. $\alpha_I = \alpha_{II}$. **β.** $\alpha_I < \alpha_{II}$. **γ.** $\alpha_I > \alpha_{II}$.

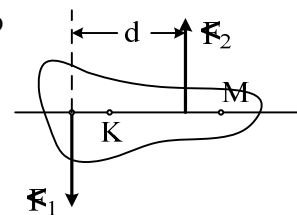
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 35) Η ράβδος του σχήματος είναι αβαρής και οι μάζες m απέχουν εξίσου από τον άξονα περιστροφής. Αν η απόσταση των μαζών από τον άξονα περιστροφής υποδιπλασιαστεί, η ροπή αδράνειας του συστήματος:



- α.** τετραπλασιάζεται.
β. διπλασιάζεται.
γ. υποδιπλασιάζεται.
δ. υποτετραπλασιάζεται.

- 36) Η συνολική ροπή των δύο αντίρροπων δυνάμεων F_1 και F_2 του σχήματος, που έχουν ίδιο μέτρο, είναι



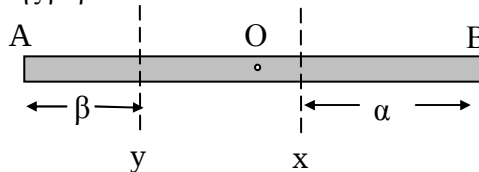
- α.** μεγαλύτερη ως προς το σημείο K.
β. μεγαλύτερη ως προς το σημείο M.
γ. ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 37) Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει :

- i) η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να είναι μηδέν
 ii) το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να είναι μηδέν
 iii) η συνισταμένη των δυνάμεων και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να είναι μηδέν
 iv) η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων διάφορο του μηδενός.

- 38) Μια λεπτή και ομογενής ράβδος AB μπορεί να περιστρέφεται είτε γύρω από τον άξονα x είτε γύρω από τον άξονα y . Οι άξονες αυτοί είναι κάθετοι στη ράβδο και βρίσκονται εκατέρωθεν του μέσου O της ράβδου.



Αν α, β είναι η απόσταση κάθε άξονα από τα άκρα της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ισχύει $\alpha > \beta$ ο λόγος των ροπών αδράνειας της ράβδου I_x, I_y ως προς τους άξονες x, y αντίστοιχα είναι

α. $I_x/I_y=1$

β. $I_x/I_y>1$

γ. $I_x/I_y<1$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

γ. Όταν μια χορεύτρια καλλιτεχνικού πατινάζ, που περιστρέφεται, θέλει να περιστραφεί γρηγορότερα συμπύσσει τα χέρια της.

39) Ένας κύβος και μία σφαίρα ίδιας μάζας αφήνονται να κινηθούν από το ίδιο ύψος δύο διαφορετικών κεκλιμένων επιπέδων. Ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβές στο ένα και η σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση στο άλλο. Για τις ταχύτητες του κύβου και του κέντρου μάζας της σφαίρας στη βάση των κεκλιμένων επιπέδων ισχύει ότι

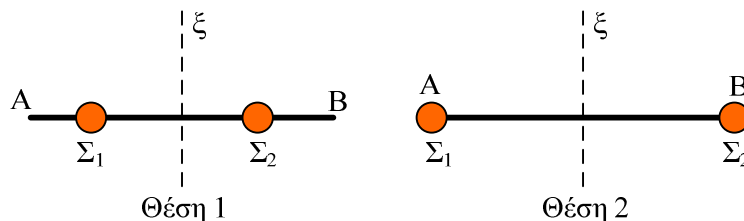
α. μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα του κύβου.

β. μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα της σφαίρας.

γ. οι ταχύτητες είναι ίσες.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

40) Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα συμμετρίας (ξ) του σχήματος. Οι δύο σφαίρες Σ_1 , Σ_2 μάζας m καθεμιά μπορούν να μετακινούνται κατά μήκος της ράβδου. Η ράβδος ξεκινά να περιστρέφεται



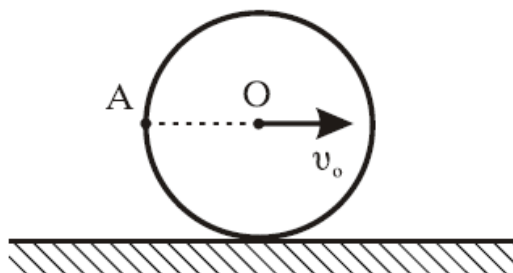
α. πιο εύκολα στη θέση 1.

β. πιο εύκολα στη θέση 2.

γ. το ίδιο εύκολα και στις δύο περιπτώσεις.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

41) Ο δίσκος του σχήματος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου του O είναι v_0 . Το σημείο A βρίσκεται στην περιφέρεια του δίσκου και το AO είναι οριζόντιο.



Η ταχύτητα του σημείου A έχει μέτρο

α. $v_A = 2 v_0$

β. $v_A = \sqrt{2} v_0$

γ. $v_A = v_0$

α. $v_A = 2v_0$

β. $v_A = \sqrt{2} v_0$

γ. $v_A = v_0$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

42) Στη στροφική κίνηση το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών των δυνάμεων, που ασκούνται στο σώμα είναι

- α. ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.
- β. ίσο με τη μεταβολή της στροφορμής του σώματος.
- γ. πάντα θετικό.
- δ. αντιστρόφως ανάλογο της συνολικής δύναμης που ασκείται στο σώμα.

43) Σε ένα ακίνητο ρολόι που βρίσκεται σε κανονική λειτουργία, ο λόγος της στροφορμής του λεπτοδείκτη (L_1) προς την στροφορμή του ωροδείκτη (L_2), ως προς τον κοινό άξονα περιστροφής τους, είναι $L_1/L_2 = \lambda$, όπου λ θετική σταθερά. Ο λόγος των κινητικών ενεργειών τους K_1/K_2 αντίστοιχα είναι

- α. 6λ .
- β. 12λ .
- γ. 24λ .

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

44) Στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, με γωνιακή ταχύτητα ω . Αν διπλασιαστεί η γωνιακή του ταχύτητα, τότε η κινητική του ενέργεια

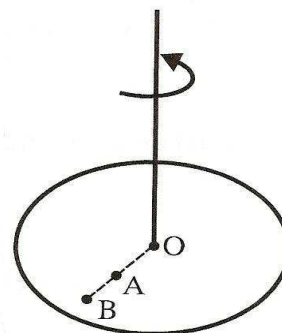
- α. μένει η ίδια.
- β. διπλασιάζεται.
- γ. τετραπλασιάζεται.
- δ. οκταπλασιάζεται.

45) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι διανυσματικό μέγεθος.

46) Στη θέση Α οριζόντιου δίσκου βρίσκεται ένα παιδί και το σύστημα παιδί – δίσκος περιστρέφεται χωρίς τριβές, με γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου Ο.

Αν το παιδί μετακινηθεί από τη θέση Α στη θέση Β του δίσκου (σχήμα), τότε η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου:

- α. θα αυξηθεί.
- β. θα παραμείνει η ίδια.
- γ. θα μειωθεί.



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

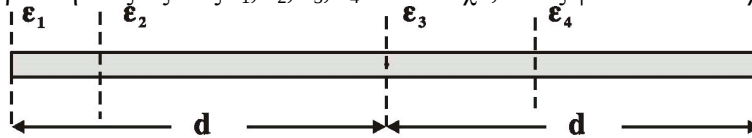
47) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος ως προς άξονα περιστροφής

- α. είναι διανυσματικό μέγεθος.
- β. έχει μονάδα μέτρησης το $1\text{N}\cdot\text{m}$, στο S.I.
- γ. δεν εξαρτάται από την θέση του άξονα περιστροφής.
- δ. εκφράζει την αδράνεια του σώματος στην περιστροφική κίνηση.

48) Σωστού λάθους

- i) Όταν ένας αστέρας συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας, η γωνιακή ταχύτητά του λόγω ιδιοπεριστροφής αυξάνεται.
- 49) Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση, τότε η γωνιακή του
- ταχύτητα αυξάνεται.
 - ταχύτητα μένει σταθερή.
 - επιτάχυνση αυξάνεται.
 - επιτάχυνση μειώνεται.
- 50) Σωστού – λάθους
- Η ροπή αδράνειας είναι διανυσματικό μέγεθος.
 - κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα.
 - Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, η ολική στροφορμή του συστήματος αυξάνεται συνεχώς.

- 51) Η λεπτή ομογενής ράβδος του σχήματος έχει ροπή αδράνειας I_1, I_2, I_3, I_4 ως προς τους παράλληλους άξονες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η μικρότερη ροπή αδράνειας είναι η

- α. I_1 . β. I_2 . γ. I_3 . δ. I_4 .

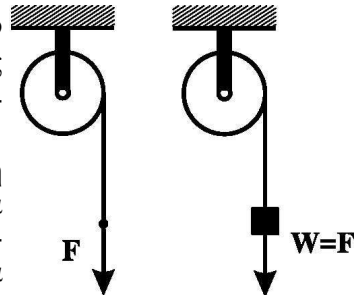
- 52) Τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα.

Όταν στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω μέτρου F , η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$ ενώ, όταν κρεμάμε στο ελεύθερο άκρο του νήματος σώμα βάρους $w = F$ η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu,2}$. Ισχύει:

- α. $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$ β. $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} > \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$ γ. $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} < \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$

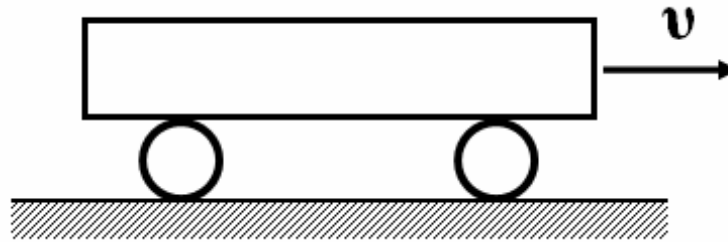
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση (μονάδες 2)

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας (μονάδες 7)



- 53) Αν έλιωναν οι πολικοί πάγοι και ανέβαινε λίγο η στάθμη της θάλασσας, τότε
- η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα αυξηθεί, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα παραμείνει σταθερή.
 - η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα παραμείνει σταθερή, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα αυξηθεί.
 - η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα παραμείνει σταθερή, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα μειωθεί.
 - η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα μειωθεί, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα παραμείνει σταθερή.

- 54) Μία δοκός κινείται πάνω σε δύο όμοιους κύλινδρους, όπως φαίνεται στο σχήμα, χωρίς να ολισθαίνει.



Οι κύλινδροι κυλίνουν στο οριζόντιο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνουν. Αν η δοκός μετατοπιστεί κατά 10 cm ο κάθε κύλινδρος θα μετατοπιστεί κατά

- α. 10cm β. 5cm γ. 20cm

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή τιμή (μονάδες 2).

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

- 55) Σωστού – λάθους.

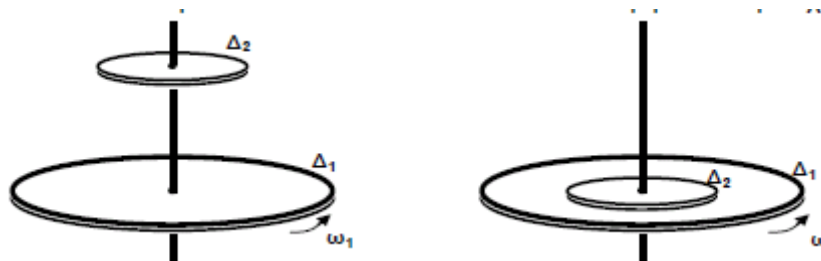
- Σε στερεό σώμα σφαιρικού σχήματος που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα διερχόμενο από το κέντρο του ισχύει πάντα $\Sigma \mathbf{F} = 0$.
- Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται, όταν τους ασκούνται δυνάμεις, λέγονται μηχανικά στερεά.
- Μονάδα μέτρησης στροφορμής στο SI είναι το $1 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$

- 56) Ένας δίσκος Δ_1 με ροπή αδράνειας I_1 στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 και φορά περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

Ένας δεύτερος δίσκος Δ_2 με ροπή αδράνειας $I_2 = \frac{I_1}{4}$, που αρχικά είναι ακίνητος, τοποθε-

τείται πάνω στο δίσκο Δ_1 , ενώ αυτός περιστρέφεται, έτσι ώστε να έχουν κοινό άξονα περιστροφής, που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δίσκων, όπως δείχνει το σχήμα.

Μετά από λίγο οι δύο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω .



Αν L_1 είναι το μέτρο της αρχικής στροφορμής του δίσκου Δ_1 , τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του δίσκου Δ_1 είναι:

- i) 0

ii) $\frac{1}{5} L_1$

iii) $\frac{2}{5} L_1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

57) Σε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα ασκούνται ομοεπίπεδες δυνάμεις έτσι ώστε αυτό να εκτελεί μόνο επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση. Για τη συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma \vec{F}$ που του ασκούνται και για το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών $\Sigma \tau$ ως προς οποιοδήποτε σημείο του, ισχύει:

α) $\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau = 0$

β) $\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau \neq 0$

γ) $\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau = 0$

δ) $\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau \neq 0$

58) Ένα μηχανικό στερεό περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα περιστροφής. Αν διπλασιαστεί η στροφορμή του στερεού, χωρίς να αλλάξει θέση ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο στρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια.

i) παραμένει σταθερή

ii) υποδιπλασιάζεται

iii) διπλασιάζεται

iv) τετραπλασιάζεται.

59) Σωστού – λάθους.

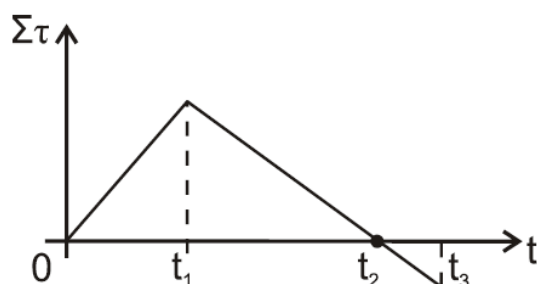
i) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.

ii) Η γη έχει στροφορμή λόγω περιστροφής γύρω από τον άξονά της και λόγω περιφοράς γύρω από τον ήλιο.

iii) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που ορίζουν οι δύο δυνάμεις.

iv) Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα, συμπύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους.

60) Οριζόντιος, αρχικά ακίνητος, δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του



και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στο δίσκο μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε, η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει τη μέγιστη τιμή της τη χρονική στιγμή.

A) t_1 B) t_2 C) t_3

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

- 61) Αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στην αθλήτρια δεν δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της και οι τριβές με τον πάγο είναι αμελητέες. Αν κάποια στιγμή συμπύξει τα χέρια της, ενώ συνεχίζει να στρέφεται γύρω από τον ίδιο άξονα, η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της αθλήτριας:

i) παραμένει σταθερή ii) μειώνεται iii) αυξάνεται

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (μονάδες 2)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 6)

- 62) Κατά τη στροφική κίνηση ενός στερεού γύρω από σταθερό άξονα

α. η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής του στερεού μεταβάλλεται

β. όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα

γ. κάθε σημείο του στερεού έχει γωνιακή ταχύτητα ανάλογη με την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής

δ. κάθε σημείο του στερεού έχει μέτρο γραμμικής ταχύτητας ανάλογο με την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

- 63) Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Εάν διπλασιαστεί η στροφορμή του, χωρίς να αλλάξει ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο αυτό περιστρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια:

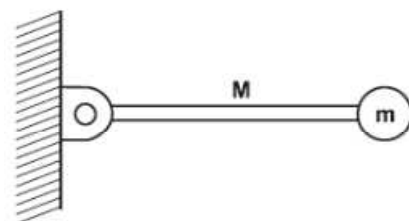
α) παραμένει σταθερή

β) υποδιπλασιάζεται

γ) διπλασιάζεται

δ) τετραπλασιάζεται.

- 64) Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της ράβδου, είναι στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας $m = \frac{M}{2}$ (Σχήμα 1). Τη χρονική στιγμή που το



Σχήμα 1

διο μάζας $m = \frac{M}{2}$ (Σχήμα 1). Τη χρονική στιγμή που το

σύστημα ράβδου-σφαιριδίου αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι:

$$\text{i)} \quad \frac{\Delta L_p}{\Delta t} = \frac{1}{2} MgL \qquad \text{ii)} \quad \frac{\Delta L_p}{\Delta t} = MgL \frac{1}{2} \qquad \text{iii)} \quad \frac{\Delta L_p}{\Delta t} = \frac{2}{5} MgL$$

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της που περνά από το άκρο της, είναι $I_p = \frac{1}{3} ML^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

65) Η γωνιακή επιτάχυνση ενός ομογενούς δίσκου που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, είναι ανάλογη

α. με τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής

β. με τη μάζα του δίσκου

γ. με την ακτίνα του δίσκου

δ. με τη ροπή που ασκείται στο δίσκο.

66) Ένα ομογενές σώμα (δακτύλιος ή σφαιρικός φλοιός ή συμπαγής σφαίρα) έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, που δίνεται από τη σχέση $I_{CM} = \alpha mR^2$, όπου m η μάζα του σώματος, R η ακτίνα του και α ένας θετικός αριθμός μικρότερος ή ίσος της μονάδας ($0 < \alpha \leq 1$). Το σώμα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Αν η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω μεταφορικής κίνησης προς την ολική κινητική ενέργεια είναι $K_{\mu} / K_{ολ} = 5 / 7$, τότε το α έχει την τιμή:

$$\text{i)} \quad \alpha = 1$$

$$\text{ii)} \quad \alpha = 2/3$$

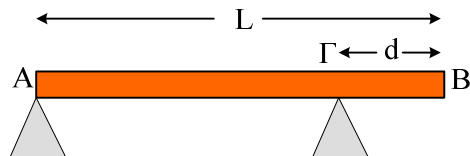
$$\text{iii)} \quad \alpha = 2/5.$$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις

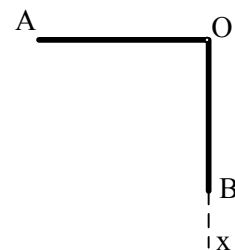
- 1) Ομογενής δοκός AB μήκους $L=3\text{m}$ και βάρους $w=50\text{N}$ ισορροπεί οριζόντια, στηριζόμενη στο άκρο A και στο σημείο Γ, που απέχει από το άλλο άκρο B απόσταση $d=0,5\text{m}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
- Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στη δοκό στα σημεία A και Γ.
 - Στο άκρο B της δοκού τοποθετείται σώμα βάρους w_1 και παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στη δοκό από το στηρίγμα στο άκρο A ελαττώνεται στο μισό.



iii) Να υπολογίσετε το βάρος w_1 του σώματος.

Εσπερινά 2002

- 2) Δύο ίδιες, λεπτές, ισοπαχείς και ομογενείς ράβδοι OA και OB, που έχουν μάζα $M = 4\text{ kg}$ και μήκος $L = 1,5\text{ m}$ η καθεμία, συγκολλούνται στο ένα άκρο τους O, ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία. Το σύστημα των δύο ράβδων μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο AOB, που διέρχεται από την κορυφή O της ορθής γωνίας. Το σύστημα αρχικά συγκρατείται στη θέση όπου η ράβδος OA είναι οριζόντια (όπως στο σχήμα). Η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$.



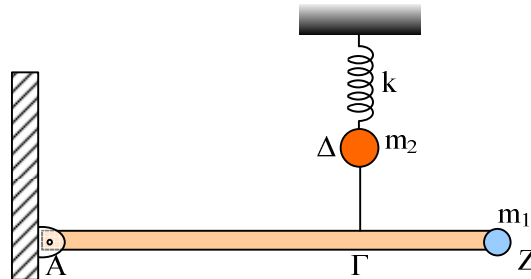
- Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το O.
- Από την αρχική του θέση το σύστημα των δύο ράβδων αφήνεται ελεύθερο να περιστραφεί περί τον άξονα περιστροφής στο σημείο O, χωρίς τριβές. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος των δύο ράβδων τη στιγμή της εκκίνησης.
- Τη χρονική στιγμή κατά την οποία οι ράβδοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κατακόρυφο OX, να υπολογίσετε:
 - Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος των δύο ράβδων.
 - Το μέτρο της στροφορμής της κάθε ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο O.

Δίνονται: $g = 10\text{m/s}^2$, $\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 1/\sqrt{2} = 0,7$.

E.A. 2002

- 3) Ομογενής άκαμπτη ράβδος AZ έχει μήκος $L = 4\text{m}$, μάζα $M = 3\text{kg}$ και ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο άκρο της A υπάρχει ακλόνητη άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, ενώ στο άλλο άκρο της Z

υπάρχει στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας $m_1 = 0,6 \text{ kg}$ και αμελητέων διαστάσεων. Ένα αβαρές τεντωμένο νήμα $\Delta\Gamma$ συνδέει το σημείο Γ της ράβδου με σφαιρίδιο μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$ το οποίο είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο. Η απόσταση $A\Gamma$ είναι ίση με $2,8 \text{ m}$. Όλη η διάταξη βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο γίνονται και όλες οι κινήσεις.



A. Να υπολογίσετε:

- τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου – σφαιριδίου m_1 ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετος στο επίπεδο της διάταξης.
- το μέτρο της τάσης του νήματος $\Delta\Gamma$.

B. Αν κόψουμε το νήμα $\Delta\Gamma$, το σφαιρίδιο m_2 εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση, ενώ η ράβδος μαζί με το σώμα m_1 , υπό την επίδραση της βαρύτητας, περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από το σημείο A.

Να υπολογίσετε:

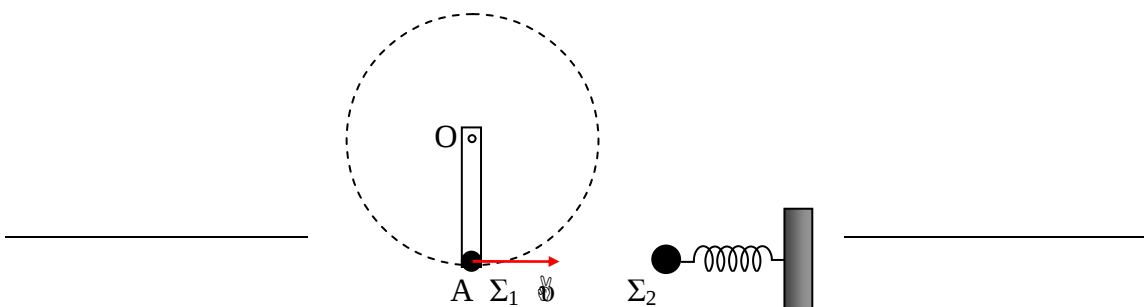
- το χρόνο που χρειάζεται το σφαιρίδιο m_2 από τη στιγμή που κόβεται το νήμα μέχρι τη στιγμή που θα φθάσει στην ψηλότερη θέση του για πρώτη φορά
- το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Z, τη στιγμή που η ράβδος περνάει από την κατακόρυφη θέση.

Δίνονται: $g = 10 \text{ ms}^{-2}$, ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της:

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} MKL^2, \pi = 3,14.$$

E.A. 2003

- Ομογενής στερεά ράβδος OA, μήκους $L = 2 \text{ m}$ και μάζας $M = 0,3 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα (χωρίς τριβές) στο οριζόντιο επίπεδο, περί κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σταθερό σημείο O. Στο άκρο A της ράβδου στερεώνεται σφαιρίδιο Σ_1 μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$, και το σύστημα ράβδου και σφαιριδίου Σ_1 περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται δεύτερο σφαιρίδιο Σ_2 , ίσης μάζας με το Σ_1 , προσδεμένο στο άκρο αβαρούς ελατηρίου, σταθεράς $K = 20 \text{ N/m}$. Ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος και εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου Σ_1 (όπως στο σχήμα). Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα. Οι διαστάσεις των σφαιριδίων είναι αμελητέες. Όταν η ταχύτητα $A\upsilon$ του σφαιριδίου Σ_1 έχει τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, το σφαιρίδιο Σ_1 αποκολλάται από τη ράβδο και κινούμενο ευθύγραμμο συγκρούεται με το σφαιρίδιο Σ_2 με το οποίο ενσωματώνεται.



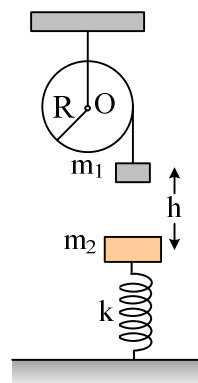
Να βρείτε:

- Τη στροφορμή του συστήματος ράβδου-σφαιριδίου Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο O .
- Το μέτρο v της ταχύτητας του σφαιριδίου τη στιγμή που αποκολλάται από τη ράβδο.
- Την περίοδο T της ταλάντωσης του συστήματος ελατηρίου-συσσωματώματος Σ_1 και Σ_2 .
- Το πλάτος της ταλάντωσης αυτής.

(Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο O , $I_0 = \frac{1}{3} ML^2$ και $\pi = 3,14$).

Εσπερινά 2003

- 5) Η ομογενής τροχαλία του σχήματος ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ και μάζας $M = 3 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο. Κάτω από το σώμα Σ_1 και σε απόσταση h βρίσκεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3 \text{ kg}$ το οποίο ισορροπεί στερεωμένο στη μια άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$ η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στο έδαφος. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα τροχαλίας-σώματος Σ_1 να κινηθεί. Μετά από χρόνο $t = 1 \text{ s}$ το σώμα Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα Σ_2 , ενώ το νήμα κόβεται. Το συσσωμάτωμα εκτελεί αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση. Να υπολογίσετε:



- το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_1 μέχρι την κρούση.
- την κινητική ενέργεια της τροχαλίας μετά την κρούση.
- το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα.
- το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος, τη στιγμή που απέχει από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης απόσταση $x = 0,1 \text{ m}$.

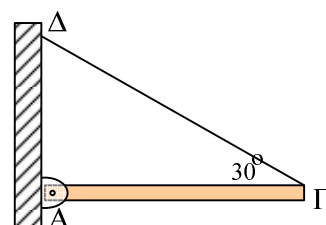
Να θεωρήσετε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \text{ και η επιτάχυνση της βαρύτητας: } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Επαναληπτικές Ε.Λ. 2004

- 6) Ομογενής και ισοπαχής ράβδος $ΑΓ$ με μήκος 1 m και βάρος 30 N ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο A της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συν-



δέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα $\Delta\Gamma$ που σχηματίζει γωνία 30° με τη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- i) Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο από το νήμα και την άρθρωση.
- ii) Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα στο άκρο Γ και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από την άρθρωση σε κατακόρυφο επίπεδο.
- iii) Να υπολογίσετε:
- iv) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου μόλις κοπεί το νήμα.
- v) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, τη στιγμή που αυτή σχηματίζει γωνία 60° με την αρχική της θέση.
- vi) Την κινητική ενέργεια της ράβδου, τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση. Δίνονται : η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A και είναι κάθετος σε αυτή είναι $I_A = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Επαναληπτικές Εσπερινών 2004

- 7) Συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας $m=10 \text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,1 \text{ m}$ κυλίνεται ευθύγραμμα χωρίς ολίσθηση ανερχόμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ με $\eta\mu\varphi=0,56$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει ταχύτητα με μέτρο $v_0=8 \text{ m/s}$. Να υπολογίσετε για τη σφαίρα:

το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της τη χρονική στιγμή $t=0$.

το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της.

το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής κατά τη διάρκεια της κίνησης της.

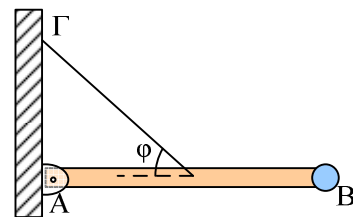
το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της καθώς ανεβαίνει, τη στιγμή που έχει δι-
αγράψει $1\frac{30}{\pi}$ περιστροφές.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο της:

$$I = 0\frac{2}{5} mR^2 \text{ και η επιτάχυνση της βαρύτητας: } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Εξετάσεις 2004

- 8) Μια ομογενής ράβδος AB που έχει μήκος $\ell = 1 \text{ m}$ και μάζα $M = 6 \text{ kg}$, έχει στο άκρο της B μόνιμα στερεωμένο ένα σώμα μικρών διαστάσεων με μάζα. Η ράβδος στηρίζεται με το άκρο της A μέσω άρθρωσης και αρχικά διατηρείται οριζόντια με τη βοήθεια νήματος, το ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο στο μέσο της ράβδου και το άλλο στον κατακόρυφο τοίχο, όπως στο σχήμα. Η διεύθυνση του νήματος σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την διεύθυνση της ράβδου στην οριζόντια θέση ισορροπίας.



- i) Να υπολογίσετε:

a) Το μέτρο της τάσης του νήματος.

b) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου- σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το A και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος.

- ii) Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και η ράβδος μαζί με το σώμα που είναι στερεωμένο στο άκρο της, αρχίζει να περιστρέφεται στο επίπεδο του σχήματος. Θεωρώντας τις τριβές αμελητέες να υπολογίσετε το μέτρο:

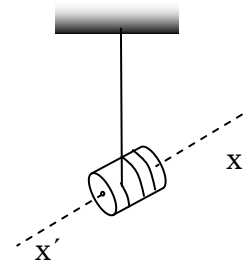
a) Της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος ράβδου-σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής, μόλις κόβεται το νήμα.

- b) Της ταχύτητας του σώματος στο άκρο της ράβδου, όταν αυτή φτάνει στην κατακόρυφη θέση.

Δίνονται: Για τη ράβδο η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής της: $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

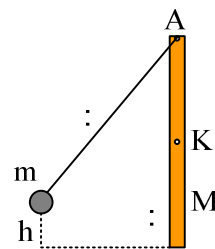
Εξετάσεις Εσπερινών 2005

- 9) Το γιο-γιο του σχήματος αποτελείται από ομογενή συμπαγή κύλινδρο που έχει μάζα $m=0,12\text{kg}$ και ακτίνα $R=1,5 \cdot 10^{-2}\text{m}$. Γύρω από τον κύλινδρο έχει τυλιχτεί νήμα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του. Το νήμα σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου παραμένει κατακόρυφο και τεντωμένο και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\ell=20R$, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm}=2\text{m/s}$.
- Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του. (Ο τύπος που μας δίνει τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, δεν θεωρείται γνωστός).
 - Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, καθώς αυτός κατέρχεται.
 - Τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm}=2\text{m/s}$, το νήμα κόβεται. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του μετά την πάροδο χρόνου $0,8\text{s}$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.
 - Να κάνετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα του μέτρου της στροφορμής σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t=0$, μέχρι τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε χρόνο $0,8\text{s}$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Επαναληπτικές Ε.Λ. 2005

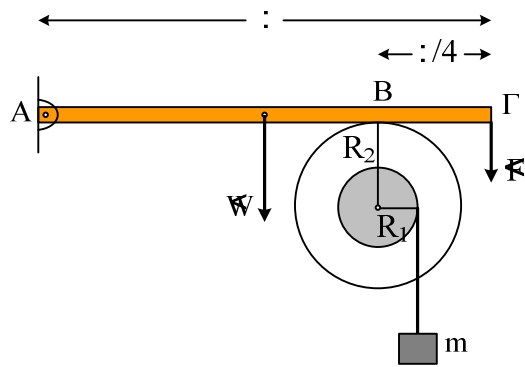
- 10) Ομογενής ράβδος μήκους $\ell=2 \text{ m}$ και μάζας $M=3 \text{ kg}$, είναι αναρτημένη από οριζόντιο άξονα Α, γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστραφεί σε κατακόρυφο επίπεδο. Στον ίδιο άξονα Α είναι δεμένο αβαρές νήμα με το ίδιο μήκος ℓ , στο άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σφαιρίδιο μάζας $m=0,5 \text{ kg}$. Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και το σφαιρίδιο βρίσκεται σε ύψος $h=0,8 \text{ m}$ πάνω από το κατώτερο σημείο της ράβδου. Στη συνέχεια το σφαιρίδιο αφήνεται ελεύθερο και προσκρούει στο άκρο της ράβδου. Μετά την κρούση το σφαιρίδιο ακινητοποιείται. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες. Να βρείτε:
- Την ταχύτητα του σφαιριδίου λίγο πριν την κρούση.
 - Τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
 - Τη γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
 - Το ποσό της μηχανικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική κατά την κρούση.
 - Τη μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας της ράβδου.



Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{1}{12} M l^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

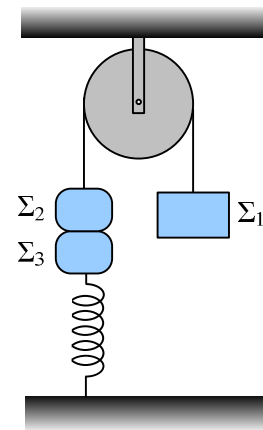
Εξετάσεις Εσπερινών 2006

- 11) Άκαμπτη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκος l και μάζα $M=3\text{kg}$ έχει το άκρο της Α αρθρωμένο και ισορροπεί οριζόντια. Στο άλλο άκρο Γ ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη F μέτρου 9N , με φορά προς τα κάτω. Η ράβδος ΑΓ εφάπτεται στο σημείο Β με στερεό που αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες $R_1=0,1\text{m}$ και $R_2=0,2\text{m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση του σημείου επαφής Β από το άκρο Γ της ράβδου είναι $l/4$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, σαν ένα σώμα γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Ο άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας των δύο κυλίνδρων. Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I=0,09 \text{ kgm}^2$. Γύρω από τον κύλινδρο ακτίνας R_1 είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα στο άκρο του οποίου κρέμεται σώμα μάζας $m=1\text{kg}$.
- Να υπολογίσετε την κατακόρυφη δύναμη που δέχεται η ράβδος στο σημείο Β από το στερεό.
 - Αν το σώμα μάζας m ισορροπεί, να βρείτε το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής μεταξύ της ράβδου και του στερεού.
 - Στο σημείο επαφής Β μεταξύ ράβδου και στερεού ρίχνουμε ελάχιστη ποσότητα λιπαντικής ουσίας έτσι, ώστε να μηδενιστεί η τριβή χωρίς να επιφέρει μεταβολή στη ροπή αδράνειας του στερεού. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m , όταν θα έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους $0,5\text{m}$. Να θεωρήσετε ότι το νήμα ξετυλιγεται χωρίς να ολισθαίνει στον εσωτερικό κύλινδρο.
 - Να υπολογίσετε το ρυθμό παραγωγής έργου στο στερεό τη χρονική στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους $0,5\text{m}$.
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Εξετάσεις Ε.Λ. 2006

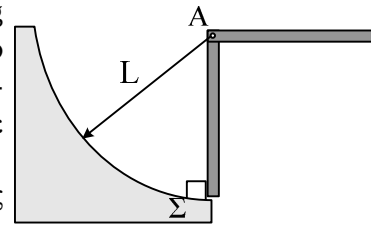
- 12) Τροχαλία μάζας $M = 6\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,25\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Γύρω από την τροχαλία υπάρχει αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στα άκρα του νήματος υπάρχουν σε κατακόρυφη θέση τα σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 4\text{kg}$ και $m_2 = 1\text{kg}$ αντίστοιχα. Το σώμα Σ_2 είναι κολλημένο με σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 1\text{kg}$, το οποίο συγκρατείται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K = 100 \text{ N/m}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή, την οποία θεωρούμε ως χρονική στιγμή μηδέν ($t_0 = 0$), τα σώματα Σ_2 και Σ_3 αποκολλώνται και το Σ_3 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά τη διεύθυνση της κατακόρυφου.
- Να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_3 .
 - Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_3 σε συνάρτηση με το χρόνο,



- θεωρώντας ως θετική φορά, τη φορά προς τα επάνω.
- iii) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας μετά την αποκόλληση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 .
- iv) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t = 0,1 \text{ s}$.
- Δίνονται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I = 0\frac{1}{2} MR^2$ η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση και $g=10\text{m/s}^2$.

Επαναληπτικές Εξετάσεις Ε.Λ. 2006

- 13) Ομογενής ράβδος μήκους $L=0,3 \text{ m}$ και μάζας $M=1,2 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Αρχικά την κρατούμε σε οριζόντια θέση και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη. Θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.
- α. Να βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη.

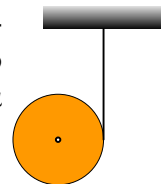


- β. Να βρείτε τη στροφορμή της ράβδου όταν φθάσει σε κατακόρυφη θέση.
- Τη στιγμή που η ράβδος φθάνει στην κατακόρυφη θέση το κάτω άκρο της ράβδου συγκρούεται ακαριαία με ακίνητο σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων που έχει μάζα $m=0,4 \text{ kg}$. Μετά την κρούση το σώμα κινείται κατά μήκος κυκλικού τόξου ακτίνας L , ενώ η ράβδος συνεχίζει να κινείται με την ίδια φορά. Δίνεται ότι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση είναι $0\frac{\omega}{5}$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητά της αμέσως πριν την κρούση.
- γ. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.
- δ. Να βρείτε το ποσοστό της Κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά την κρούση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα Α $I=0\frac{1}{3}ML^2$ και $g=10 \text{ m/s}^2$.

Εξετάσεις Ε.Λ. 2007

- 14) Στο γιογιό του σχήματος που έχει μάζα $M=6\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,1\text{m}$, έχει τυλιχτεί πολλές φορές γύρω του λεπτό αβαρές νήμα. Με σταθερό το ένα άκρο του νήματος αφήνουμε το γιογιό να κατεβαίνει. Όταν αυτό έχει κατέβει κατά $h=5/3\text{m}$ αποκτά μεταφορική ταχύτητα $v_{\text{cm}}=5\text{m/s}$.



Να βρείτε:

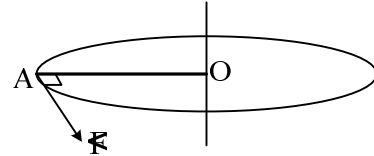
- Α. Τη μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος.
- Β. Τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος και την τάση του νήματος.
- Γ. Το λόγο της στροφικής κινητικής ενέργειας προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια του σώματος, χωρίς να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο της ροπής αδράνειας του γιογιό.

- Δ. Τη σχέση που περιγράφει πώς μεταβάλλεται η στροφική κινητική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνονται: $g=10\text{m/s}^2$.

Εξετάσεις Εσπερινών 2007

- 15) Η ράβδος OA του σχήματος με μήκος $L = 1\text{ m}$ και μάζα $M = 6\text{ kg}$ είναι οριζόντια και περιστρέφεται υπό την επίδραση οριζόντιας δύναμης F που έχει σταθερό μέτρο και είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο, στο άκρο της A. Η περιστροφή γίνεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το O.



Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογιστούν:

- α. Η τιμή της δύναμης F , αν γνωρίζουμε ότι το έργο που έχει προσφέρει η δύναμη στη διάρκεια της πρώτης περιστροφής είναι $30\pi\text{ J}$.

- β. Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

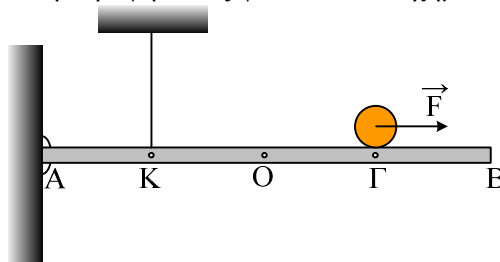
- γ. Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο στο τέλος της πρώτης περιστροφής.

Δίνονται: $G30\pi = 7,9$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο $I = 1\frac{1}{2}ML^2$.

Επαναληπτικές Εξετάσεις Ε.Λ. 2007

- 16) Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $L=4\text{m}$ και μάζας $M=2\text{kg}$ ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο A της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Σε σημείο K της ράβδου έχει προσδεθεί το ένα άκρο κατακόρυφου αβαρούς νήματος σταθερού μήκους, με το επάνω άκρο του συνδεδεμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Στο σημείο Γ ισορροπεί ομογενής σφαίρα μάζας $m=2,5\text{kg}$ και ακτίνας $r=0,2\text{m}$.

Δίνονται $AK = L/4$ και $AG = 3L/4$

- α. Να υπολογισθεί το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στη ράβδο.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκείται στο κέντρο μάζας της σφαίρας με κατάλληλο τρόπο, σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=7\text{N}$, με φορά προς το άκρο B. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

- β. Να υπολογισθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της σφαίρας κατά την κίνησή της.

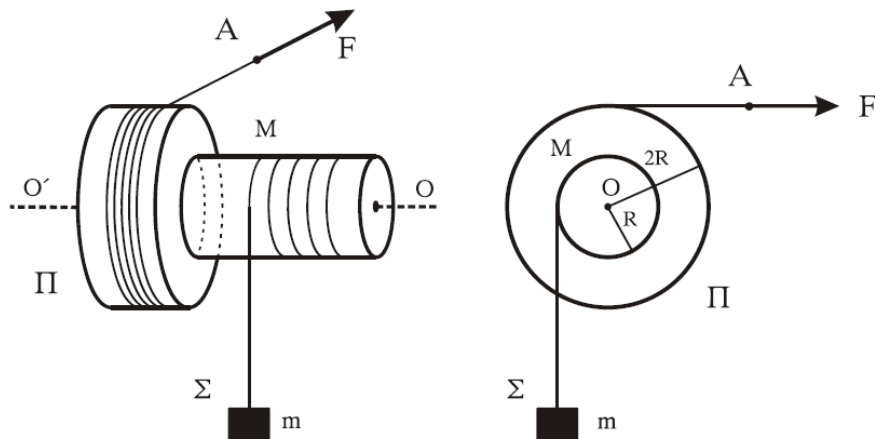
γ. Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν φθάσει στο άκρο Β.

δ. Να υπολογισθεί το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας όταν φθάσει στο άκρο Β.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας μάζας m ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I = \frac{2}{5}mr^2$ και $g=10 \text{ m/s}^2$.

Εξετάσεις ΓΕΛ 2008

- 17) Στερεό Π μάζας $M=10 \text{ kg}$ αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και $2R$, όπου $R=0,2 \text{ m}$ όπως στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=MR^2$. Το στερεό Π περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα $O'O$, που συμπίπτει με τον άξονά του. Το σώμα Σ μάζας $m=20 \text{ kg}$ κρέμεται από το ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας R . Γύρω από το τμήμα του στερεού Π με ακτίνα $2R$ είναι τυλιγμένο πολλές φορές νήμα, στο ελεύθερο άκρο A του οποίου μπορεί να ασκείται οριζόντια δύναμη F .



- α. Να βρείτε το μέτρο της αρχικής δύναμης F_0 που ασκείται στο ελεύθερο άκρο A του νήματος, ώστε το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα να παραμένει ακίνητο.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ που το σύστημα του σχήματος είναι ακίνητο, αυξάνουμε τη δύναμη ακαριαία έτσι ώστε να γίνει $F=115 \text{ N}$.

- β. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ .

Για τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ έχει ανέλθει κατά $h=2 \text{ m}$, να βρείτε:

- γ. Το μέτρο της στροφορμής του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής του.
 δ. Τη μετατόπιση του σημείου A από την αρχική του θέση.
 ε. Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του στερεού Π κατά τη μετατόπιση του σώματος Σ κατά h .

Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$.

Το συνολικό μήκος κάθε νήματος παραμένει σταθερό.

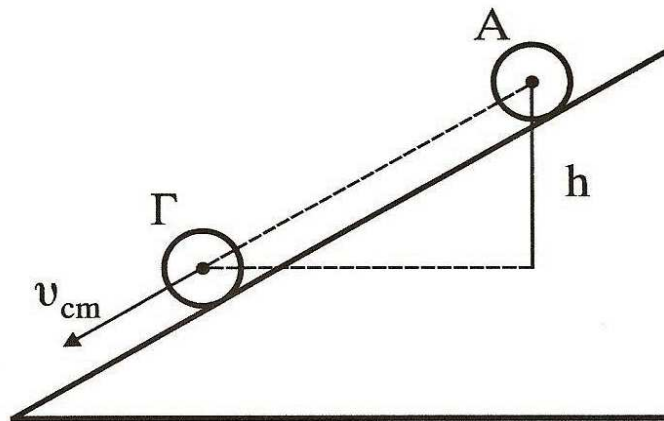
Εξετάσεις ΓΕΛ 2009

- 18) Ομογενής και συμπαγής κύλινδρος μάζας $m=5 \text{ Kg}$ και ακτίνας $R=0,2 \text{ m}$ αφήνεται από την ηρεμία (θέση A) να κυλήσει κατά μήκος πλάγιου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχή-

μα. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει .

Τη στιγμή που το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει κατακόρυφη μετατόπιση h

(θέση Γ), η ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι $v_{cm} = 8 \frac{m}{s}$.



Να υπολογίσετε:

- α. Τη γωνιακή ταχύτητα ω του κυλίνδρου στη θέση Γ.
- β. Τη στροφορμή του κυλίνδρου στη θέση Γ.
- γ. Την κατακόρυφη μετατόπιση h .
- δ. Τον λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου σε κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της κίνησής του.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2} mR^2$.

Εξετάσεις Εσπερινά 2009

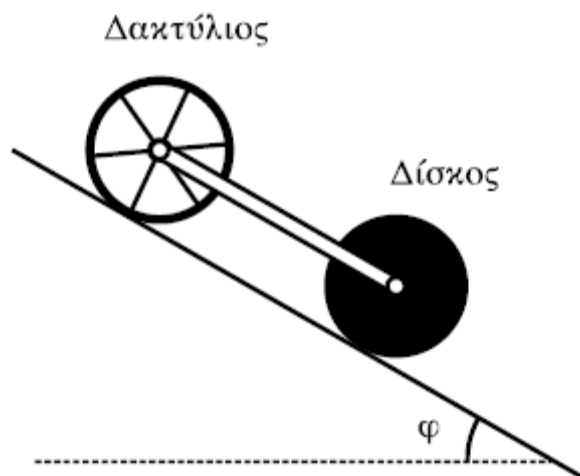
- 19) Θέλουμε να μετρήσουμε πειραματικά την άγνωστη ροπή αδράνειας δίσκου μάζας $m=2 \text{ kg}$ και ακτίνας $r=1 \text{ m}$. Για το σκοπό αυτό αφήνουμε τον δίσκο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi=30^\circ$ ξεκινώντας από την ηρεμία. Διαπιστώνουμε ότι ο δίσκος διανύει την απόσταση $x=2 \text{ m}$ σε χρόνο $t=1 \text{ s}$.

A1. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

A2. Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου αφήνονται να κυλίσουν ταυτόχρονα δίσκος και δακτύλιος ίδιας μάζας M και ίδιας ακτίνας R . Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι $I_1 = \frac{1}{2} MR^2$ και του δακτύλιου

$I_2 = MR^2$ ως προς τους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους και είναι κάθετα στα επίπεδά τους. Να υπολογίσετε ποιο από τα σώματα κινείται με τη μεγαλύτερη επιτάχυνση.

Συνδέουμε με κατάλληλο τρόπο τα κέντρα μάζας των δύο στερεών, όπως φαίνεται και στο σχήμα, με ράβδο αμελητέας μάζας, η οποία δεν εμποδίζει την περιστροφή τους και δεν ασκεί τριβές. Το σύστημα κυλίεται στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.



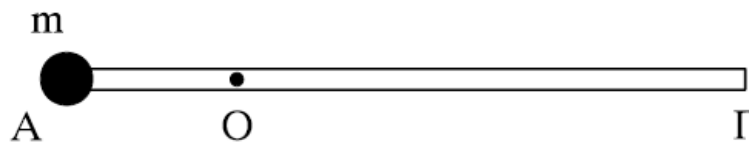
Δ3. Να υπολογίσετε το λόγο των κινητικών ενεργειών K_1/K_2 όπου K_1 η κινητική ενέργεια του δίσκου και K_2 η κινητική ενέργεια του δακτύλιου.

Δ4. Αν η μάζα κάθε στερεού είναι $M=1,4 \text{ kg}$, να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκεί η ράβδος σε κάθε σώμα. Μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και σχεδιάστε τις πιο πάνω δυνάμεις.

Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$, $\mu=30^\circ=\frac{1}{2}$.

Εξετάσεις ΓΕΛ 2010

20) Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους ℓ και μάζας M μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο χωρίς τριβές, ο οποίος διέρχεται από το σημείο Ο της ράβδου. Η απόσταση του σημείου Ο από το Α είναι 4ℓ . Στο άκρο Α της ράβδου στερεώνεται σημειακή μάζα m , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και δέχεται από τον άξονα δύναμη μέτρου $F = 20\text{N}$.

Δ1. Να υπολογιστούν οι μάζες m και M .

Στη συνέχεια τοποθετούμε τον άξονα περιστροφής της ράβδου στο άκρο Γ , ώστε να παραμένει οριζόντιος και κάθετος στη ράβδο, και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να περιστραφεί από την οριζόντια θέση. Να υπολογίσετε:

Δ2. το μήκος ℓ της ράβδου, αν τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη έχει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 3,75\text{rad/s}^2$.

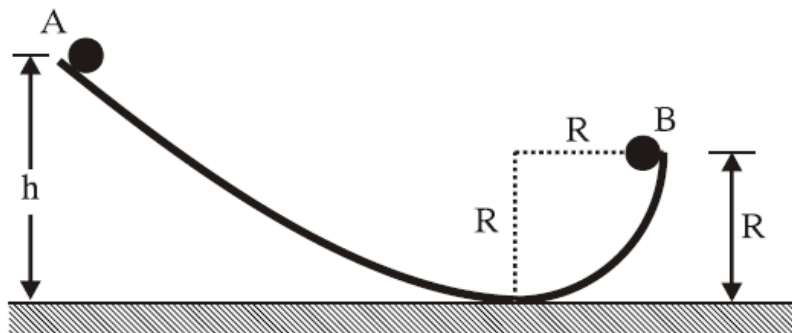
Δ3. το λόγο της κινητικής ενέργειας της μάζας m προς τη συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος, κατά τη διάρκεια της περιστροφής του συστήματος των δύο σωμάτων.

Δ4. το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των δύο σωμάτων, όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία ϕ ως προς την οριζόντια διεύθυνση τέτοια, ώστε $\eta\mu\phi = 0,3$.

Δίνονται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = 1/12M\ell^2$.

Επαναληπτικές ΓΕΑ 2010

- 21) Μια μικρή σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$, ακτίνας $r=0,02\text{m}$ και ροπής αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}}=2/5mr^2$, αφήνεται από το σημείο A που βρίσκεται σε ύψος $h=9\text{m}$ πάνω από το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Όταν η σφαίρα διέρχεται από το σημείο B του οδηγού, το οποίο απέχει απόσταση $R=2\text{m}$ από το οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε:

Δ1. τη ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο B και είναι παράλληλος προς τον άξονα περιστροφής της.

Δ2. το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας.

Δ3. το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Δ4. το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει το κέντρο μάζας της σφαίρας, από το σημείο B .

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

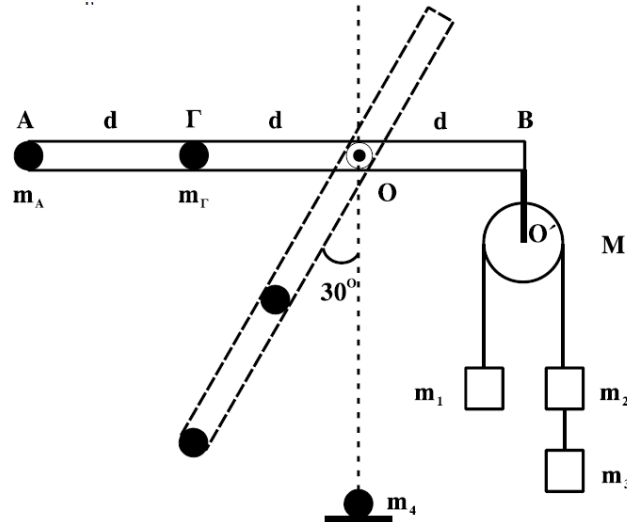
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10\text{m/s}^2$.

Ομογενείς 2010

- 22) Αβαρής ράβδος μήκους $3d$ ($d=1\text{m}$) μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το O . Στο άκρο A που βρίσκεται σε απόσταση $2d$ από το O υπάρχει σημειακή μάζα $m_A=1\text{ kg}$ και στο σημείο Γ , που βρίσκεται σε απόσταση d από το O έχουμε επίσης σημειακή μάζα $m_\Gamma=6\text{ kg}$. Στο άλλο άκρο της ράβδου, στο σημείο B , είναι αναρτημένη τροχαλία μάζας $M=4\text{ kg}$ από την οποία κρέγονται οι μάζες $m_1=2\text{ kg}$, $m_2=m_3=1\text{ kg}$. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα O' .

Δ1. Αποδείξτε ότι το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο στην οριζόντια θέση.

Κόβουμε το $O'B$, που συνδέει την τροχαλία με τη ράβδο στο σημείο B .



- Δ2.** Βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, όταν αυτή σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο.

Όταν η σημειακή μάζα m_A φτάνει στο κατώτατο σημείο, συγκρούεται πλαστικά με ακίνητη σημειακή μάζα $m_4=5\text{ kg}$.

- Δ3.** Βρείτε τη γραμμική ταχύτητα του σημείου A αμέσως μετά τη κρούση.

Στην αρχική διάταξη, όταν η τροχαλία με τα σώματα είναι δεμένη στο B , κόβουμε το νήμα που συνδέει μεταξύ τους τα σώματα m_2 και m_3 και αντικαθιστούμε την m_A με μάζα m .

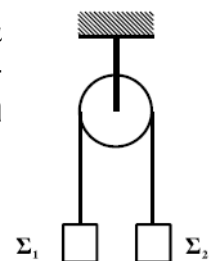
- Δ4.** Πόση πρέπει να είναι η μάζα m , ώστε η ράβδος να διατηρήσει την ισορροπία της κατά τη διάρκεια περιστροφής της τροχαλίας;

Τα νήματα είναι αβαρή, τριβές στους άξονες δεν υπάρχουν και το νήμα δεν ολισθαίνει στη τροχαλία.

Δίνεται: $g=10\text{ m/s}^2$, $\eta_{30^\circ}=1/2$, ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I=MR^2/2$.

Εξετάσεις ΓΕΛ 2011

- 23) Η τροχαλία του σχήματος είναι ομογενής με μάζα $m=4\text{ kg}$ και ακτίνα $R=0,5\text{m}$. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1=2\text{ kg}$ και $m_2=1\text{ kg}$ αντίστοιχα και βρίσκονται αρχικά ακίνητα στο ίδιο ύψος. Κάποια στιγμή ($t_0=0$) αφήνονται ελεύθερα.

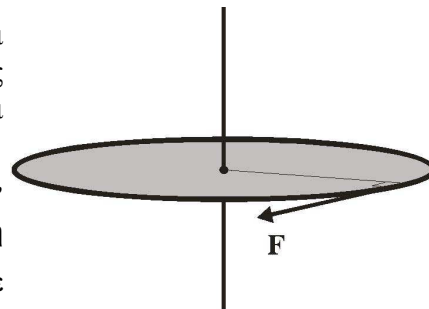


Να βρείτε:

- Δ1. Το μέτρο της επιτάχυνσης που θα αποκτήσουν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 .
 - Δ2. Τα μέτρα των τάσεων των νημάτων.
 - Δ3. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη στιγμή $t=2$ s.
 - Δ4. Την κινητική ενέργεια του συστήματος, τη στιγμή που το κάθε σώμα έχει μετατοπιστεί κατά $h=3$ m.
- Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I=1/2 mR^2$. Τα νήματα δεν ολισθαίνουν στην τροχαλία.

Εξετάσεις Εσπερινών 2011

- 24) Οριζόντιος ομογενής δίσκος με μάζα $M = 2\text{Kg}$ και ακτίνα $R = 0,5\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος αρχικά είναι ακίνητος. Κάποια στιγμή $t_0 = 0$, ασκείται σε σημείο της περιφέρειας του δίσκου δύναμη σταθερού μέτρου $F = 10\text{N}$, συνεχώς εφαπτόμενη σε αυτόν.

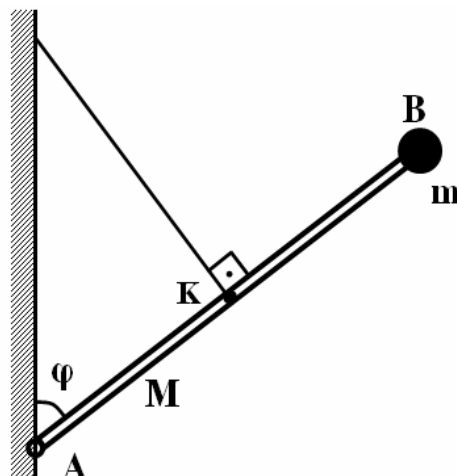


- i) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F από τη στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει γίνει $\omega = 8\text{rad/s}$.
- ii) Να υπολογίσετε τη γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος μέχρι εκείνη τη στιγμή.
- iii) Να υπολογίσετε την ισχύ της δύναμης F την ίδια στιγμή. Τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι $\omega = 8\text{rad/s}$, η δύναμη F καταργείται και ο δίσκος συνεχίζει να στρέφεται με την ταχύτητα αυτή. Από κάποιο ύψος αφήνεται να πέσει ένα κομμάτι λάσπης μάζας $m = 1\text{Kg}$ αμελητέων διαστάσεων, που κολλάει στον δίσκο σε σημείο της περιφέρειάς του.
- iv) Να υπολογίσετε τη νέα γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σύστημα δίσκος – λάσπη.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Επαναληπτικές Εσπερινών 2011

- 25) Μια ομογενής ράβδος AB που έχει μήκος $\ell=3\text{m}$ και μάζα $M=6\text{kg}$ έχει στο ένα άκρο της B μόνιμα στερεωμένο ένα σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m=1\text{kg}$. Η ράβδος στηρίζεται με το άλλο άκρο της A σε κατακόρυφο τοίχο μέσω άρθρωσης. Η ράβδος συγκρατείται σε θέση ισορροπίας, σχηματίζοντας γωνία φ με την κατακόρυφο, με νήμα το οποίο είναι συνδεδεμένο στον τοίχο και στο μέσο (K) της ρά-



βδου και είναι κάθετο σε αυτή, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογίσετε:

- i) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετος στη ράβδο.
- ii) Το μέτρο της τάσης του νήματος.

Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και η ράβδος μαζί με το σώμα αρχίζει να περιστρέφεται στο επίπεδο του σχήματος, χωρίς τριβές.

Να υπολογίσετε:

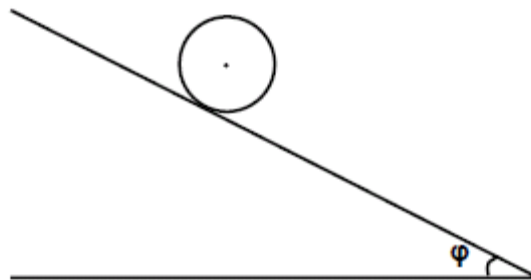
- iii) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου μόλις κοπεί το νήμα.
- iv) Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Β της ράβδου όταν αυτή γίνει οριζόντια για πρώτη φορά.

Δίνονται: $\sin\varphi=0,8$, $\eta\mu\varphi=0,6$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής

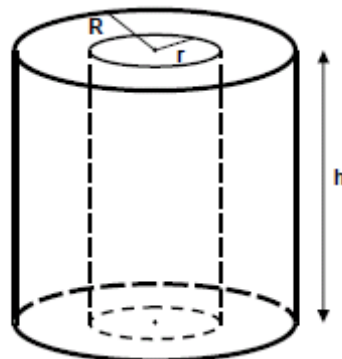
$$I_A = \frac{1}{3} M \ell^2 \text{ και η επιτάχυνση της βαρύτητας } g=10 \text{ m/s}^2.$$

Εξετάσεις ομογενών 2012

26) Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R . Αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ , όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



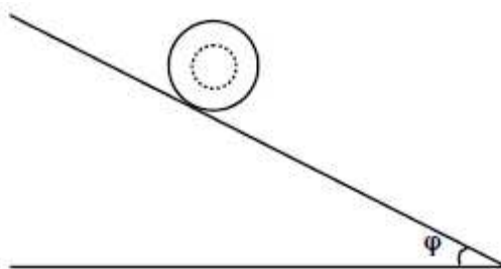
- i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Ο άξονας του κυλίνδρου διατηρείται οριζόντιος.
- ii) Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h , αφαιρούμε πλήρως ένα ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r , όπου $r < R$, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος, είναι:

$$I_{\text{κοιλ}} = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right)$$

Στη συνέχεια λιπαίνουμε το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και το επανατοποθετούμε στη θέση του, ούτως ώστε να εφαρμόζει απόλυτα με τον κοίλο κύλινδρο χωρίς τριβές. Το νέο σύστημα που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος.

iii) Όταν $r = \frac{R}{2}$, να υπολογίσετε, σε κάθε χρονική στιγμή της κύλισης στο κεκλιμένο επίπεδο, το λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος.

Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτί-

νας R , ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται: $I = \frac{1}{2} MR^2$

Ο όγκος V ενός συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h : $V = \pi R^2 \cdot h$.

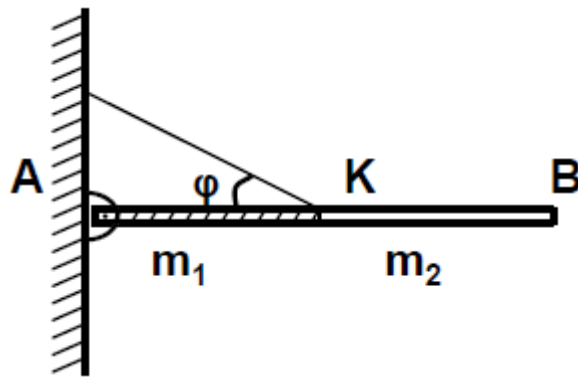
Εξετάσεις 2013

27) Μια ισοπαχής δοκός AB αποτελείται από δύο ομογενή τμήματα AK και KB , μήκους $\frac{L}{2}$ το

καθένα, με μάζες $m_1 = 5m_2$ και $m_2 = 0,5 \text{ kg}$, αντίστοιχα.

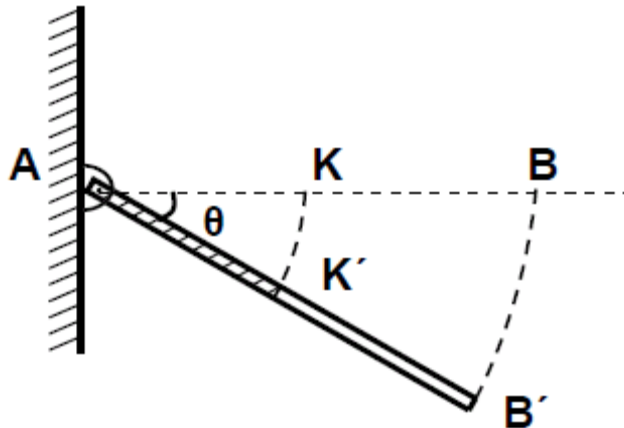
Τα κομμάτια αυτά είναι κολλημένα μεταξύ τους στο σημείο K , ώστε να σχηματίζουν τη δοκό AB μήκους $L = 1 \text{ m}$.

Η δοκός ισορροπεί σε οριζόντια θέση, με το άκρο της A να στηρίζεται στον τοίχο μέσω άρθρωσης, ενώ το μέσο της K συνδέεται με τον τοίχο με σχοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη δοκό.



- i) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σχοινί και την άρθρωση.

Κάποια στιγμή το σχοινί κόβεται και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το άκρο της A σε κατακόρυφο επίπεδο.



- ii) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου σε συνάρτηση με τη γωνία θ , που σχηματίζει αυτή με την αρχική της θέση ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$).

- iii) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του άκρου B' της ράβδου ($v_{B'}$) σε συνάρτηση με τη γωνία θ .

Τη στιγμή που η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = 30^\circ$, συγκρούεται πλαστικά με αρχικά ακίνητο σφαιρίδιο αμελητέων διαστάσεων και μάζας $m = m_2$, το οποίο σφηνώνεται στο μέσο K' της ράβδου.

- iv) Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση. Δίνονται:

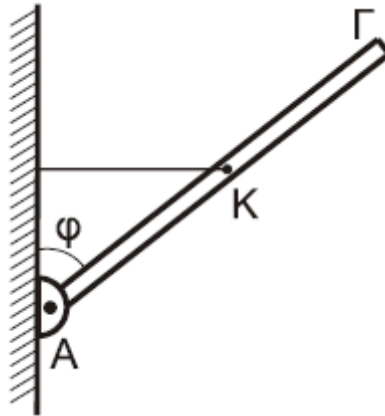
η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$,

ροπή αδράνειας ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας m και μήκους L ως προς άξονα κάθετο

στο μέσο της $I = \frac{1}{12} mL^2$,

Επαναληπτικές εξετάσεις 2013

67) Λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $\ell = 2\text{ m}$ και μάζας $M = 5,6\text{ kg}$ ισορροπεί με τη βοήθεια οριζόντιου νήματος, μη εκτατού, που συνδέεται στο μέσο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο.



Δίνεται: $\eta\mu\phi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\phi = 0,8$

i) Να υπολογίσετε τη δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

Μικρή ομογενής σφαίρα, μάζας $m = 0,4\text{ kg}$ και ακτίνας $r = \frac{1}{70}\text{ m}$ κυλίεται χωρίς ολίσθηση, έχοντας εκτοξευθεί κατά μήκος της ράβδου από το σημείο Κ προς το άκρο Γ.

ii) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας κατά την κίνησή της από το Κ μέχρι το Γ.

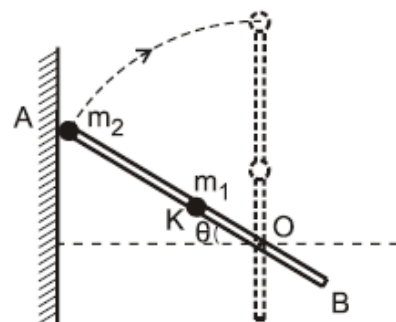
iii) Με δεδομένο ότι η σφαίρα φτάνει στο άκρο Γ, να βρείτε τη σχέση που περιγράφει την τάση του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση του σημείου επαφής της σφαίρας με τη ράβδο, από το σημείο Κ.

Αφού η σφαίρα έχει εγκαταλείψει τη ράβδο, κόβουμε το νήμα. Η ράβδος στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, χωρίς τριβές.

iv) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου στη θέση στην οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το άκρο Α, όπως στο παρακάτω σχήμα.

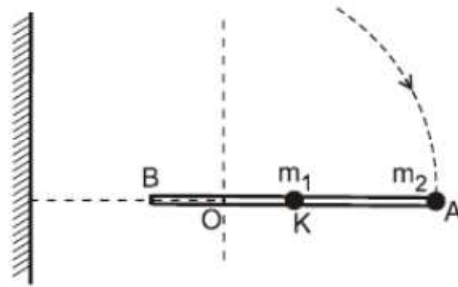
Εξετάσεις 2014

68) Λεπτή, άκαμπτη και ισοπαχής ράβδος ΑΒ μήκους $\ell = 1\text{ m}$ και μάζας $M = 3\text{ kg}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο Ο αυτής, είναι κάθετος στη ράβδο και απέχει από το άκρο της Β από-



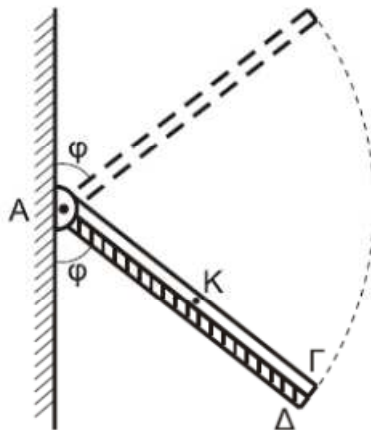
σταση $OB = d = \frac{\ell}{4}$. Στο μέσο K της ράβδου και στο άκρο της A στερεώνουμε δύο σφαιρίδια μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, όπου $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$. Δίνοντας κατάλληλη ώθηση το σύστημα περιστρέφεται και χτυπά σε κατακόρυφο τοίχο με το άκρο A , τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ , τέτοια ώστε $\sin \theta = 0,83$.

- Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_2 του συστήματος ράβδου-σφαιριδίων αμέσως μετά την κρούση, ώστε αυτό να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση.
- Κατά την κρούση με τον τοίχο, το ποσοστό απωλειών της κινητικής ενέργειας είναι το 75% της κινητικής ενέργειας του συστήματος ράβδου-σφαιριδίων πριν την κρούση. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του κατά την κρούση.
- Όταν το σύστημα ράβδου-σφαιριδίων περνά από την οριζόντια θέση για πρώτη φορά, να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου m_2 ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O



Δίνονται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \frac{m}{s^2}$, ρο-

πή αδράνειας I_{cm} λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή $I_{cm} = \frac{1}{12} M \ell^2$.



Δεύτερη λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους $\ell' = \ell$ και μάζας $M' = 3 M$ είναι αρθρωμένη και αυτή στο σημείο Α γύρω από τον ίδιο άξονα περιστροφής με την ράβδο ΑΓ. Η ράβδος ΑΔ συγκρατείται ακίνητη, με κατάλληλο μηχανισμό, σε θέση όπου σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Οι δύο ράβδοι συγκρούονται και ταυτόχρονα ο μηχανισμός ελευθερώνει τη ράβδο ΑΔ, χωρίς απώλεια ενέργειας. Οι ράβδοι μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα, χωρίς τριβές. Ο χρόνος της κρούσης θεωρείται αμελητέος.

- ν) Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

Όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Δίνονται :

Η ροπή αδράνειας I_p λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που

διέρχεται από το ένα της άκρο και είναι κάθετος σε αυτή: $I_p = \frac{1}{3} M\ell^2$

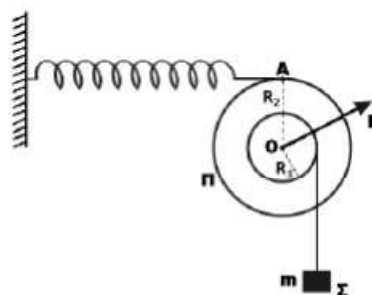
Η ροπή αδράνειας $I_{\sigma\varphi}$ ομογενούς σφαίρας μάζας m και ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται

από το κέντρο μάζας της: $I_{\sigma\varphi} = \frac{2}{5} mr^2$

$$g=10\text{m/s}^2$$

Επαναληπτικές εξετάσεις 2014

- 69) Δύο συγκολλημένοι ομοαξονικοί κύλινδροι με ακτίνες R_1 και $R_2 = 2R_1$ αποτελούν το στερεό Π του σχήματος. Το στερεό έχει μάζα $M = 25 \text{ kg}$, ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ και $R_1 = 0,2 \text{ m}$. Το στερεό μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονά του, χωρίς τριβές. Το σώμα Σ μάζας $m = 50 \text{ kg}$ κρέμεται από το ελεύθερο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος που είναι τυλιγμένο πολλές φορές στον κύλινδρο ακτίνας R_1 . Με τη βοήθεια οριζόντιου ελατηρίου το σύστημα ισορροπεί όπως στο Σχήμα 3..



Σχήμα 3

:

D1. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου.

A2. Να υπολογίσετε τη δύναμη F (μέτρο, κατεύθυνση) που ασκεί ο άξονας στο στερεό. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβεται το ελατήριο στο σημείο A και το στερεό αρχίζει να στρέφεται.

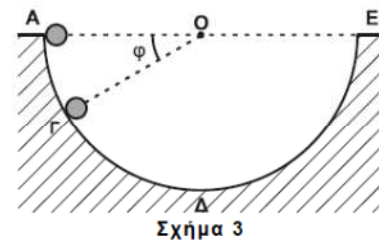
D3. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του στερεού.

D4. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού την χρονική στιγμή $t = 0,9 \text{ s}$.

Δίνονται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$

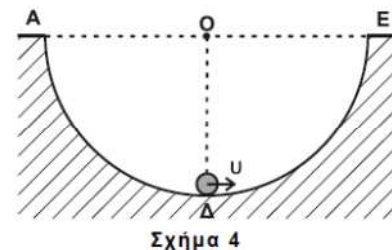
Εξετάσεις Ομογενών.

- 70) Από το εσωτερικό άκρο A ενός ημισφαιρίου ακτίνας $R = 1,6 \text{ m}$ αφήνεται να κυλήσει μία συμπαγής μικρή σφαίρα μάζας $m = 1,4 \text{ Kg}$ και ακτίνας $r = \frac{R}{8}$. Το ημισφαίριο είναι βυθισμένο στο έδαφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, και η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση.



- i) Να εκφράσετε τη στατική τριβή T_s που ασκείται στη σφαίρα σε συνάρτηση με το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει η ακτίνα $ΟΓ$ του ημισφαιρίου με την ευθεία $ΑΕ$ της επιφάνειας του εδάφους.
- ii) Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στη σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο Γ όπου $\varphi = 30^\circ$ (Σχήμα 3).

Μια άλλη σφαίρα, όμοια με την προηγούμενη, εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο Δ του ημισφαιρίου με ταχύτητα $v = 6 \text{ m/s}$ και κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό του με κατεύθυνση το άκρο E (Σχήμα 4).



- iii) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια του εδάφους που θα φτάσει η σφαίρα κατά την κίνησή της.
- iv) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας (μονάδες 4) και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας (μονάδες 2), αμέσως μόλις αυτή χάσει την επαφή με την επιφάνεια του ημισφαιρίου στο σημείο E .

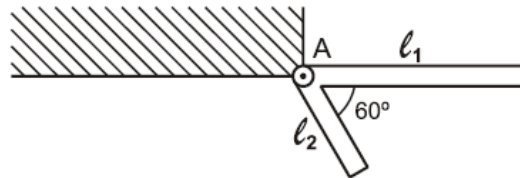
Δίνονται: ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας

$$I_{CM} = \frac{2}{5} m r^2 \text{ και η επιτάχυνση της βαρύτητας } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Εξετάσεις 2015.

- 71) Δύο ράβδοι είναι συνδεδεμένες στο άκρο τους A και σχηματίζουν σταθερή γωνία 60° μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7**. Οι ράβδοι είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά

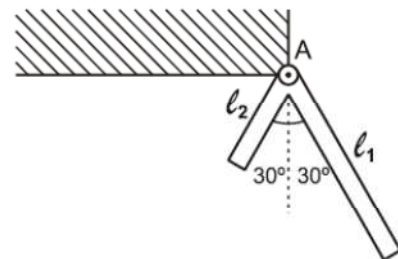
κάθε μία είναι ομογενής. Το σύστημα των δύο ράβδων μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άρθρωση, που είναι στερεωμένη σε τοίχο, στο άκρο Α, χωρίς τριβές. Το σύστημα αφήνεται να περιστραφεί υπό την επίδραση της βαρύτητας από τη θέση του **Σχήματος 7**, όπου η ράβδος ℓ_1 είναι οριζόντια, με αρχική ταχύτητα μηδέν.



Σχήμα 7

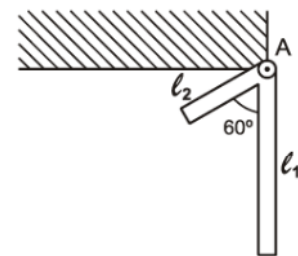
Δίνεται ότι τα μήκη των δύο ράβδων είναι $\ell_1 = 4\text{m}$ και $\ell_2 = 2\text{m}$, ενώ η μάζα της ράβδου ℓ_2 είναι $m_2 = 10\text{kg}$.

- i) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 της ράβδου μήκους ℓ_1 , εάν το σύστημα αποκτά τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή που οι δύο ράβδοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 8**.



Σχήμα 8

- ii) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 της ράβδου μήκους ℓ_1 , εάν το σύστημα σταματά στιγμιαία, όταν η ράβδος μήκους ℓ_1 φτάνει στην κατακόρυφη θέση που φαίνεται στο **Σχήμα 9**.
- iii) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος των δύο ράβδων του ερωτήματος Γ2 στη θέση που απεικονίζεται στο **Σχήμα 9**.



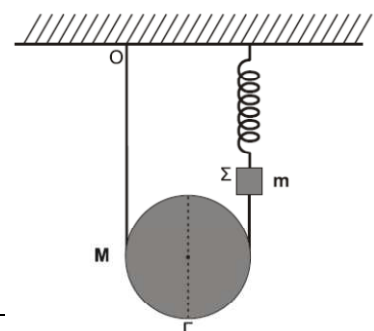
Σχήμα 9

- iv) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου μήκους ℓ_2 του ερωτήματος Γ2 στη θέση που απεικονίζεται στο **Σχήμα 9**.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, η ροπή αδρανείας ράβδου μήκους ℓ και μάζας m που περιστρέφεται γύρω από το άκρο της Α, $I_A = \frac{1}{3} m\ell^2$, και ότι $\sqrt{3}=1,7$ (προσεγγιστικά).

Επαναληπτικές εξετάσεις 2015

- 72) Ομογενής τροχαλία ισορροπεί έχοντας το νήμα τυλιγμένο γύρω της πολλές φορές. Η μία άκρη του νήματος είναι στερεωμένη στην οροφή Ο και η άλλη στο σώμα Σ, το οποίο ισορροπεί κρεμασμένο από κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς



Σχήμα 10

$K=40\text{N/m}$, που είναι στερεωμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 10**.

Η μάζα της τροχαλίας είναι $M=1,6\text{kg}$, η ακτίνα της $R=0,2\text{m}$. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό της και ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας, της δίνεται από τη σχέση $I=\frac{1}{2}MR^2$.

Το σώμα Σ θεωρείται σημειακό αντικείμενο μάζας $m=1,44\text{kg}$. Το νήμα και το ελατήριο έχουν αμελητέες μάζες.

i) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ .

Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει την τροχαλία με το σώμα Σ , και το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος Σ , για πρώτη φορά, το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση h . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

ii) Να υπολογίσετε την κατακόρυφη μετατόπιση h της τροχαλίας.

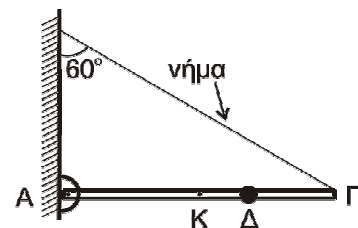
iii) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ότι η τιμή $t=0\text{s}$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που κόπηκε το νήμα και ότι η φορά απομάκρυνσης του σώματος Σ προς τα πάνω είναι θετική.

iv) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κάτω άκρου Γ της τροχαλίας, όταν το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση h .

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, $\pi=\sqrt{10}$ και $\pi^2=10$ (προσεγγιστικά).

Επαναληπτικές 2015

73) Ομογενής δοκός $ΑΓ$ με μήκος $\ell = 3\text{ m}$ και μάζα $M = 6\text{ kg}$ φέρει σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m = 3\text{ kg}$ στη θέση Δ , για την οποία ισχύει $(\Delta\Gamma) = \ell / 3$. Η δοκός στηρίζεται με το άκρο της A σε κατακόρυφο τοίχο μέσω άρθρωσης. Το άκρο Γ της ράβδου συνδέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα, που σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με τον κατακόρυφο τοίχο και το σύστημα δοκός – σώμα ισορροπεί σε οριζόντια θέση.



Δ1. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος δοκός-σώμα, ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο A και είναι κάθετος στο επίπεδο του.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση.

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σύστημα αρχίζει να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο A της ράβδου.

Δ3. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta = 60^\circ$ με την αρχική οριζόντια θέση της.

Δ4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα v του σώματος μάζας m τη στιγμή που το σύστημα δοκός-σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται:

- η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο $I_{CM} = M\ell^2/12$

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $\sin 60^\circ = 1/2$, $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Εξετάσεις Ομογενών 2015