Ο συνεφαπτόμενος κύκλος και η διδασκαλία της επίπεδης καμπυλόγραμμης κίνησης
(Από τον «circulus osculans» στην κεντρομόλο και επιτρόχιο επιτάχυνση)

Η διδασκαλία της επίπεδης καμπυλόγραμμης κίνησης στη Λυκειακή φυσική σχετίζεται με την παρουσίαση της οριζόντιας βολής στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης και της «ομαλής» κυκλικής κίνησης. Οι δύο αυτές κινήσεις παρουσιάζονται χωρίς καμία προηγούμενη αναφορά στην καμπυλόγραμμη κίνηση και στα χαρακτηριστικά της. Εύλογα λοιπόν ο μαθητής αποκομίζει την εντύπωση ότι έννοιες όπως η κεντρομόλος δύναμη και επιτάχύνση (οι έννοιες της επιτρόχιας δύναμης και επιτάχυνσης δεν διδάσκονται) αφορούν αποκλειστικά την κυκλική κίνηση.
Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να αναδείξουμε το λόγο για τον οποίο οι έννοιες αυτές αφορούν κάθε καμπυλόγραμμη κίνηση. Επιλέξαμε να προσεγγίσουμε το θέμα με βάση την εργασία ενός εκ των γιγάντων της επιστημονικής σκέψης του 17^{ου} αιώνα, η οποία παρουσιάστηκε πριν την ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού και τη διατύπωση φυσικών μεγεθών, όπως η επιτάχυνση και στηρίζεται σε προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο λόγος δεν είναι μόνο ο θαυμασμός για τον τρόπο που παρουσιάστηκε η εργασία αυτή, αλλά και η συσχέτιση των συμπερασμάτων στα οποία αυτή καταλήγει με τη διδασκαλία της καμπυλόγραμμης κίνησης στα πλαίσια της Λυκειακής φυσικής και σε μαθητές που δεν έχουν γνώσεις διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Ο 17^{ος} αιώνας βρίσκει την Ολλανδία να αποτελεί Ευρωπαϊκό κέντρο πολιτισμού, εμπορίου και θρησκευτικής ανοχής. Προσωπικότητες όπως, ο Harmenszoon van rijn Rembrandt (1606-1669), ο Benedict de Spinoza (1632-1677) και ο René Descartes (1596-1650) έζησαν και παρήγαγαν το έργο τους σε μια εποχή που η Ολλανδία αποτελούσε και το κυρίαρχο Ευρωπαϊκό τυπογραφικό κέντρο καθώς στα πιεστήρια του Άμστρερνταμ, του Ρόττερνταμ, του Λέϊντεν και της Ουτρέχτης εκδίδονται βιβλία στις σύγχρονες αλλά και στις κλασικές γλώσσες. Μέσα σ' αυτό το περιβάλλον γεννήθηκε ο Christian Huygens (1629-1695) γιος εξέχοντος πολιτικού και διπλωμάτη.
Ο νεαρός Huygens έδειξε από νωρίς το ενδιαφέρον του για την αστρονομία με την ενασχόλησή του στη βελτίωση των μεθόδων λείανσης των φακών των τηλεσκοπίων και τις σημαντικές ανακαλύψεις του για τους δακτυλίους του Κρόνου.
Κατά τη διάρκεια μιας επίσκεψής στο Παρίσι το 1655 άρχισε να μελετά πιθανότητες και το 1657 εξέδωσε το βιβλίο "De Ratiocinis in Aleae Ludo"(=Περί των υπολογισμών των Παιγνίων τύχης).Μετά από πρόσκληση του Jean-Baptiste Colbert(1619-1683), υπουργού οικονομικών του βασιλιά Louis(Λουδοβίκου)14^{ου} (1638-1715), μετακινήθηκε στο Παρίσι ως μέλος της νεοσύστατης από τον Colbert "Ακαδημίας των επιστημών" , όπου και παρέμεινε για 15 χρόνια.
Αυτή η περίοδος της ζωής του είναι επιστημονικά εξόχως παραγωγική, αφού διατυπώνει μια αρχή για τη διατήρηση της ενέργειας κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων και προσδιορίζει σωστά την κεντρομόλο δύναμη σ΄ ένα σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση. Η αυξανόμενη θρησκευτική μισαλλοδοξία για τους Προτεστάντες στο Παρίσι εκείνης της εποχής τον αναγκάζει να επιστρέψει στη Χάγη το 1681.
Αργότερα, το 1690 εκδίδει το έργο του "Traité de la Lumière"(=Πραγματεία για το φως) στην οποία προτείνει μια κυματική θεωρία του φωτός. Μετά τον θάνατό του εκδίδεται το τελευταίο του έργο "Cosmotheoros" που αποτελεί μια σύνοψη όσων ήταν γνωστά για το σύμπαν εκείνη την εποχή.
Είναι πολύ συνηθισμένο στην ιστορία της επιστήμης η ανάγκη να λυθεί ένα πρακτικό πρόβλημα να οδηγεί σε αναπάντεχες επιστημονικές ανακαλύψεις. Αυτή τη

φορά το κίνητρο ήταν η ανάγκη να βρεθεί ένας τρόπος ώστε τα πληρώματα των πλοίων να μετρούν το Γεωγραφικό Μήκος καθώς ταξίδευαν στις ανοικτές θάλασσες (=high seas= Διεθνή ύδατα).

Στο αποκορύφωμα της εμπνευσμένης δημιουργικότητάς του το 1659 ο Huygens αναπτύσσει ένα εκκρεμές ρολόι το οποίο θεωρητικά μετράει(κρατάει) σωστά το χρόνο. Το απλό εκκρεμές δεν ήταν ακριβές στη μέτρηση του χρόνου καθώς ο χρόνος για μια ταλάντωση εξαρτάται από το πλάτος της αιώρησης. Η εκπληκτική ιδέα του Huygens έχει να κάνει με την ανακάλυψη μιας καμπύλης πάνω στην οποία όταν ταλαντώνεται το βαρίδι του εκκρεμούς, ο χρόνος ταλάντωσης δεν εξαρτάται από το πλάτος της αιώρησης. Η ιστορία της επιστήμης πιστώνει στον Ολλανδό εφευρέτη την ανακάλυψη του εκκρεμούς, αλλά η Φυσική χρωστάει στον Huygens το ισόχρονο εκκρεμές, δηλαδή εκείνο τον ειδικό τύπο εκκρεμούς που έχει τη μαθηματική ιδιότητα να κρατάει ακριβώς το χρόνο. Ο Ολλανδός επιστήμονας εξέδωσε τα ευρήματά του στο μεγάλο έργο του με τίτλο "Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrations geometricae"(Το εκκρεμές ρολόϊ ή γεωμετρικές παρουσιάσεις που αφορούν στην κίνηση των εκκρεμών όπως εφαρμόζονται στα ρολόγια) στο Παρίσι το 1673 με την άδεια και αποδοχή του Λουδοβίκου 14^{ου}. Ο ίδιος ο Huygens γράφει:

«*Το απλό εκκρεμές δεν παρέχει εκ της φύσεως του μια ακριβή μέτρηση του χρόνου, αφού οι ευρύτερες κινήσεις του παρατηρείται να είναι βραδύτερες από τις στενότερες. Αλλά με μια γεωμετρική μέθοδο έχουμε βρει ένα διαφορετικό και άγνωστο προηγουμένως τρόπο ανάρτησης του εκκρεμούς και έχουμε ανακαλύψει μια γραμμή της οποίας η καμπυλότητα είναι θαυμαστά και εντελώς λογικά κατάλληλη για να δώσει την απαιτούμενη ισότητα στο εκκρεμές. Μετά την εφαρμογή αυτής της γραμμής στα ρολόγια, έχουμε βρει ότι η κίνησή τους είναι τόσο ακριβής και στην ξηρά και στη θάλασσα, που είναι τώρα φανερό ότι αυτά είναι πολύ χρήσιμα για ανακαλύψεις στην αστρονομία και την τέχνη της ναυσιπλοΐας…*»

Μια τέτοια καμπύλη περιγράφεται ως *ισόχρονη* ή *ταυτόχρονη* καθώς και οι δύο όροι αναφέρονται στην ιδιότητα που έχει το βαρίδι του εκκρεμούς να πλησιάζει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του στον ίδιο χρόνο κάθε φορά ανεξάρτητα από το πλάτος της αιώρησης. Η ίδια καμπύλη αποτελεί και τη "βραχιστόχρονη" καμπύλη, δηλαδή την καμπύλη πάνω στην οποία πρέπει να κινηθεί ένα σώμα υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας, ώστε να μετακινηθεί μεταξύ δύο σημείων, που ανήκουν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, στον ελάχιστο χρόνο. Ο Huygens έδειξε ότι το σχήμα αυτής της καμπύλης που έχει την ιδιότητα του «ταυτόχρονου» είναι το σχήμα εκείνης της καμπύλης που ονομάζεται κυκλοειδές και η οποία μελετήθηκε έντονα κατά τον 17^{ο} αιώνα και ανεξάρτητα από τη σχέση της με το συγκεκριμένο θέμα. Επιστήμονες όπως οι Galileo, Torricelli, Mersenne, Roberval, Fermat, Descartes, Pascal ασχολήθηκαν με το κυκλοειδές χωρίς να ανακαλύψουν την ιδιότητα του ισόχρονου.

Παρά το γεγονός ότι αυτός ο τύπος εκκρεμούς δεν έδωσε αξιόπιστα αποτελέσματα στην ακριβή μέτρηση του χρόνου σε σχέση με το πρόβλημα του υπολογισμού του Γεωγραφικού Μήκους στην ναυσιπλοΐα, έδωσε πολύ σημαντικές τεχνικές για τη μελέτη των επίπεδων καμπυλών και πιο συγκεκριμένα στον υπολογισμό του **κύκλου καμπυλότητας** (**osculating circle** ή "kissing circle", όρος που θα εξηγηθεί στη συνέχεια) και της **ακτίνας καμπυλότητας**. Εφόσον η εφαπτομένη είναι η ευθεία γραμμή που προσεγγίζει με τον καλλίτερο τρόπο μια καμπύλη σ' ένα σημείο της, ο καλλίτερος κύκλος για να προσεγγιστεί η καμπύλη στο σημείο αυτό θα ήταν ο κύκλος που έχει την ίδια εφαπτομένη μ' αυτήν στο σημείο αυτό. Αν εξαιρέσουμε τις εκφυλισμένες καμπύλες που είναι οι ευθείες σε κάθε σημείο μιας συγκεκριμένης καμπύλης ο κύκλος αυτός είναι μοναδικός και το κέντρο του ονομάζεται **κέντρο**

καμπυλότητας της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο και η ακτίνα του αποτελεί την **ακτίνα καμπυλότητας** της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο. Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων καμπυλότητας που αντιστοιχούν στα σημεία της καμπύλης σχηματίζει αυτό που ο Huygens ονόμασε **evolutus**(=**evolute**=**εξειλιγμένη**) της αρχικής καμπύλης. Η αρχική καμπύλη ονομάζεται **ενειλιγμένη**(=**involute**).Το κυκλοειδές είναι η μοναδική καμπύλη της οποίας η εξειλιγμένη είναι επίσης ένα όμοιο κυκλοειδές. Στην περίπτωση του κύκλου η εξειλιγμένη εκφυλίζεται σ' ένα σημείο, το κέντρο του κύκλου. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το θέμα της καμπυλότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι αρχίζει από την εργασία του Απολλώνιου (250-175π.Χ) για την περιβάλλουσα των καθέτων που φέρονται στα σημεία μιας κωνικής τομής. Η επιτυχία του Απολλώνιου όμως σχετίζεται με τη μελέτη και τις εφαρμογές των κωνικών τομών και όχι με το πώς "κάμπτεται" μια επίπεδη καμπύλη.
Με έναν καταπληκτικό τρόπο που στηρίζεται σε καθαρά γεωμετρικούς όρους και αποδείξεις που διατυπώνονται χωρίς τη χρήση παραγώγων και εξισώσεων, ο Huygens έφθασε στην περιγραφή της ακτίνας καμπυλότητας, πριν την ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού από τους Newton και Leibniz. Χρησιμοποίησε την ιδέα της εφαπτομένης γραμμής που κυριαρχούσε στη μαθηματική κουλτούρα της εποχής του και εκμεταλλεύθηκε αυτό που στις μέρες μας αποκαλούμε σταθερή επιτάχυνση στην ελεύθερη πτώση. Δεδομένου ότι η έννοια της επιτάχυνσης δεν είχε διατυπωθεί ακόμη, διατύπωσε την έννοια της σταθερής επιτάχυνσης στο δεύτερο μέρος του "Horologium oscillatorium" με τίτλο "Σχετικά με την κάθοδο των κινούμενων σωμάτων και την κίνησή τους σε κυκλοειδές". Μετά από τρεις υποθέσεις ακολουθεί η Πρόταση Ι, η οποία παρατίθεται από το πρωτότυπο:
I.Εάν δεν υπάρχει βαρύτητα και ο αέρας δεν ασκεί αντίσταση στην κίνηση των σωμάτων, τότε αυτά τα σώματα μπορούν να εκτελούν μια μόνο κίνηση η οποία συνεχίζεται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής.
II.Τώρα που η κίνηση πραγματικά γίνεται με την επίδραση της βαρύτητας και για οποιαδήποτε κατεύθυνση της ενιαίας κίνησης, μια κίνηση συντίθεται από μια σταθερή κίνηση την οποία το σώμα τώρα έχει ή είχε προηγουμένως, μαζί με την κίνηση προς τα κάτω λόγω βαρύτητας.
III.Επίσης, η κάθε μια από αυτές μπορεί να θεωρηθεί χωριστά, καμία δεν εμποδίζεται από την άλλη.

PROPOSITIO I.

ÆQualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accreſcere, & ſpatia æqualibus temporibus ab initio deſcenſus emenſa, augeri continue æquali exceſſu.

" Για να ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα, συμβαίνουν ίσες αυξήσεις στην ταχύτητα σε ίσα χρονικά διαστήματα, και οι αποστάσεις που διανύονται σε ίσα χρονικά διαστήματα, όταν μετριούνται από το σημείο που αρχίζει η πτώση, αυξάνονται συνεχώς κατά ίσες ποσότητες."

Κάποιο σώμα τοποθετείται στο σημείο A και αφήνεται από την ηρεμία, καθώς πέφτει στο πρώτο χρονικό διάστημα διανύει απόσταση AB, και όταν φτάνει στο B, έχει αποκτήσει μια ταχύτητα με την οποία στη συνέχεια θα διάνυε κάποια απόσταση BD στη διάρκεια του δεύτερου χρονικού διαστήματος, με αυτή τη σταθερή κίνηση. Όμως εμείς γνωρίζουμε ότι η απόσταση που θα διανύσει στο δεύτερο χρονικό διάστημα είναι μεγαλύτερη από την απόσταση BD εφόσον αναιρέσαμε τη δράση της βαρύτητας καθώς διανύεται η απόσταση BD. Πραγματικά η απόσταση βρίσκεται

από δύο μέρη της κίνησης. Από την ομαλή συνιστώσα που αποκτά κατά το ταξίδι του την απόσταση BD και από την κίνηση λόγω της πτώσης του σώματος η οποία από αναγκαιότητα αυξάνεται κατά μία ποσότητα ίση με AB. Όμως εμείς γνωρίζουμε ότι στη διάρκεια του δεύτερου χρονικού διαστήματος , το σώμα φτάνει στο E το οποίο είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων BD και DE (που είναι ίση με AB).

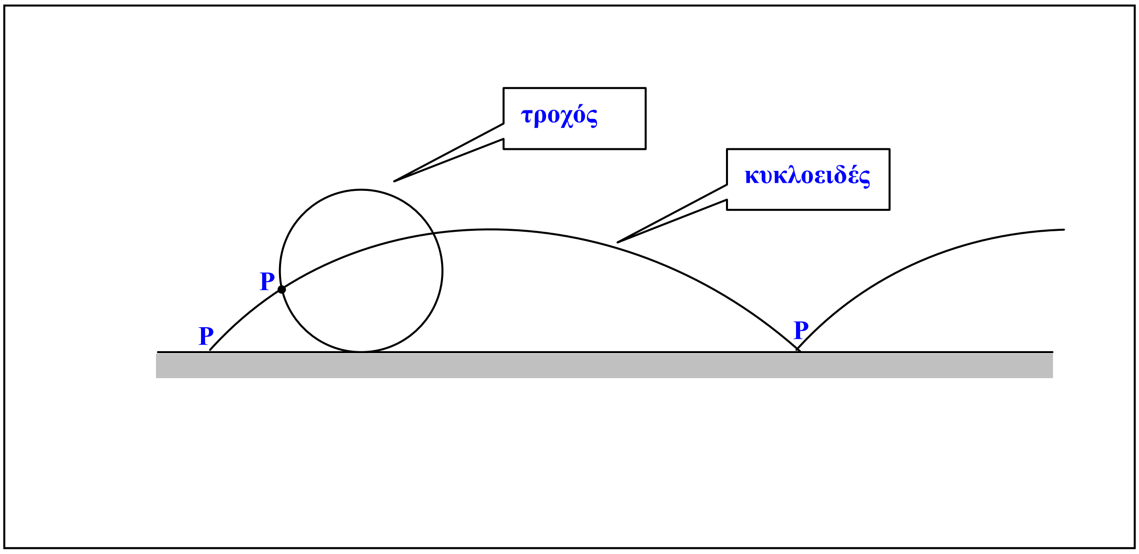
Πραγματικά σε σχέση με την ταχύτητα με την οποία το σώμα θα φτάσει στο E, στο τέλος του δεύτερου χρονικού διαστήματος βρίσκουμε ότι θα είναι 2 φορές η ταχύτητα που αυτό είχε στο B στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος. Πράγματι εμείς έχουμε πει ότι το σώμα πρόκειται να κινηθεί με μία κίνηση που συντίθεται από δύο μέρη, από τη σταθερή κίνηση που αποκτάται στο B και από την αλλαγή στην κίνηση που παράγεται από τη βαρύτητα, η οποία αλλαγή στο τέλος του δεύτερου χρονικού διαστήματος θα είναι σαφώς η ίδια όπως στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος, με την ιδέα ότι κατά τη διάρκεια του δεύτερου χρονικού διαστήματος, η ταχύτητα του σώματος έχει αυξηθεί κατά την ίδια ποσότητα όπως και στο πρώτο χρονικό διάστημα. Όμως, με την ταχύτητα που αποκτήθηκε στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος να έχει διατηρηθεί αμετάβλητη, εμφανίζεται ότι η ταχύτητα στο τέλος του δεύτερου χρονικού διαστήματος να μην είναι τίποτα άλλο από δύο φορές την ταχύτητα που αποκτήθηκε στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος ή διπλάσια από αυτή την ταχύτητα.

Όμως τώρα, αφότου το σώμα φτάνει στο E, εάν στο εξής θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα της τιμής της οποίας είχε αποκτήσει, φαίνεται ότι στο τρίτο χρονικό διάστημα, ίσο σε διάρκεια με τα προηγούμενα, αυτό θα διανύει μια απόσταση ίση με EF, η οποία θα είναι διπλάσια από την απόσταση BD, διότι έχουμε πει ότι BD πρόκειται να διανυθεί με το μισό αυτής της ταχύτητας, με μια σταθερή κίνηση, και για ίση χρονική διάρκεια. Αλλά πάλι προσθέτοντας τη δράση της βαρύτητας, για το σώμα που ταξιδεύει στο τρίτο χρονικό διάστημα, εκτός από την απόσταση EF υπάρχει επίσης η απόσταση FG από μόνη της ίση με την AB ή BE. Έτσι στο τέλος του τρίτου χρονικού διαστήματος το σώμα φτάνει στο G. Πραγματικά η ταχύτητα θα είναι εδώ τριπλάσια από αυτήν την οποία το σώμα είχε στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος στο B: εφόσον εκτός από την ταχύτητα που αποκτήθηκε στο E η οποία όπως εμείς είπαμε ήταν διπλάσια από την ταχύτητα στο B, η δύναμης της βαρύτητας κατά την κάθοδο στο τρίτο χρονικό διάστημα, πάλι συνεισφέρει μια αύξηση στην ταχύτητα ίση με αυτή στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος. Λαμβάνοντας υπόψη αυτήν και οι άλλες ταχύτητες που αποκτώνται, στο τέλος του τρίτου χρονικού διαστήματος, η ταχύτητα συμφωνείται να είναι τρεις φορές αυτή που ήταν στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος.

Με τον ίδιο τρόπο εμείς μπορούμε να δείξουμε ότι όταν το τέταρτο χρονικό διάστημα έχει τελειώσει και η απόσταση GH θα είναι τρεις φορές η απόσταση BD και η απόσταση HK θα είναι ίση με την AB: και η ταχύτητα στο K στο τέλος του τέταρτου χρονικού διαστήματος θα είναι τέσσερις φορές αυτή που είχε στο B, στο τέλος του πρώτου χρονικού διαστήματος. Έτσι, για οποιεσδήποτε αποστάσεις θεωρήσουμε διαδοχικά, οι οποίες διανύονται σε ίσα χρονικά διαστήματα, για την κάθε μία έχει αποδειχτεί να αυξάνεται στη σειρά κατά μία αύξηση ίση με την απόσταση BD, και ομοίως επίσης οι ταχύτητες να αυξάνονται ίσα σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Η ιδέα αυτή υπάρχει βέβαια διατυπωμένη από τον Galileo Galilei στο έργο του “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a duo nuove scienze”(=Διάλογοι σχετικά με δύο νέες επιστήμες) (1638), καθώς αυτός ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να κατασκευάσει εκκρεμές.

Ας παρακολουθήσουμε τη διαδικασία από την αρχή. Το κυκλοειδές είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός τροχού που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε μια επίπεδη επιφάνεια. **(Σχήμα 1)**

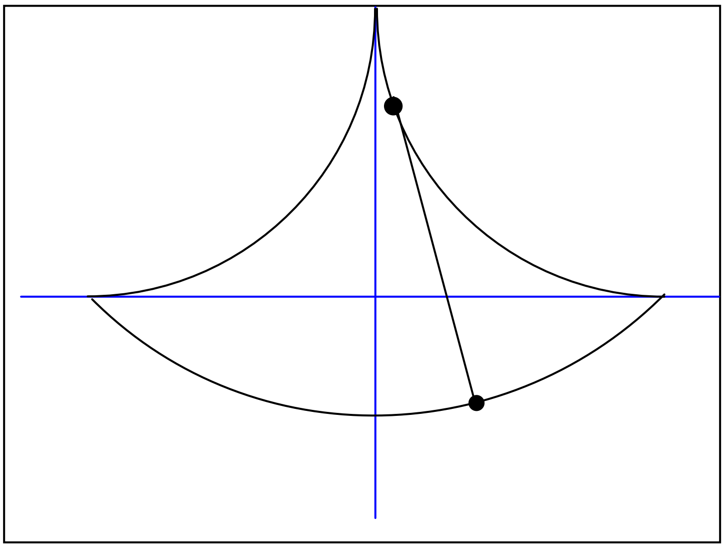


(Σχήμα 1)

Σε σχέση με τη χρήση της κυκλοειδούς καμπύλης στην κίνηση του εκκρεμούς μπορούμε να την θεωρήσουμε αντεστραμμένη **(Σχήμα 2)**. Αυτό το αντεστραμμένο κυκλοειδές αποτελεί την τροχιά που διαγράφει το βαρίδι του εκκρεμούς.

Τα προβλήματα όμως δεν τελείωσαν με τον προσδιορισμό της ισόχρονης καμπύλης, αφού το βαρίδι έπρεπε να "εξαναγκαστεί" να παραμείνει πάνω σ' αυτήν την τροχιά. Ο ιδιοφυής Ολλανδός έλυσε το πρόβλημα τοποθετώντας δύο μεταλλικές ή ξύλινες πλάκες - σιαγόνες στο σημείο εξάρτησης του εκκρεμούς ώστε, όταν το νήμα να τυλίγεται σ' αυτές, όταν ανέρχεται και να ξετυλίγεται από αυτές, όταν κατέρχεται.

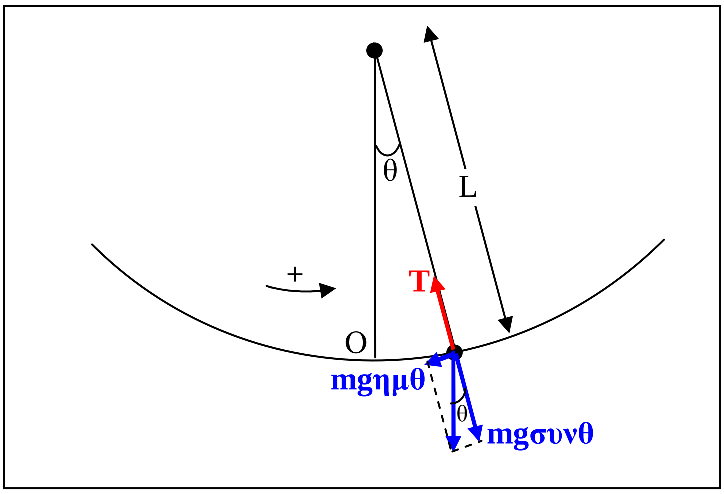
Έτσι το βαρίδι εξαναγκαζόταν να κινηθεί σε μια τροχιά που διέφερε από την τέλεια κυκλική. Το ένα πρόβλημα όμως οδηγεί στο άλλο και το ερώτημα τώρα ήταν πιο θα ήταν το σχήμα των δύο σιαγόνων. Με σύγχρονους όρους αυτό αποτελεί ένα πρόβλημα μαθηματικής φυσικής. Αυτό που ο Huygens ονόμασε εξειλιγμένη(=evolute) δεν ήταν τίποτα άλλο, παρά το σχήμα των δύο πλακών-σιαγόνων. Η μελέτη του δεν περιορίστηκε στην περίπτωση του κυκλοειδούς, αλλά γενικεύθηκε ως μαθηματική θεωρία για το ανάπτυγμα καμπυλών(εξειλιγμένη), όπως λέγεται, για όλες τις καμπύλες.



(Σχήμα 2)

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να περιγράψουμε τη διαδικασία που οδηγεί στον προσδιορισμό της εξίσωσης της ταυτόχρονης καμπύλης(κυκλοειδούς) στην παραμετρική της μορφή. Ως παράμετρος θα θεωρηθεί η γωνία απόκλισης $\hat{\theta}$ του νήματος του εκκρεμούς από την κατακόρυφη και θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες σύγχρονες έννοιες της φυσικής, όπως είναι η επιτάχυνση, αλλά και τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό.

Το πρόβλημα αρχίζει από το γεγονός ότι το απλό εκκρεμές είναι ακριβές για μικρές τιμές της γωνίας $\hat{\theta}$. Πράγματι όπως φαίνεται από το **Σχήμα 3**, στο βαρίδι του απλού εκκρεμούς ασκούνται η βαρυτική δύναμη και η δύναμη από το νήμα. Η ανάλυση των δυνάμεων στη διεύθυνση του νήματος και στην εφαπτομένη στην κυκλική τροχιά δίνει:



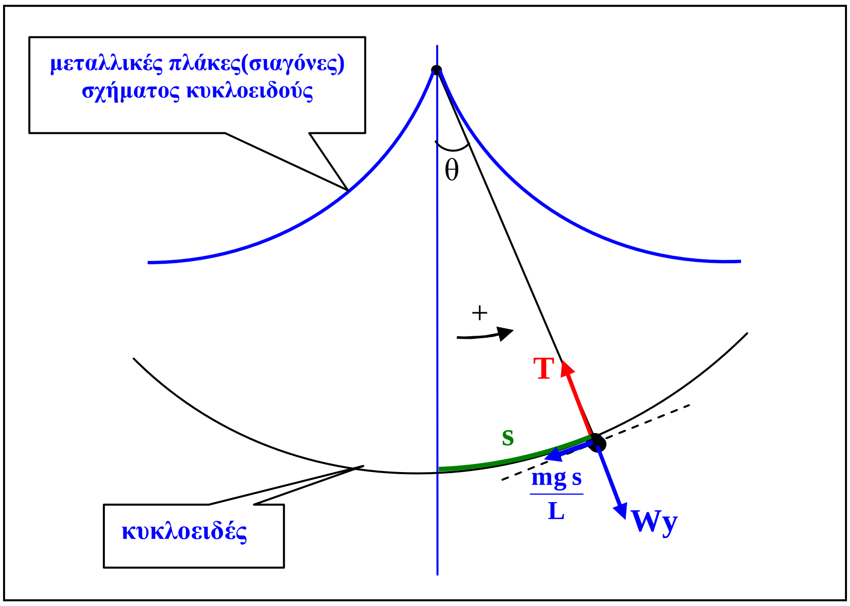
(Σχήμα 3)

$$m\alpha = -mg\,\eta\mu\theta$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η εφαπτομενική συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης έχει τη φορά ελάττωσης του μέτρου της γωνίας $\hat{\theta}$.

Για την εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης α, έχουμε: $\alpha = -g\eta\mu\theta$ $\Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -g\eta\mu\,\theta \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -g\eta\mu\,\theta$ **(1)**, όπου s το μήκος του τόξου που έχει διαγράψει το βαρίδι του εκκρεμούς. Αν L είναι το μήκος του νήματος του εκκρεμούς τότε s=L$\hat{\theta}$ και $\frac{d^2s}{dt^2} = -g\eta\mu\frac{s}{L}$, όμως για μικρές τιμές της γωνίας $\hat{\theta}$, $\eta\mu\,\theta \approx \theta$ και $\frac{d^2s}{dt^2} \approx -g\,\theta \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\theta$, κάτι που γνώριζε ο Huygens. Η διορατικότητά του τον οδήγησε στην αναζήτηση μιας καμπύλης που θα ικανοποιούσε την τελευταία εξίσωση επακριβώς. Αν θέσουμε $\frac{g}{L} = k$, αναζητούμε την καμπύλη για την οποία θα ισχύει $\frac{d^2s}{dt^2} = -ks$. **(2)**

Στο σημείο αυτό θα ανακαλέσουμε τις γνώσεις μας από την απλή αρμονική ταλάντωση. Ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω στον άξονα των x με την επίδραση μιας μόνο δύναμης της μορφής F=– Dx και αφήνεται τη χρονική στιγμή t=0 από τη θέση x(0)=A με υ(0)=0 γνωρίζουμε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση της οποίας η περίοδος είναι ανεξάρτητη από την τιμή του πλάτους της Α. Η εξίσωση της α.α.τ όπως είναι γνωστό είναι: $\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$.Για να βρεθεί η καμπύλη που θα επαληθεύει επακριβώς την **(2)** θα πρέπει η συνισταμένη της βαρυτικής δύναμης και της δύναμης του νήματος να έχει συνιστώσα μόνο στη διεύθυνση της εφαπτομένης προς την αναζητούμενη καμπύλη μέτρου ίσου με $mg\frac{s}{L} = kms$ **(Σχήμα 4)**.



(Σχήμα 4)

Με άλλα λόγια, ο πρωτοπόρος «ωρολογοποιός» μιμήθηκε τα όσα συμβαίνουν στην ελεύθερη πτώση δημιουργώντας κατά μήκος της τροχιάς του βαριδιού την κατάλληλη «εικονική βαρύτητα». Πράγματι τότε, $m\alpha = -mg\frac{s}{L} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -ks$. **(3)**

Από **(1)** και **(3)** : $-g\eta\mu\,\theta = -\ ks \Rightarrow ds = \frac{g}{k}\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta$ **(4)**

Αλλά, $ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds^2 = (1+\frac{dy^2}{dx^2})dx^2 \overset{\frac{dy}{dx}=\varepsilon\varphi\theta}{\Rightarrow} ds^2 = (1+\varepsilon\varphi^2\theta)dx^2$

$\Rightarrow ds^2 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}dx^2 \Rightarrow ds = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}dx$. **(5)** Από **(4)** και **(5)**: $dx = \frac{g}{k}\sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta$ **(6)**

Από $dy = \varepsilon\varphi\theta\, dx \overset{(6)}{\Rightarrow} dy = \frac{g}{k}\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta \Rightarrow dy = \frac{g}{2k}\eta\mu 2\theta d\theta$ **(7)**

Ολοκληρώνουμε τις **(6)** και **(7)** με ενδεικτικές τιμές , όταν $\hat{\theta}=0$ τότε x=0 και $y=-\frac{g}{2k}$:

$\int dx = \int \frac{g}{k}\sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta \Rightarrow \int dx = \frac{g}{k}\int(\frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta+1}{2})d\theta \Rightarrow \int dx = \frac{g}{2k}\int \sigma\upsilon\nu 2\theta\, d\theta + \frac{g}{2k}\int d\theta \Rightarrow$

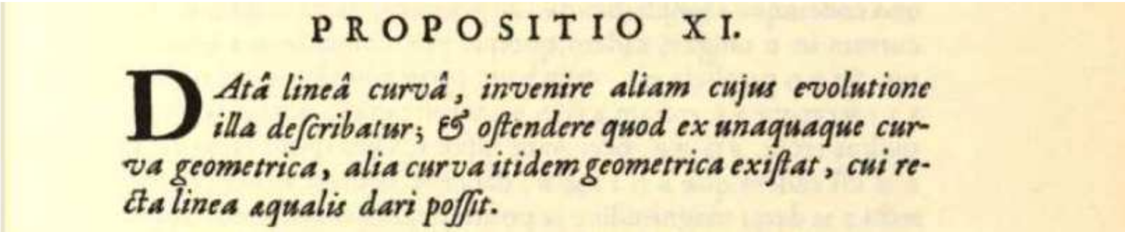
$x = \frac{g}{4k}\int \sigma\upsilon\nu 2\theta d(2\theta) + \frac{g}{2k}\int d\theta \Rightarrow x = \frac{g}{4k}\eta\mu 2\theta + \frac{g}{2k}\theta + C_x$. Αντικαθιστώντας x=0 και θ=0 προκύπτει C_x=0 και $x(\theta) = \frac{g}{4k}(2\theta + \eta\mu 2\theta)$.

Αντίστοιχα, $\int dy = \int \frac{g}{2k}\eta\mu 2\theta\, d\theta \Rightarrow y = \frac{g}{4k}\int \eta\mu 2\theta\, d(2\theta) \Rightarrow y = -\frac{g}{4k}\sigma\upsilon\nu 2\theta + C_y$.

Αντικαθιστώντας y= $-\frac{g}{2k}$ και θ=0 προκύπτει $C_y=-\frac{g}{4k}$ και $y(\theta) = -\frac{g}{4k}(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)$.

Οι εξισώσεις $x(\theta)=\frac{g}{4k}(2\theta+\eta\mu 2\theta)$ και $y(\theta)=-\frac{g}{4k}(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)$ αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις κυκλοειδούς.

Στη συνέχεια παρατίθεται από το τρίτο μέρος του “ Horologium oscillatorium” το πόρισμα XI που σχετίζεται με την ακτίνα καμπυλότητας, την κατασκευή της εξειλιγμένης μιας δεδομένης καμπύλης και στον υπολογισμό του μήκους της εξειλιγμένης καμπύλης(evolute).



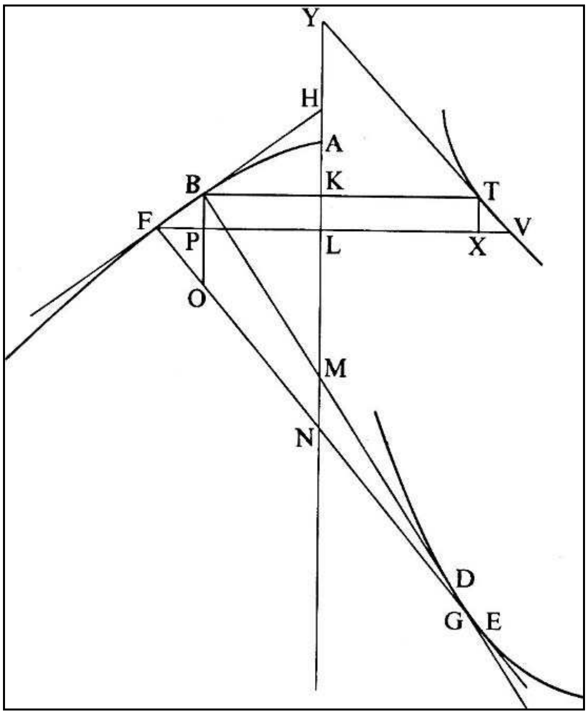
PROPOSITIO XI.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa deſcribatur; & oſtendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica exiſtat, cui recta linea æqualis dari poſſit.

“Για μια δεδομένη καμπύλη γραμμή, να βρεθεί μια άλλη καμπύλη της οποίας το ανάπτυγμα (εξειλιγμένη) να την περιγράφει. Δείξε ότι για κάθε καμπύλη, υπάρχει μια άλλη γεωμετρική καμπύλη για την οποία μπορεί να δοθεί μια ίση ευθεία γραμμή.”

Με τον όρο “ίση ευθεία γραμμή” (=recta linea equalis) εδώ νοείται το μήκος του τόξου. Δηλαδή, το μήκος του τόξου από ένα σημείο της εξειλιγμένης A', που αντιστοιχεί στο σημείο Α της αρχικής καμπύλης (ενειλιγμένης), έως ένα καταληκτικό σημείο, είναι ίσο με το μήκος της ακτίνας καμπυλότητας που αντιστοιχεί στο Α.

Το σχήμα που ακολουθεί **(Σχήμα 4)** είναι αυτό που υπάρχει στην πρωτότυπη έκδοση του “ Horologium oscillatorium”.



(Σχήμα 5)

“ Έστω ότι ABF είναι κάποια καμπύλη γραμμή , ή μέρος αυτής, η οποία καμπυλώνεται προς μια κατεύθυνση. Ας υποθέσουμε ότι KL είναι μια ευθεία γραμμή ως προς την οποία όλα τα σημεία αναφέρονται. Μας ζητείται να βρούμε μια άλλη καμπύλη, για παράδειγμα DE, της οποίας το ανάπτυγμα θα περιγράφει η ABF.

Ας υποθέσουμε ότι μια τέτοια γραμμή έχει βρεθεί. Εφόσον όλες οι εφαπτομένες της καμπύλης DE πρέπει να συναντούν με ορθές γωνίες την γραμμή ABF, η οποία περιγράφεται από το ανάπτυγμα, είναι επίσης σαφές ότι στην αντίστροφη σχέση, οι γραμμές που είναι κάθετες στην ABF, για παράδειγμα οι BD και FE θα είναι εφαπτόμενες στην εξειλιγμένη CDE (το σημείο C που εδώ δεν υπάρχει, θα έπρεπε να βρίσκεται πάνω από το σημείο D. Στο πρωτότυπο του “ Horologium oscillatorium” υπάρχει σε μια δεύτερη εκδοχή του σχήματος).

Στη συνέχεια επιλέγουμε τα σημεία B και F, τα οποία είναι κοντά το ένα στο άλλο. Τώρα, αν το ανάπτυγμα αρχίζει από το A και αν το F είναι πιο μακριά από το A απ ’ότι είναι το B, τότε το σημείο επαφής E θα είναι επίσης πιο μακριά απ’ ότι το D από το A. Και η τομή των γραμμών BD και FE που είναι το G, θα πέφτει πιο μακριά από το σημείο D επί της γραμμής BD.Σε σχέση με τις BD και FE πρέπει να τέμνονται εφόσον είναι κάθετες στην καμπύλη BF στην κοίλη πλευρά της.

Επιπροσθέτως, και στο βαθμό που το σημείο F είναι πλησιέστερα στο B, στον ίδιο βαθμό τα σημεία D, G και E θα εμφανίζονται επίσης να έρχονται πλησιέστερα. Και αν πάρουμε το διάστημα BF να είναι απειροελάχιστο, τα τρία αυτά σημεία μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν ένα. Ως αποτέλεσμα η γραμμή BH, αφού σχεδιαστεί, είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη στο B και επίσης μπορεί να θεωρηθεί ως εφαπτομένη στο F. Έστω η BO παράλληλος στην KL και οι BK και FL είναι κάθετες στην KL. H FL τέμνει την γραμμή BO στο P και έστω M και N είναι τα σημεία που οι γραμμές BD και FE τέμνουν την KL. Εφόσον η αναλογία του BG προς το GM είναι η ίδια με αυτή του BO προς το MN, τότε όταν η δεύτερη είναι γνωστή θα είναι και η πρώτη. Και όταν η γραμμή BM είναι δεδομένη ως προς το μήκος και τη θέση, ομοίως είναι το σημείο G στην προέκταση της BM, και επίσης το D επί της καμπύλης CDE, εφόσον έχουμε πάρει το G και το D να θεωρούνται ως ένα. Αλλά η αναλογία του BO προς το MN είναι ήδη γνωστή και στην περίπτωση του κυκλοειδούς , την οποία διερευνήσαμε πρώτα και βρέθηκε 2 προς 1 και στην περίπτωση των άλλων καμπυλών τις οποίες εξετάσαμε μέχρι στιγμής όπου τη βρήκαμε να είναι η σύνθεση δύο δοθεισών αναλογιών. Εφόσον η αναλογία BO προς MN συντίθεται από τις αναλογίες του BO προς το BP ή του NH προς το LH $\left[\frac{(BO)}{(MN)}=\frac{(BO)}{(BP)}\frac{(BP)}{(MN)}\right]$ και η αναλογία του BP ή του KL προς το MN, είναι σαφές ότι αν η κάθε μια από τις τελευταίες δοθούν δηλαδή, $\left[\frac{(BO)}{(BP)}\text{ή}\frac{(NH)}{(LH)}\text{και}\frac{(BP)}{(MN)}\text{ή}\frac{(KL)}{(MN)}\right]$, τότε η αναλογία του BO προς το MN, η οποία συντίθεται από αυτές, είναι επίσης δοθείσα. Θα γίνει σαφές σε ό,τι ακολουθεί ότι τα προηγούμενα είναι δεδομένα για όλες τις γεωμετρικές καμπύλες. Ως αποτέλεσμα της χρήσης τους είναι πάντα δυνατό να προσδιοριστούν καμπύλες από το ανάπτυγμα των οποίων περιγράφονται οι δοθείσες καμπύλες.”

Με άλλα λόγια εάν το μήκος BG και η θέση του G μπορούν να προσδιοριστούν, τότε και η εξειλιγμένη (evolute) της καμπύλης ABF μπορεί να κατασκευαστεί με την αλλαγή της θέσης του B και επανάληψη της κατασκευής του BG.Στην διαδικασία κατασκευής της εξειλιγμένης η ποσότητα BG αντιστοιχεί στην ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης στο B. Ιδιαίτερα σημαντική για τη συνέχεια είναι η σχέση που συνοψίζει τα προηγούμενα:

$$\frac{(BO)}{(MN)}=\frac{(BO)}{(BP)}\frac{(KL)}{(MN)}=\frac{(BG)}{(GM)}$$

Αξίζει να αναφερθούμε στον όρο "osculating circle" που συχνά συναντάται και ως "kissing circle". O Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) έζησε από το 1672 έως το 1676 στο Παρίσι όπου και συνάντησε τον ήδη διάσημο Huygens και έγινε μαθητής του. Εκεί πήρε ένα αντίγραφο του "Horologium oscillatorium" ως δώρο καθώς ο νεαρός φιλομαθής και ευφυής Γερμανός είχε κερδίσει την εκτίμηση του διάσημου Ολλανδού. Όπως είδαμε προηγουμένως, στην κατασκευή του αναπτύγματος καμπύλης (εξειλιγμένης) υπολογίστηκε η ακτίνα BG ενός κύκλου που αντιστοιχεί στο σημείο B της καμπύλης. O Leibnitz το 1686 στην εργασία του με τίτλο " Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi"(=Νέες διαμεσολαβήσεις για τη φύση των γωνιών επαφής και συνεπαφής) και στην επιστημονική γλώσσα εκείνης της εποχής επέλεξε τον όρο **circulus osculans** για να περιγράψει εκείνο τον κύκλο που προσεγγίζει μια καμπύλη σε ένα σημείο της με τον καλλίτερο τρόπο καθώς έχει την ίδια εφαπτομένη με αυτήν στο σημείο αυτό.

Ο όρος προέρχεται από το λατινικό osculatus μετοχή του osculari από το osculum που σημαίνει φιλί ή κυριολεκτικά μικρό στόμα και αποτελεί υποκοριστικό τύπο του os=στόμα. Από εκεί πέρασε στη σημερινή διεθνή γλώσσα ως osculate και θεωρείται ως παλιομοδίτικο συνώνυμο του kiss. Το νόημα που του αποδίδεται είναι αυτό της αβρής επαφής, όπως συμβαίνει για παράδειγμα σ' ένα χειροφίλημα και χρησιμοποιήθηκε στην συγκεκριμένη περίπτωση για να αποδώσει την "επαφή" ενός κύκλου που προσαρμόζεται καλλίτερα από οποιονδήποτε άλλο στο συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης. Στη γλώσσα της απόλυτης εννοιολογικής ακρίβειας όπου δεν είναι απαραίτητα τα φιλιά διαβαθμισμένης αβρότητας, ο όρος αποδίδεται ως **συνεφαπτόμενος κύκλος**(τελεία). Στη διαφορική γεωμετρία ο **συνεφαπτόμενος κύκλος** μιας ομαλής επίπεδης καμπύλης σε κάποιο σημείο της καμπύλης ορίζεται ως ο κύκλος που περνάει από το σημείο P αυτό και από δύο άλλα (βοηθητικά) σημεία της καμπύλης που απέχουν απειροελάχιστα από το P. Το κέντρο του βρίσκεται επί της καθέτου και προς την κοίλη πλευρά της καμπύλης και η καμπυλότητά του είναι ίδια με αυτήν που έχει η δοθείσα καμπύλη στο συγκεκριμένο σημείο.

Ως εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την ακτίνα καμπυλότητας BG που αντιστοιχεί στη θέση B της καμπύλης ABF με γεωμετρικό τρόπο δίνοντας ταυτόχρονα τις αντιστοιχίες με τα μεγέθη του απειροστικού λογισμού προκειμένου να καταλήξουμε στη σύγχρονη έκφραση για την ακτίνα καμπυλότητας.

Θεωρώντας ότι η καμπύλη ABF βρίσκεται στο επίπεδο xy και ότι τα σημεία $B(x_1,y_1)$ και $F(x_2,y_2)$ απέχουν απειροελάχιστα, τότε $dy=y_2-y_1$, $dx=x_2-x_1$ και η παράγωγος της καμπύλης στα B ή F είναι $\frac{dy}{dx}$. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα B και F είναι: $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ και μπορεί να θεωρηθεί εφαπτόμενο σε οποιοδήποτε από τα δύο σημεία.

Παρατηρώντας το **Σχήμα 5** βλέπουμε ότι η **ευθεία αναφοράς KL παίζει τον ρόλο του άξονα του y, ενώ η ευθεία FH μπορεί να θεωρηθεί ως ο άξονας των x και το σημείο L ως η αρχή των αξόνων**. Στην απόδειξη που ακολουθεί θεωρούμε ότι οι τιμές του x αυξάνονται προς τα αριστερά και οι τιμές του y αυξάνονται προς τα κάτω και ότι καθώς σχεδιάζουμε την καμπύλη ABF το σημείο B είναι που πλησιάζει το σημείο F.

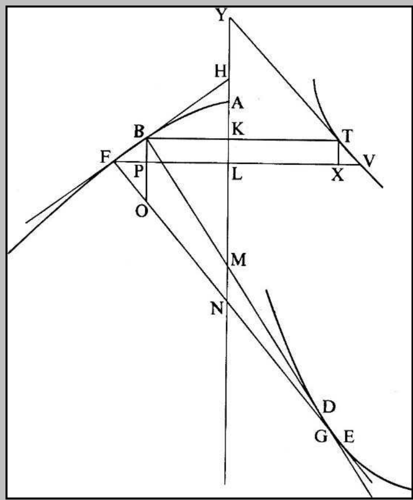
Με αφετηρία το τελικό γεωμετρικό συμπέρασμα που προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση: $\frac{BG}{MG}=\frac{NH}{LH}\frac{KL}{MN}$ **(8)** και τη σχέση $BG=BM+MG$ **(9)**

έχουμε: $\frac{NH}{LH}=\frac{NH}{FH}\frac{FH}{LH}$ **(10)**, αλλά από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $H\hat{F}N$ και $B\hat{P}F$: $\frac{NH}{FH}=\frac{BF}{BP}\Rightarrow\frac{NH}{FH}=\frac{ds}{dy}$ **(11)** και από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $F\hat{L}H$ και $B\hat{P}F$: $\frac{FH}{LH}=\frac{BF}{BP}\Rightarrow\frac{FH}{LH}=\frac{ds}{dy}$ **(12)**

Από **(10)** $\overset{(11)}{\underset{(12)}{\Rightarrow}}\frac{NH}{LH}=\left(\frac{ds}{dy}\right)^2$ **(13)**.

$\frac{MN}{KL}=\frac{KL+LN-KM}{KL}\Rightarrow\frac{MN}{KL}=1+\left(\frac{LN-KM}{KL}\right)$

.



(Σχήμα 5)

Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $F\hat{L}N$ και $B\hat{P}F$: $\frac{LN}{x}=\frac{dx}{dy}\Rightarrow LN=x\frac{dx}{dy}$.

Το κλάσμα $\frac{LN-KM}{KL}$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του ευθύγραμμου τμήματος KM (σε LN), καθώς το B προσεγγίζει το F και αντίστοιχα το M το N και το K το L, ως προς y με dy=KL. Άρα μπορούμε να γράψουμε $\frac{LN-KM}{KL}=\frac{d}{dy}(x\frac{dx}{dy})\Rightarrow\frac{LN-KM}{KL}=\frac{dx^2}{dy^2}+x\frac{d^2x}{dy^2}$. Με αντικατάσταση:

$$\frac{MN}{KL}=1+\frac{dx^2}{dy^2}+x\frac{d^2x}{dy^2}\Rightarrow\frac{MN}{KL}=\frac{dy^2+dx^2+xd^2x}{dy^2}\Rightarrow\frac{MN}{KL}=\frac{ds^2+xd^2x}{dy^2}\Rightarrow$$

$$\frac{KL}{MN}=\frac{dy^2}{ds^2+xd^2x}\quad\textbf{(14)}$$

Από **(8)** $\overset{(13)}{\underset{(14)}{\Rightarrow}}\frac{BG}{MG}=\left(\frac{ds}{dy}\right)^2\left(\frac{dy^2}{ds^2+xd^2x}\right)\Rightarrow\frac{BG}{MG}=\frac{ds^2}{ds^2+xd^2x}\Rightarrow\frac{MG}{BG}=\frac{ds^2+xd^2x}{ds^2}$

$$\overset{(9)}{\Rightarrow}\frac{BG-BM}{BG}=\frac{ds^2+xd^2x}{ds^2}\Rightarrow1-\frac{BM}{BG}=\frac{ds^2+xd^2x}{ds^2}\Rightarrow\frac{BM}{BG}=1-\frac{ds^2+xd^2x}{ds^2}$$

$\Rightarrow\frac{BM}{BG}=-\frac{xd^2x}{ds^2}\Rightarrow BG=-BM\frac{ds^2}{xd^2x}$ **(15)** όπου $d^2x=d(dx)$

Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $B\hat{K}M$ και $B\hat{P}F$ έχουμε: $\frac{BM}{BK}=\frac{FB}{BP}\Rightarrow\frac{BM}{x}=\frac{ds}{dy}\Rightarrow BM=x\frac{ds}{dy}$ **(16)**

Από **(15)** $\overset{(16)}{\Rightarrow}BG=-x\frac{ds}{dy}\frac{ds^2}{xd^2x}\Rightarrow BG=-\frac{ds^3}{dyd^2x}\Rightarrow BG=-\frac{(\sqrt{dx^2+dy^2})^3}{dyd^2x}\Rightarrow$

$$BG=-\frac{\left(\sqrt{dy^2(1+\frac{dx^2}{dy^2}}\right)^3}{dyd^2x}\Rightarrow BG=-\frac{dy^3\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x}\Rightarrow BG=-\frac{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

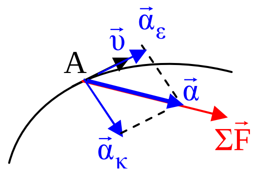
Αν αλλάξουμε ρόλους στην εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή (x και y) και πάρουμε την απόλυτη τιμή του BG, αφού σε αντίθεση με τις σύγχρονες συμβάσεις στην κατασκευή του Huygens το x θεωρήθηκε ότι αυξάνει προς τα αριστερά και το y προς τα κάτω, η τελευταία σχέση εναρμονίζεται με τη σύγχρονη έκφραση της ακτίνας καμπυλότητας: $BG=R=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Η καμπυλότητα κ μιας επίπεδης καμπύλης σε Ευκλείδειο δισδιάστατο χώρο είναι βαθμωτό μέγεθος και εκφράζει την απόκλιση της διεύθυνσης (divergence) της διεύθυνσης της κλίσης της f(x,y)=0. Δηλαδή η καμπυλότητα μιας ομαλής καμπύλης μετράει το πόσο γρήγορα η καμπύλη αλλάζει διεύθυνση σε ένα σημείο της. Η ακτίνα καμπυλότητας είναι ίση με το αντίστροφο της καμπυλότητας $R=\frac{1}{\kappa}$.

Ως σύνοψη των προηγουμένων θα μπορούσαμε να πούμε ότι, σε μια εποχή όπου ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός δεν είχαν αναπτυχθεί, ο Huygens προσλαμβάνει την ελεύθερη πτώση ως μια κίνηση που συντίθεται από μια κίνηση με σταθερή ταχύτητα που έχει ή είχε το σώμα και μια κίνηση προς τα κάτω λόγω βαρύτητας και μάλιστα ανεξάρτητα από τη διεύθυνση της *ενιαίας κίνησης* και χρησιμοποιεί τα συμπεράσματά που προέκυψαν από μια καθαρά γεωμετρική διαδικασία όχι μόνο στη μελέτη του κυκλοειδούς εκκρεμούς, αλλά τα γενικεύει για όλες τις επίπεδες καμπύλες. Κατά την προσωπική μου άποψη η όποια κριτική θα μπορούσε να ασκηθεί στην προσέγγιση του Huygens σε σχέση με το *μοναδικό* της κίνησης, της ανεξαρτησίας των εξισώσεων της κίνησης που με τη σειρά της σχετίζεται με τη γραμμικότητα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τις κινήσεις δε μειώνει το θαυμασμό για το έργο του ιδιοφυούς επιστήμονα και θα ήταν άδικη, αφού θα έκανε το λάθος του επιστημονικού ιστορικού αναχρονισμού. Αξίζει να αναφερθεί κανείς στο δεδηλωμένο σεβασμό του Newton προς το έργο του Huygens. Ο Newton άλλωστε θα ασχοληθεί με το ίδιο θέμα στο έργο του “*De methodis serierum et fluxionum* ” (=Μέθοδοι των σειρών και των ρυθμών μεταβολής) που γράφτηκε περί το 1671 και εκδόθηκε το 1736. Το πρόβλημα 5 αυτής της πραγματείας σε σχέση με τις παραγώγους (fluxions) των μεταβλητών που θεωρούνται ως ρέουσες ποσότητες (fluents) διατυπώνεται ως εξής: “*Curvae alicujus ad datum punctum curvaturam invenire*” (=Να βρεθεί η καμπυλότητα για κάθε καμπύλη σε ένα δεδομένο σημείο).

Στη διαδικασία που ακολουθείται στην απόδειξη της πρότασης XI, ιδιαίτερη σημασία έχει η ανάγκη να υπάρχει μια **ευθεία γραμμή αναφοράς που καθώς είναι κατακόρυφη** παραπέμπει για παράδειγμα στην επιλογή **του κατακόρυφου συστήματος συντεταγμένων για τη μελέτη της οριζόντιας βολής.** Από την άλλη μεριά, η χρήση της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο της καμπύλης καθώς και της καθέτου σ’ αυτό παραπέμπουν στο λόγο για τον οποίο η επιτάχυνση σε κάθε επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης (επιτρόχιος επιτάχυνση) και μία κατά την κάθετο προς την εφαπτομένη διεύθυνση (κεντρομόλος επιτάχυνση,* βλώσκω =κατευθύνομαι προς, β’ αόρ. έμολον, “Μολών λαβέ”, αυτομολώ κλπ.).

Αν όλα τα προαναφερθέντα αφορούν αυτούς που διδάσκουν ή σπουδάζουν φυσική, μένει να δούμε την χρήση τους στην διδασκαλία της επίπεδης καμπυλόγραμμης κίνησης. Αρχικά πρέπει να τονιστεί ότι η συνισταμένη δύναμη $\Sigma\vec{F}$ που επιδρά σε ένα σώμα που κινείται σε επίπεδη καμπύλη τροχιά **δεν έχει πάντα** την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του σώματος **(Σχήμα 6)** και αντίστοιχα η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ που αυτή προσδίδει στο σώμα δεν έχει πάντα την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα. Ο λόγος για τον οποίο η συνιστάμενη δύναμη και αντίστοιχα η επιτάχυνση αναλύεται στη διεύθυνση της εφαπτομένης και την κάθετη προς αυτή διεύθυνση νομίζω ότι θα πρέπει να εξηγείται στα πλαίσια μιας γενικής περιγραφής της καμπυλόγραμμης κίνησης, προφανώς χωρίς καμία αναφορά στα προηγούμενα, με εξήγηση του ρόλου της κάθε μιας από τις δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$, δηλαδή ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$ μεταβάλει την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας και η επιτρόχιος μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας, αφού έχει μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας. Ακολουθεί ο υπολογισμός της κεντρομόλου και επιτρόχιας επιτάχυνσης σε τυχαίο σημείο της παραβολικής τροχιάς στην οριζόντια βολή και ακολούθως στα πλαίσια της διδασκαλίας της “ομαλής” κυκλικής κίνησης γίνεται αναφορά στους προηγούμενους όρους επιτάχυνσης και παρατίθεται ο τύπος $\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Ας δούμε την επόμενη εφαρμογή.



(Σχήμα 6)

Εφαρμογή

Σώμα βάλλεται από ύψος h από το έδαφος με οριζόντια αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. το σώμα κινείται μόνο υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης.

α. Σε κάποια θέση της τροχιάς του που η ταχύτητα σχηματίζει με την οριζόντια γωνία θ, να σχεδιάσετε την κεντρομόλο και επιτρόχιο επιτάχυνση που δέχεται το σώμα στη συγκεκριμένη θέση της τροχιάς του και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

β. **Ν**α υπολογίσετε σε συνάρτηση:

- **i.** με το χρόνο κίνησης t
- **ii.** την κατακόρυφη απόσταση y που διανύει το σώμα και
- **iii.** την οριζόντια μετατόπιση x του σώματος

την ακτίνα ενός κύκλου στον οποίο όταν κινείται το σώμα εκτελώντας “ομαλή” κυκλική κίνηση με ταχύτητα ίσου μέτρου με αυτό που έχει στο προηγούμενο ερώτημα, έχει την ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση.

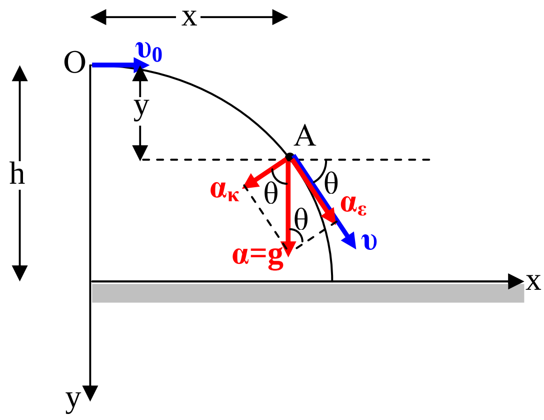
Δίνονται υ_0, h, θ και g.

Απάντηση

α. Επειδή η μοναδική δύναμη που δέχεται το σώμα είναι η κατακόρυφη βαρυτική δύναμη έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow mg = m\alpha \Rightarrow \alpha = g.$$

Στη θέση Α όπου η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο υ και διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια, αναλύουμε την επιτάχυνση g κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας και κατά την κάθετη προς την ταχύτητα διεύθυνση. Αντίστοιχα έχουμε: $\alpha_\varepsilon = g\eta\mu\theta$ και $\alpha_\kappa = g\sigma\upsilon\nu\theta$ **(1)**



β. Αναλύουμε την κίνηση του σώματος ως προς το σύστημα συντεταγμένων xOy του σχήματος και οι εξισώσεις της κίνησης είναι: $\upsilon_x = \upsilon_0$ **(2)** $x = \upsilon_0 t$ **(3)**

$\upsilon_y = gt$ **(4)** και $y = \frac{1}{2}gt^2$ **(5)**

i. Η ταχύτητα στη θέση Α έχει μέτρο $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \overset{(2)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}$ **(6)**.

Αλλά $\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta = \upsilon_0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\upsilon_0}{\upsilon} \overset{(6)}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}}$ **(7)**.

Από **(1)** $\overset{(7)}{\Rightarrow} \alpha_\kappa = \frac{\upsilon_0 g}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}}$ **(8)**.

Όταν το σώμα εκτελεί "ομαλή" κυκλική κίνηση έχοντας ταχύτητα μέτρου υ και κεντρομόλο επιτάχυνση α_κ, όπως αυτές που δίνονται από τις σχέσεις **(6)** και **(8)** η ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς θα είναι:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\upsilon^2}{\alpha_\kappa} \overset{(6)}{\underset{(8)}{\Rightarrow}} R = \frac{\upsilon_0^2 + g^2t^2}{\frac{\upsilon_0 g}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}}} \Rightarrow R = \frac{(\upsilon_0^2 + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{\upsilon_0 g} \quad \textbf{(9)}$$

ii. Από την **(5)** $\Rightarrow g^2t^2 = 2gy$ και με αντικατάσταση στην **(9)**: $R = \frac{(\upsilon_0^2 + 2gy)^{\frac{3}{2}}}{\upsilon_0 g}$ **(10)**.

iii. Με απαλοιφή του χρόνου από τις **(3)** και **(5)** προκύπτει η εξίσωση της παραβολικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα: $y = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\upsilon_0^2}$ **(11)**.

$$\text{Από } \textbf{(10)} \overset{(11)}{\Rightarrow} R = \frac{\left(\upsilon_0^2 + \frac{g^2x^2}{\upsilon_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\upsilon_0 g} \Rightarrow R = \frac{(\upsilon_0^4 + g^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\upsilon_0^4 g}.$$

Σχόλιο

Το πιο συνηθισμένο λάθος σε ερώτημα που ζητείται ο υπολογισμός της προηγούμενης ακτίνας R είναι η απόπειρα να υπολογιστεί η ζητούμενη ακτίνα με "γεωμετρικό τρόπο" από το σχήμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. “Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrations geometricae”, Cornell University
2. “Horologium oscillatorium” translated and annotated by Ian Bruce
3. “Mathematical Masterpieces: Further Chronicles by the Explorers”, Art Knoebel , Reinhard Laubenbacher , Jerry Lodder , David Pengelley
4. Eves, Howard, AN INTRODUCTION TO THE HISTORY OF MATHEMATICS, 6th ed., Saunders College Publishing
5. C. Huygens, The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks, R.J. Blackwell (trans.), The Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1986.
6. “Schaum's Outline of DIFFERENTIAL GEOMETRY”, Martin M. Lipschutz

Ξ. Στεργιάδης