

ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ
35ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
«ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»
15 ΜΑΡΤΙΟΥ 2025
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

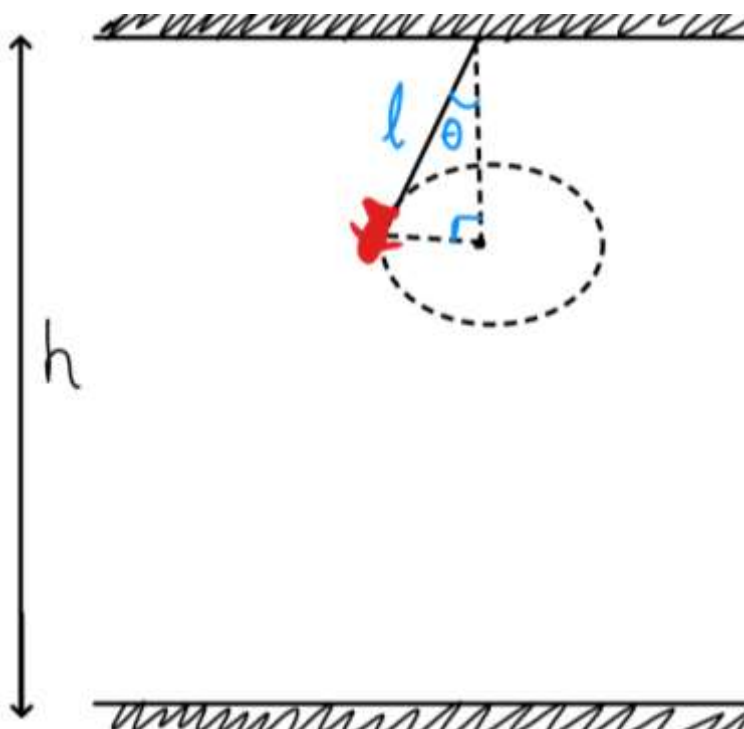


ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Το παιδικό παιχνίδι «αεροπλανάκι» αποτελείται από ένα μικρό αεροπλάνο που λειτουργεί με μπαταρίες, δεμένο από το ένα άκρο ενός αβαρούς και μη ελαστικού νήματος μήκους $\ell = 1,75m$. Το άλλο άκρο του νήματος αναρτάται από σταθερό σημείο της οροφής που απέχει από το δάπεδο απόσταση $h = 2,74m$.

Εκτρέπουμε το αεροπλανάκι από την κατακόρυφη και με την λειτουργία του μοτέρ αρχίζει να διαγράφει κυκλικές τροχιές σε οριζόντιο επίπεδο με συχνότητα 25 στροφών σε κάθε λεπτό.

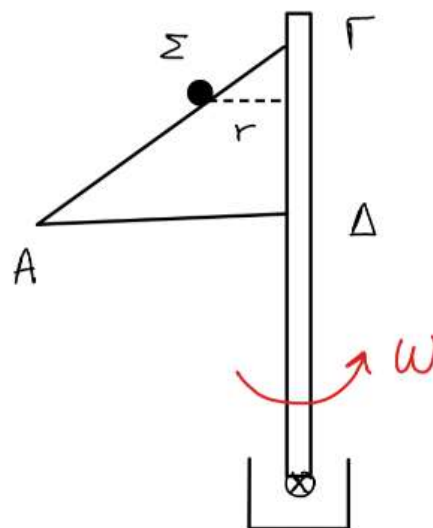


- Α) Μπορεί να κινηθεί στον χώρο ένα παιδί όρθιο με ύψος $H = 1,49m$ χωρίς τον κίνδυνο να χτυπηθεί από το αεροπλανάκι;
- Β) Πόση πρέπει να είναι η περίοδος «ασφαλείας» της κίνησης για να μην υπάρχει κίνδυνος;
- Γ) Καθώς το αεροπλανάκι περιστρέφεται στην τροχιά «ασφαλείας» το νήμα κόβεται και ταυτόχρονα σταματάει η λειτουργία του. Σε ποιο σημείο στο πάτωμα θα πέσει το αεροπλανάκι σε σχέση με το ίχνος της κατακόρυφης που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς του;

Δίνονται $g = 10m/s^2$ και $\pi^2 = 10$.

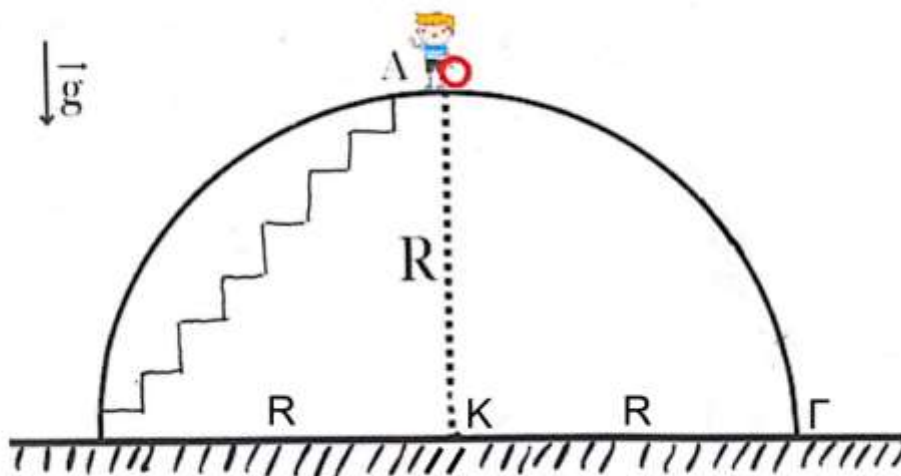
ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα το κεκλιμένο επίπεδο με κλίση γωνίας θ , περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω ($\frac{rad}{s}$). Αν το σώμα Σ ισορροπεί όταν απέχει από τον άξονα περιστροφής r (m), υπολογίστε τον ελάχιστο συντελεστή τριβής ώστε να μην διαταραχθεί η ισορροπία. Δίνεται $g = 10 \frac{m}{s^2}$.



ΘΕΜΑ 3

ΠΡΟΣΟΨΗ ΗΜΙΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΛΟΦΟΥ



ΣΧΗΜΑ 1

Ένας μαθητής της Β' Λυκείου μία ανοιξιάτικη μέρα βρέθηκε στο ψηλότερο σημείο ενός ημισφαιρικού λόφου (Βλέπε σχήμα 1). Ο ημισφαιρικός λόφος έχει διαμορφωθεί, ώστε από το αριστερό μισό του ημισφαιρίου να υπάρχει άνετη και ασφαλής πρόσβαση στην κορυφή του για τους επισκέπτες. Το δεξιό μισό του ημισφαιρίου είναι λείο. Μια ομάδα τεχνικών έχει τοποθετήσει ευαίσθητους αισθητήρες, που ανιχνεύουν επαφή σε όλο το δεξιό μισό του ημισφαιρίου και το

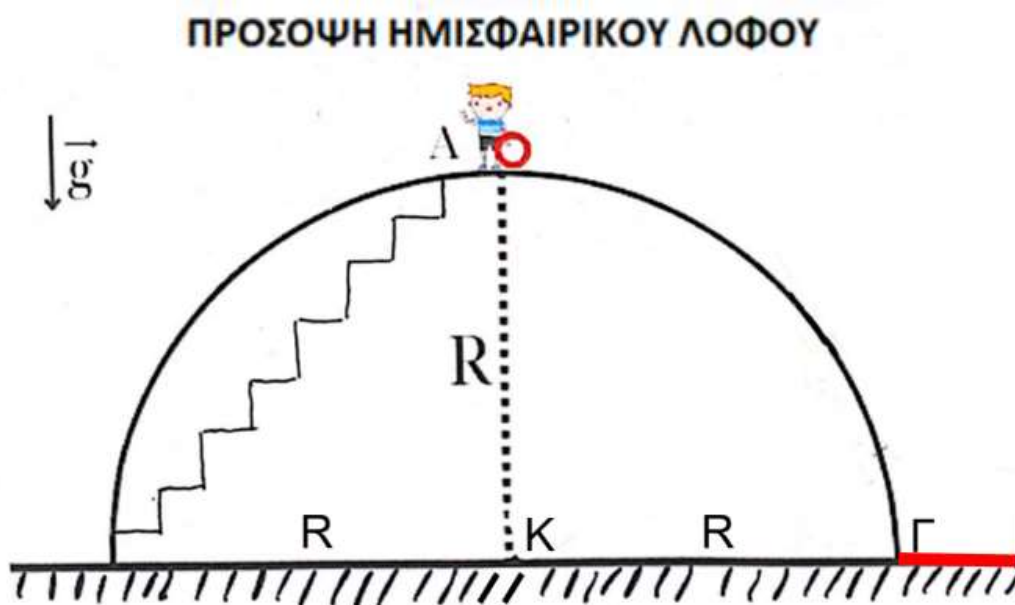
όργανο που είναι συνδεδεμένο με αυτούς δείχνει το μέτρο της δύναμης που ασκεί το εκάστοτε σώμα στο ημισφαίριο με το οποίο έρχεται σε επαφή.

Ο μαθητής, φτάνοντας στην κορυφή του λόφου, έχει στην διάθεσή του αρκετά όμοια σώματα μάζας m το καθένα, αμελητέων διαστάσεων.

Α) Ο μαθητής σπρώχνει ελαφρώς ένα από τα παραπάνω σώματα από την κορυφή Α του ημισφαιρίου προς το δεξιό μισό του. Να προσδιορίσετε την περιοχή του ημισφαιρίου στην οποία το συνδεδεμένο όργανο με τους αισθητήρες θα δείξει μη μηδενική ένδειξη.

Β) Ποια είναι η ταχύτητα, με την οποία πρέπει ο μαθητής να βάλει οριζόντια ένα σώμα μάζας m , από αυτά που έχει στην διάθεσή του, από την κορυφή Α του ημισφαιρίου προς το μέρος της λείας επιφάνειας ώστε κατά την διάρκεια κίνησής του να μην «ενεργοποιηθούν» οι αισθητήρες (δηλαδή η ένδειξή του οργάνου να είναι μηδενική) και να χτυπήσει στο οριζόντιο επίπεδο, στο Ι, που βρίσκεται R χαμηλότερα από το σημείο βολής στην πιο κοντινή απόσταση, με το υπέργειο σημείο Γ (της πρόσοψης) του ημισφαιρίου (δηλαδή Γ Ι ελάχιστη που αντιστοιχεί στην **βέλτιστη βολή**). (Βλέπε σχήμα 2)

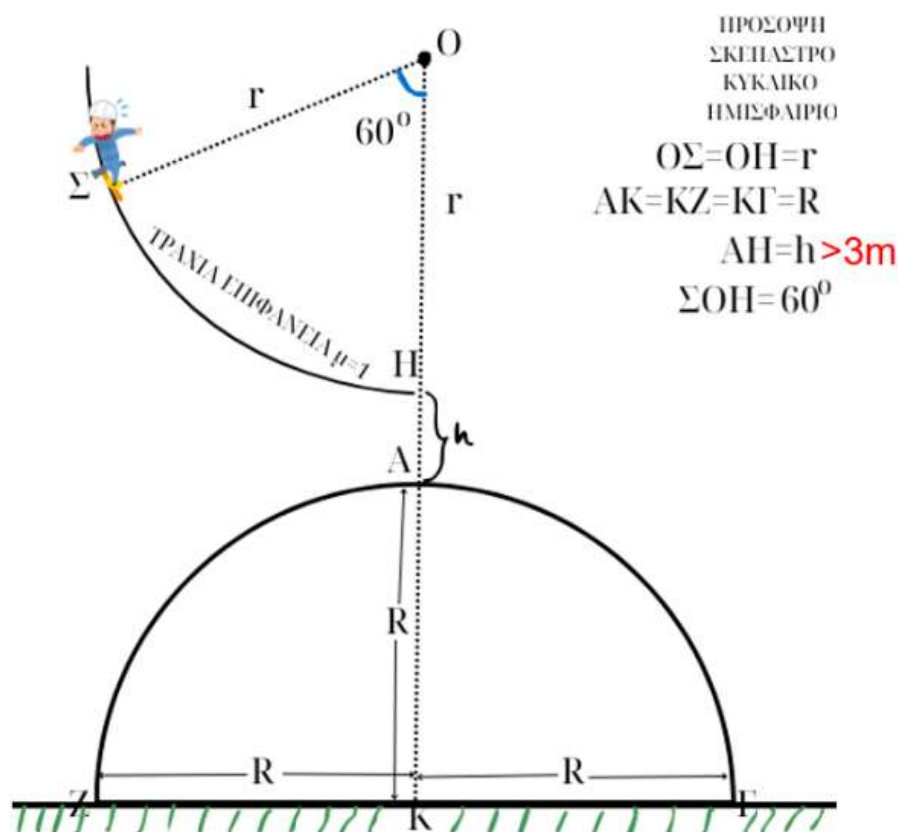
Δίνεται η ακτίνα R του ημισφαιρίου και η επιτάχυνση της βαρύτητας g .



Γ) Σε ύψος $h > 3m$ στην ίδια κατακόρυφο με το ανώτερο σημείο Α του ημισφαιρίου, καταλήγει το κατώτερο σημείο Η, ενός σκέπαστρου (Βλέπε πρόσοψη, σχήμα 3). Από έναν εργάτη που δουλεύει για συντήρηση του σκέπαστρου, ξεφεύγει από τα χέρια του ένα εργαλείο αμελητέων διαστάσεων και μάζας m , χωρίς αρχική ταχύτητα, στο σημείο Σ της στέγης. Η στέγη (σκέπαστρο) που συντηρεί ο εργάτης είναι τμήμα κυλίνδρου. Η πρόσοψη της στέγης είναι κατακόρυφο ημικύκλιο, κέντρου Ο,

ακτίνας r . Τα σημεία O, Σ, A , βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (πρόσοψη σχήματος 3), τα σημεία O, H, A, K , βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο.

Εξηγήστε την ένδειξη του οργάνου των ευαίσθητων αισθητήρων του ημισφαιρίου εξαιτίας του ατυχήματος του εργάτη.



Δίνεται η επίκεντρη γωνία $\Sigma OH=60^\circ$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu=1$, ο οποίος ισούται με τον συντελεστή οριακής τριβής.

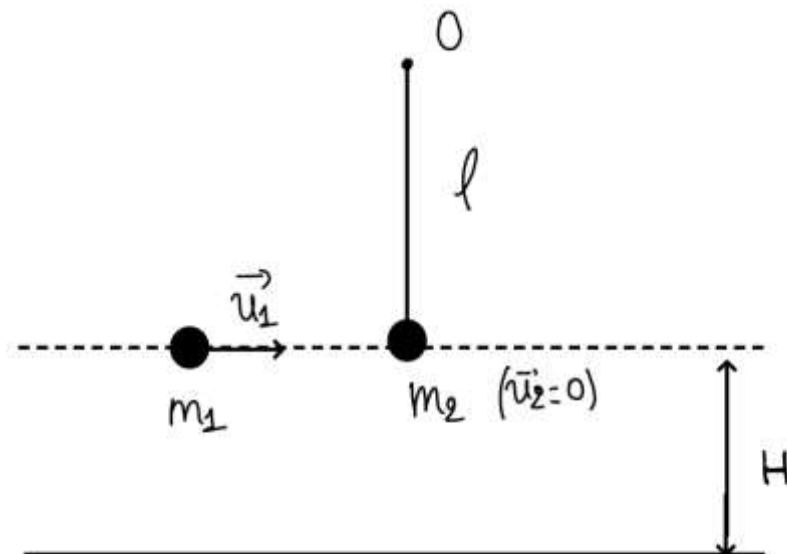
Δ) Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ του ίχνους I στο οριζόντιο επίπεδο (που βρίσκεται R κάτω από το σημείο βολής) που αφήνει το σώμα μάζας m που βάλει ο μαθητής οριζόντια, όταν έχει πετύχει τη βέλτιστη βολή και της θέσης που βρίσκεται το εργαλείο που ξέφυγε από τον εργάτη, όταν η ταχύτητα του εργαλείου είναι μηδέν για δεύτερη φορά.

Ο υπολογισμός της απόστασης να γίνει με τη θεώρηση ότι η τριβή ολίσθησης έχει σταθερό μέτρο ίσο με το ελάχιστο που μπορεί να πάρει στο κοίλο μέρος ΣH της στέγης.

Θεωρήστε επίσης ότι για την εξίσωση $\sin(\pi/3+\alpha)=(1-\alpha)/2$ τότε $\alpha=-0,95$.

Δίνονται $g, R, h>3m, m$, συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu=1$, ο οποίος ισούται με τον συντελεστή οριακής τριβής και $r=2m$.

ΘΕΜΑ 4



Η σφαίρα μάζας m_1 που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $u_1 = 10 \text{ m/s}$ συγκρούεται κεντρικά με την ακίνητη ($u_2 = 0$) σφαίρα μάζας m_2 ($m_2 = 3m_1$) η οποία κρέμεται από νήμα αβαρές και σταθερού μήκους $\ell = 0,5 \text{ m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο στο σημείο O και απέχει από το οριζόντιο έδαφος $H = 20 \text{ m}$. Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_2 αποκτά κινητική ενέργεια τόσο, ώστε μόλις να εκτελεί ανακύκλωση.

Δ1) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας μάζας m_2 στην ανώτατη θέση της κατά την ανακύκλωσή της.

Δ2) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες u'_1 και u'_2 των δύο σφαιρών αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.

Δ3) Να υπολογίσετε το σημείο και την ταχύτητα που η σφαίρα μάζας m_1 συναντά το έδαφος.

Δ4) Να αποδείξετε ότι κατά την κρούση των σφαιρών δεν παρουσιάστηκε απώλεια ενέργειας.

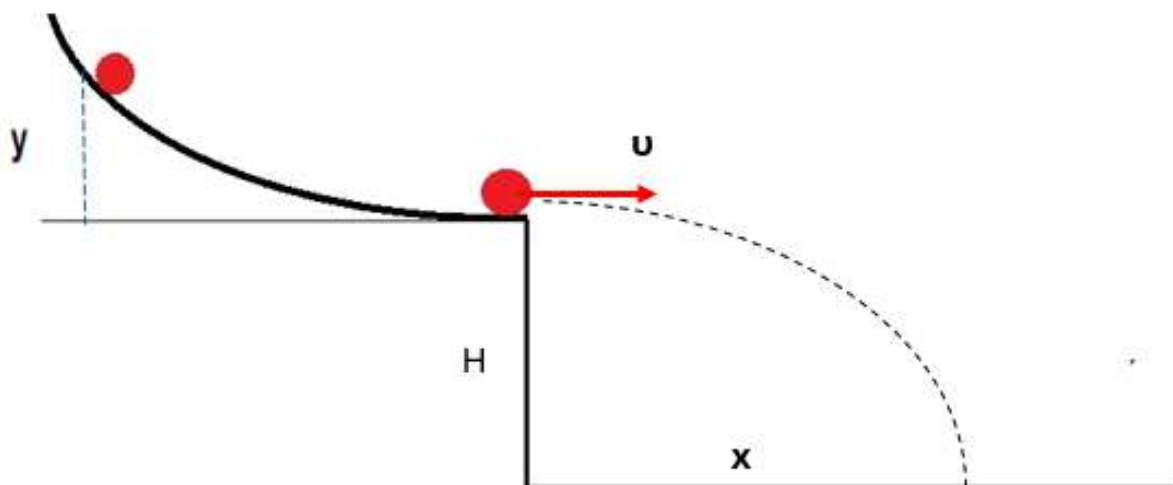
Δ5) Να υπολογίσετε το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που έλαβε η σφαίρα m_2 .

Θεωρήστε τις αντιστάσεις αμελητέες. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΘΕΜΑ 5

Μια ομάδα μαθητών με τον καθηγητή τους θέλουν δια διερευνήσουν πειραματικά την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας και την Αρχή Ανεξαρτησίας των κινήσεων.

Διαθέτουν έναν καμπυλόγραμμο διάδρομο ο οποίος μπορεί να επιταχύνει μια μικρή σφαίρα (φωτογραφία). Στο τέλος της διαδρομής η σφαίρα αποκτά οριζόντια ταχύτητα u και εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος $H=0,25\text{ m}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα αφήνεται από διαφορετικά ύψη y από την βάση του διαδρόμου και αφού αποκτήσει μία οριζόντια ταχύτητα u , στο τέλος του διαδρόμου, εκτελεί οριζόντια βολή. Όταν φτάσει στο δάπεδο μετρούμε την οριζόντια απόσταση x της οριζόντιας βολής.



Αφήνουμε την σφαίρα από διαφορετικά ύψη y και αφού επιταχυνθεί από τον διάδρομο και εκτελέσει οριζόντια βολή μετράμε την οριζόντια μετατόπιση x της οριζόντιας βολής.

α/α	$y(m)$	$x(m)$
1	0,00	0,00
2	0,02	0,12
3	0,04	0,16
4	0,06	0,21
5	0,08	0,24
6	0,10	0,26

A. Να βρείτε θεωρητικά, χρησιμοποιώντας την Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, την συνάρτηση $y=f(x)$. (Αγνοήστε την τριβή, την αντίσταση του αέρα και την περιστροφή της σφαίρας).

Τι σχήμα προβλέπετε να έχει η γραφική παράσταση $y=f(x)$;

B. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση των πειραματικών δεδομένων του y σε συνάρτηση με το x . Επιβεβαιώνεται η θεωρητική πρόβλεψη του Α ερωτήματος;

Γ. Μετασχηματίστε τα πειραματικά δεδομένα y και x έτσι ώστε η γραφική παράσταση να είναι ευθεία γραμμή. Σχεδιάστε την νέα γραφική παράσταση.

Δ. Ποια η φυσική σημασία της κλίσης της 2^{ης} γραφικής παράστασης;

Ε. Υπολογίστε το ύψος H της οριζόντιας βολής από την 2^η γραφική παράσταση και συγκρίνετέ το με την θεωρητική τιμή. Υπάρχει διαφορά και αν ναι, αναφέρετε δύο αιτίες.

Οι στρογγυλοποιήσεις να γίνουν με δύο δεκαδικά ψηφία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ
35ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
«ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»
15 ΜΑΡΤΙΟΥ 2025
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

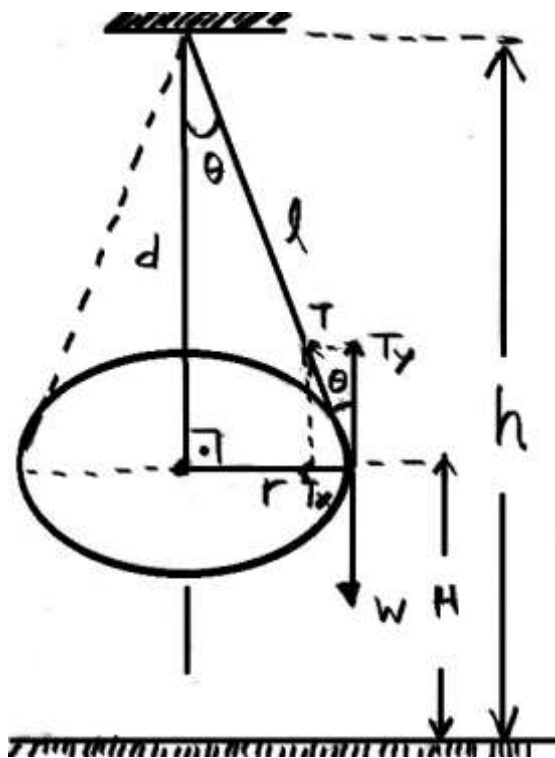


ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1°

Α) Από την διάταξη: $d = \ell \cdot \sin\theta$ (1), $r = \ell \cdot \eta\mu\theta$ (2),

$H \leq h - d$ (3) οριακή επιτρεπόμενη θέση



$$\begin{cases} \Sigma F_x = F_k \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_x = \frac{mu^2}{r} \Rightarrow T \cdot \eta\mu\theta = \frac{mu^2}{r} & (4) \\ T_y - w = 0 \Rightarrow T \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = mg & (5) \end{cases} \stackrel{(4)/(5)}{\Rightarrow} \varepsilon\varphi\theta = \frac{u^2}{g \cdot r} \quad (6)$$

$$u = 2\pi r f = 2\pi r \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \text{ Hz}$$

$$u^2 = 4\pi^2 r^2 f^2 \cong 4 \cdot 10 \cdot r^2 \cdot \frac{25}{144} = \frac{125}{18} \cdot r^2$$

$$\text{Από (2),(6): } \varepsilon\varphi\theta = \frac{\frac{125}{18} \cdot r^2}{g \cdot r} \Rightarrow \frac{125}{18} \cdot \ell \cdot \eta\mu\theta = g \cdot \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{18 \cdot g}{125} \Rightarrow$$

$$d = \frac{18 \cdot 10}{125} = \frac{180}{125} = 1,44m$$

Οπότε ελέγχουμε αν ισχύει η (3): το μέγιστο επιτρεπόμενο ύψος είναι $H_{max} = h - d = 2,74 - 1,44 = 1,25m < 1,49m$, συνεπώς δεν πρέπει να κινηθεί με αυτές τις συνθήκες το παιδί.

Β) Έστω ότι για περίοδο περιφοράς $T_1 = \frac{1}{f_1}$ είναι οριακά ασφαλής η θέση του παιδιού με ύψος H κάτω από την τροχιά, θα είναι: $d_1 = 2,74 - 1,33 = h - H = 2,74 - 1,49 = 1,25m$

$$\text{Από (6): } \varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{u_1^2}{g \cdot r_1} = \frac{4\pi^2 r_1^2 f_1^2}{g \cdot r_1} \Rightarrow g \cdot \varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{4\pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} \Rightarrow g \cdot \varepsilon\varphi\theta_1 \cdot T_1^2 = 4\pi^2 \cdot r_1 \cdot \ell \cdot \eta\mu\theta_1 \Rightarrow$$

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_1}{g} \Rightarrow T_1^2 = \frac{4\pi^2 \cdot \ell \cdot d_1}{g} \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{d_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,25}{10}} = \sqrt{5} s$$

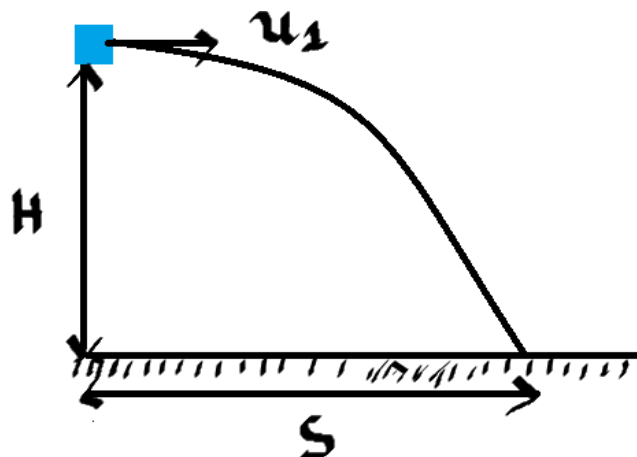
Όταν κόβεται το νήμα εκτελεί οριζόντια βολή από

$$\text{ύψος } H \text{ με ταχύτητα } u_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{2\pi \sqrt{\ell^2 - d_1^2}}{T_1} =$$

$$\frac{2\pi \sqrt{1,75^2 - 1,25^2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi \sqrt{1,5}}{\sqrt{5}} = 2\pi \sqrt{0,3} \stackrel{\pi^2=10}{\approx} 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$\text{Για την βολή } H = g \frac{s^2}{2u^2} \Rightarrow s = u \sqrt{\frac{2H}{g}} =$$

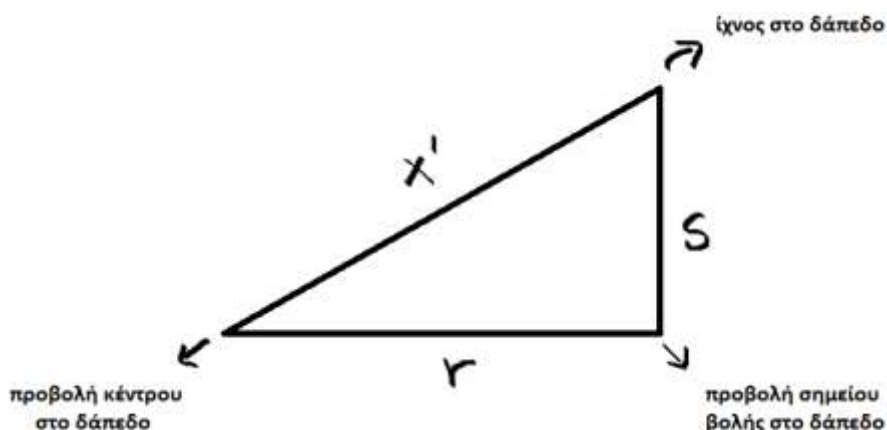
$$2\sqrt{3} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,49}{10}} \approx 1,89m$$



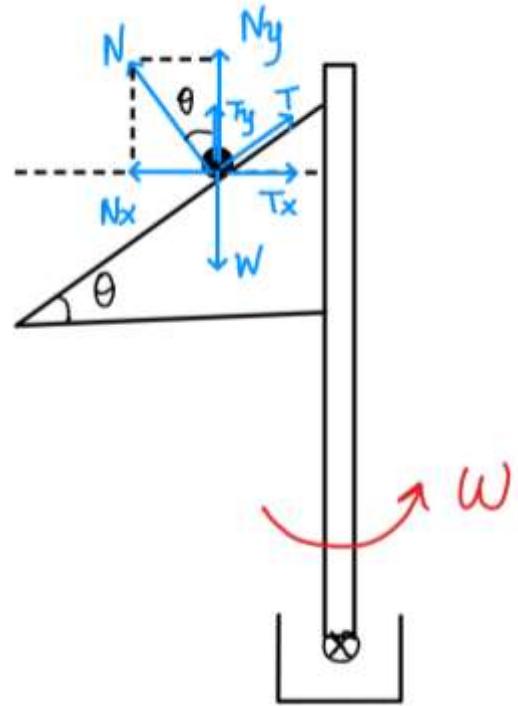
Η βολή γίνεται οριζόντια από σημείο της τροχιάς σε απόσταση r από την κατακόρυφη που διέρχεται από το κέντρο της. Επομένως για τη θέση στο δάπεδο παίρνουμε από το σχήμα: $x = \sqrt{s^2 + r^2} =$

$$\sqrt{s^2 + \ell^2 - d_1^2} =$$

$$\sqrt{1,89^2 + 1,5} \approx 2,25m$$



Θέμα 2°



$$\begin{cases} \Sigma F_x = F_k \\ \Sigma F_y = 0 \\ T \leq \mu \cdot N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_x - N_x = \frac{m\omega^2 r}{r} \\ N_y + T_y = W \\ T \leq \mu \cdot N \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - N \cdot \eta\mu\theta = m\omega^2 r & (1) \\ N \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + T \cdot \eta\mu\theta = mg & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta - N \cdot \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot m\omega^2 r & (+) \\ N \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \eta\mu\theta + T \cdot \eta\mu^2\theta = \eta\mu\theta \cdot mg \end{cases} \xRightarrow{+} T(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = \eta\mu\theta \cdot mg + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot m\omega^2 r \Rightarrow$$

$$T = \eta\mu\theta \cdot mg + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot m\omega^2 r \quad (3)$$

Αντικαθιστώ την (3) στην (2):

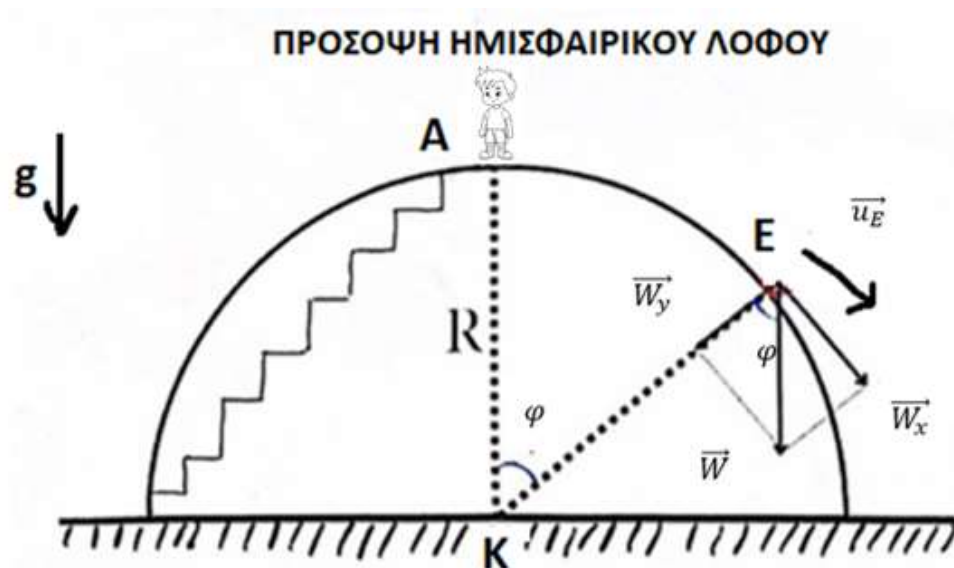
$$N \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + (\eta\mu\theta \cdot mg + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot m\omega^2 r) \cdot \eta\mu\theta = mg \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{(\eta\mu\theta \cdot g + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \omega^2 r) \cdot m \cdot \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\eta\mu\theta \cdot mg + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot m\omega^2 r \leq \mu \cdot \left(\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{(\eta\mu\theta \cdot g + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \omega^2 r) \cdot m \cdot \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \right)$$

$$\mu_{\min} = \frac{\eta\mu\theta \cdot g + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \omega^2 r}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot g - \eta\mu\theta \cdot \omega^2 r}$$

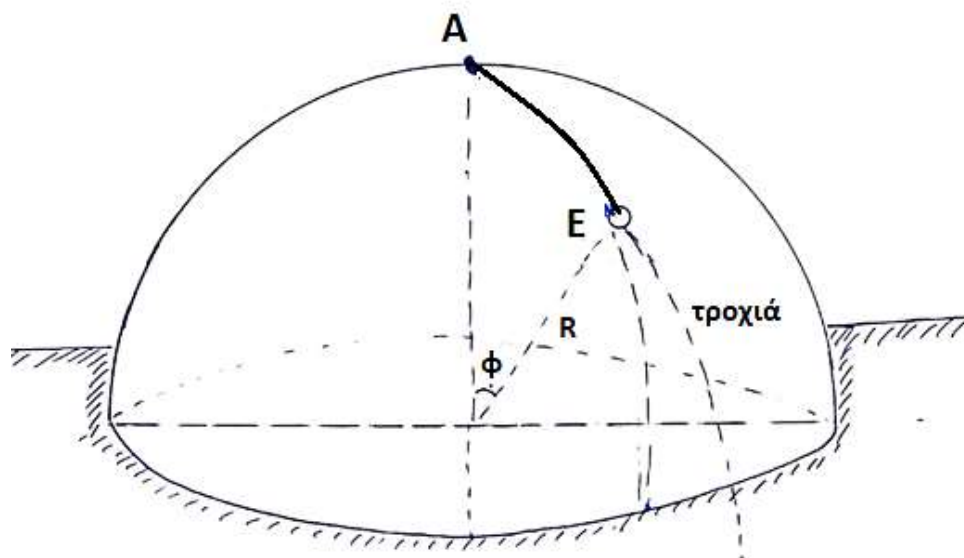
Θέμα 3°

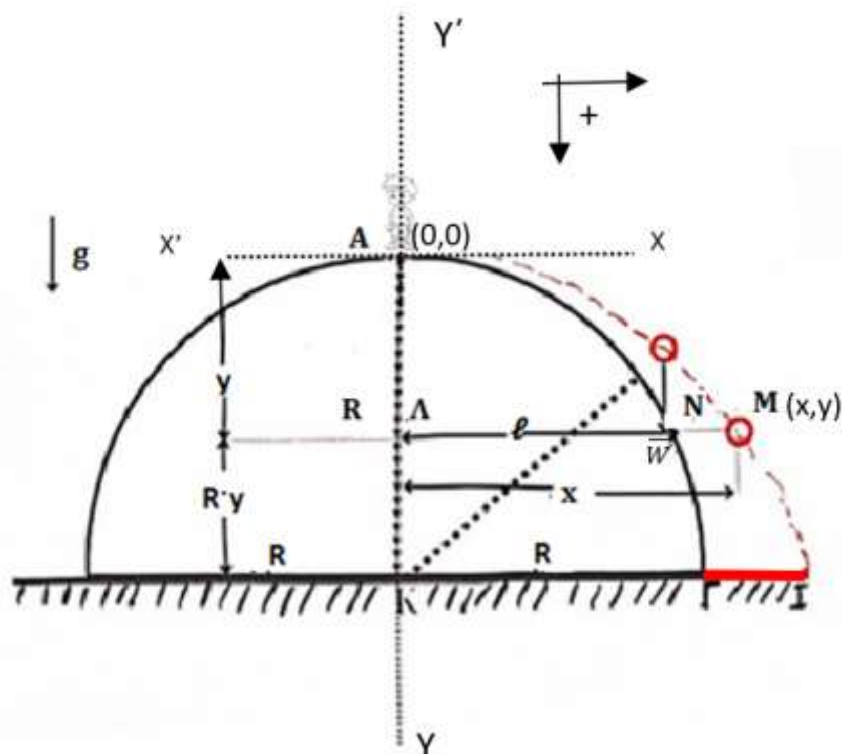


Α) Έστω ότι η επαφή χάνεται στο Ε, τότε $N_E = 0$

$$F_k = \Sigma F_R \Rightarrow \frac{mu_E^2}{R} = mg \sin \varphi \Rightarrow u_E^2 = Rg \sin \varphi \quad (1)$$

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε (A} \rightarrow \text{E): } K_E - K_A = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} mu_E^2 = mg(R - R \sin \varphi) \Rightarrow u_E^2 = 2g(R - R \sin \varphi) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sin \varphi = \frac{2}{3}$$





Β) Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι το σώμα που βάλαμε δεν ακουμπά το δεξιό μέρος του ημισφαιρίου και κατά συνέπεια μόνη δύναμη που δρα πάνω του είναι το βάρος του. Η κίνηση είναι οριζόντια βολή, όπου στο άξονα $x'x$: $x = u_o t$ (3) και άξονας $y'y$ $y = \frac{1}{2} g t^2$ (4).

$$\text{Από (4)} \Rightarrow y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow R = \frac{1}{2} g t_{o\lambda}^2 \Rightarrow t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2R}{g}}, \text{ άρα } 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$\text{Εξίσωση τροχιάς: } y = \frac{g}{2u_o^2} x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2u_o^2}{g} y \quad (5)$$

$$\text{Για να μην ενεργοποιηθούν οι αισθητήρες πρέπει: } x^2 \geq \ell^2 \quad (6)$$

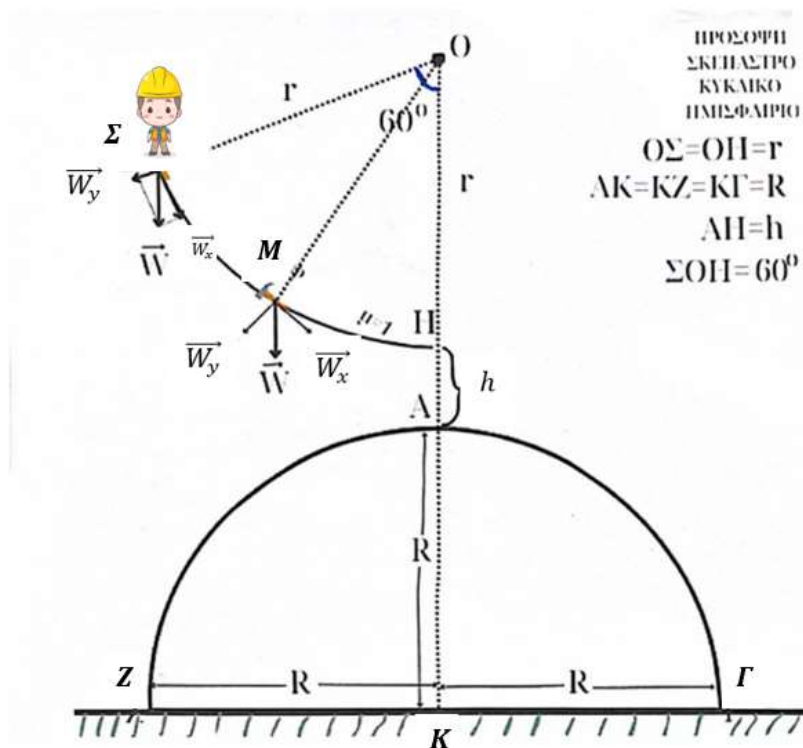
$$\text{Ισχύει από σχήμα: } \ell^2 + (R - y)^2 = R^2 \Rightarrow \ell^2 = R^2 - (R - y)^2 = (R - R + y)(R + R - y)$$

$$\Rightarrow \ell^2 = y(2R - y) \quad (7)$$

$$x^2 \geq \ell^2 \Rightarrow \frac{2u_o^2}{g} y \geq y(2R - y) \stackrel{0 < y \leq \ell}{\Leftrightarrow} \frac{2u_o^2}{g} \geq (2R - y) \quad (8)$$

Για να ισχύει η (8) πρέπει $u_o \geq \sqrt{gR}$, για να είναι η απόσταση ΓΙ ελάχιστη πρέπει το μέτρο της ταχύτητας u_o να είναι ελάχιστο επομένως $u_o = \sqrt{gR}$

Γ) Στο σημείο Σ της στέγης που ξέφυγε το εργαλείο από τον εργάτη χωρίς αρχική ταχύτητα είναι:



$$\Sigma F_k = 0 \Rightarrow N_\Sigma - W_{y\Sigma} = 0 \Rightarrow N_\Sigma = mg \sin 60^\circ \quad (9)$$

$$\text{και } T_{\rho\rho\Sigma} = \mu N_\Sigma \Rightarrow T_{\rho\rho\Sigma} = \mu mg \sin 60^\circ = \frac{mg}{2} \quad (10)$$

$$\text{Ακόμα } W_{x\Sigma} = mg \eta \mu 60^\circ \Rightarrow W_{x\Sigma} = \frac{mg\sqrt{3}}{2} > T_{\rho\rho\Sigma}$$

Επομένως το εργαλείο θα αρχίσει να κινείται πάνω στο στέγαστρο. Κατά την κίνηση του σώματος στο σκέπαστρο ισχύει κάθε στιγμή $N - W_y = \frac{mu^2}{R} \Rightarrow N = mg \sin \theta + \frac{mu^2}{R}$

Επομένως είναι συνεχώς $N \geq mg \sin \theta$ και κατά τη διάρκεια της κίνησης η γωνία θ μειώνεται επειδή

$$0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$$

το $\sin \theta$ αυξάνεται συνεπώς: Η δύναμη N που δέχεται το εργαλείο είναι ελάχιστη την χρονική στιγμή που βρίσκεται στο σημείο Σ δέχεται κατά την διάρκεια της κίνησης τους την ελάχιστη τριβή $T_\Sigma = \frac{mg}{2}$ είναι:

$$K_H - K_\Sigma = \Sigma W \Rightarrow K_H = mg(r - r \sin 60^\circ) - T_\Sigma \widehat{\Sigma H} = mgr - \frac{mgr}{2} - \frac{\frac{mg}{2}\pi}{3}r = \frac{mgr}{2} \left(1 - \frac{\pi}{3}\right) < 0 \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

Επομένως το εργαλείο ΔΕΝ θα φτάσει στο κατώτερο σημείο του σκέπαστρου αφού στην πραγματικότητα το έργο της (ελάχιστης) δύναμης της τριβής είναι (κατά απόλυτη τιμή) μεγαλύτερο από το έργο του βάρους στην αντίστοιχη διαδρομή.

Το σώμα δηλαδή θα σταματήσει σε ένα σημείο του σκέπαστρου ανάμεσα στα σημεία Σ και Η με αποτέλεσμα το όργανο που είναι συνδεδεμένο με τους αισθητήρες να έχει ένδειξη μηδέν.

Δ) Θεωρώντας ότι από την θέση Σ που ξεφεύγει το εργαλείο από τα χέρια του εργάτη με μηδέν ταχύτητα και μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του για δεύτερη φορά η τριβή ολίσθησης είναι για όλη τη διαδρομή ΣΜ ($\vec{u}_\Sigma = \vec{0}, \vec{u}_M = \vec{0}$) σταθερή και ίση με την τριβή στο Σ. Τότε $\widehat{\Sigma M}$ θα είναι το μέγιστο που θα μπορούσε να διατρέχει.

$$T_{\Sigma} = \mu W_{y\Sigma} \Rightarrow T_{\Sigma} = \mu mg \sin 60^{\circ} \Rightarrow T_{\Sigma} = \frac{mg}{2}$$

ΑΔΕ (Θέσεις Σ,Μ)

$$mg\left(\frac{r}{2} - y\right) = T_{\Sigma} \cdot S \Rightarrow mg\left(\frac{r}{2} - y\right) = \frac{mg}{2}S \Rightarrow r - 2y = S \Rightarrow S = \varphi r$$

$$r - 2y = \varphi r \Rightarrow 2 - 2y = \varphi \Rightarrow 1 - y = \varphi$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu\nu}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right) &= \frac{r-y}{r} \Rightarrow r\sigma_{\nu\nu}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right) = r-y \Rightarrow y = r - r\sigma_{\nu\nu}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right) \stackrel{r=2, \varphi=1-y}{\cong} y \\ &= 2 - 2\sigma_{\nu\nu}\left[\frac{\pi}{3} - (1-y)\right] \end{aligned}$$

$$2\sigma\nu\nu\left(\frac{\pi}{3}+y-1\right)=2-y\Rightarrow 2\sigma\nu\nu\left(\frac{\pi}{3}+y-1\right)=1+1-y\Rightarrow \sigma\nu\nu\left(\frac{\pi}{3}+y-1\right)$$

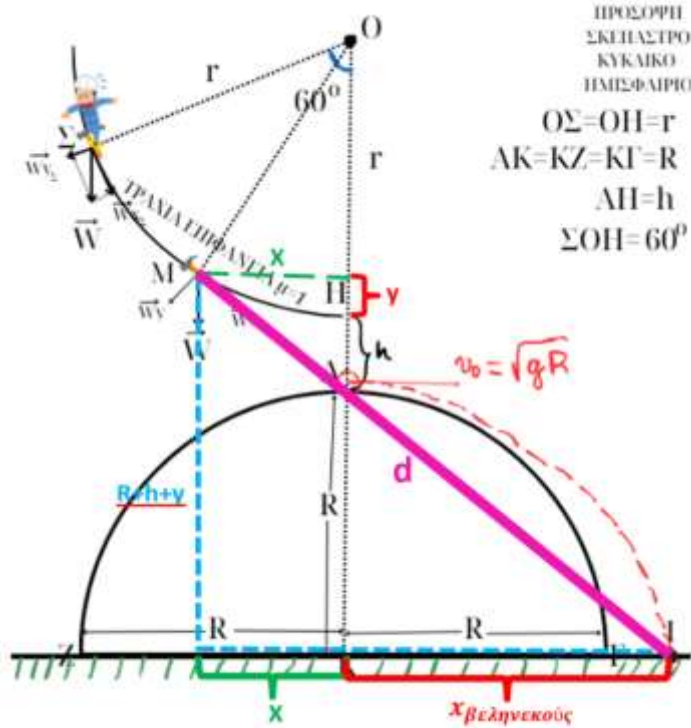
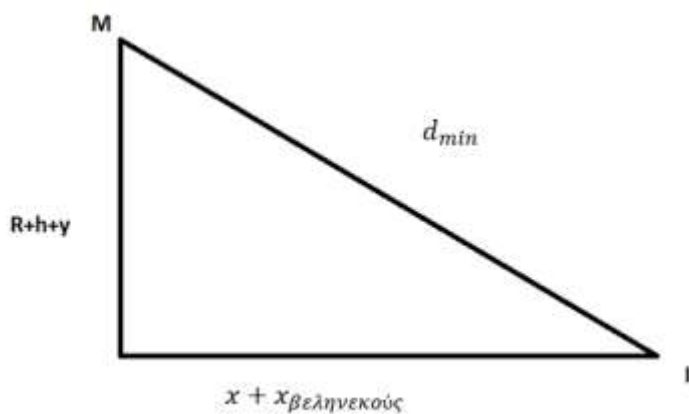
$$=\frac{[1-(y-1)]}{2}\overset{y-1=a}{\cong}\sigma\nu\nu\left(\frac{\pi}{3}+a\right)=\frac{[1-a]}{2}\Rightarrow a=-0,95\text{ (δίνεται)}\text{ άρα }y=0,05$$

Προφανώς επειδή η τριβή δεν είναι σταθερή αλλά παίρνει μεγαλύτερες τιμές από την T_S . Θα σταματήσει ψηλότερα από εκεί που έχουμε υπολογίσει.

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{x}{r}\overset{r=2}{\equiv\supset}x=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\overset{\varphi=1-y=0,95}{\equiv\supset}$$

$$x = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - 0,95\right) = \dots$$

$$d^2 = (x + x_{\beta\epsilon\lambda\eta\nu\epsilon\kappa\omicron\varsigma})^2 + (R + h + y)^2 \Rightarrow$$



$$d = \sqrt{(x + x_{\beta\epsilon\lambda\eta\nu\epsilon\kappa\acute{o}\upsilon\varsigma})^2 + (R + h + y)^2}$$

$$x_{\beta\epsilon\lambda\eta\nu\epsilon\kappa\omicron\upsilon\varsigma} = u_o t_k = \sqrt{gR} \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{2}R$$

Θέμα 4°

Δ1) Στην ανώτατη θέση Γ της σφαίρας μάζας m_2 ισχύει:
 $N \geq 0$ για την οριακή ασφαλή ανακύκλωση. Από τον νόμο του Νεύτωνα για την κεντρομόλο δύναμη έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = F_k &\Rightarrow N + m_2 g = \frac{m_2 u_{\Gamma}^2}{\ell} \Rightarrow N = \frac{m_2 u_{\Gamma}^2}{\ell} - m_2 g \\ &\geq 0 \Rightarrow \frac{m_2 u_{\Gamma}^2}{\ell} \geq m_2 g \Rightarrow u_{\Gamma}^2 \geq g\ell = \\ &> u_{\Gamma, \min}^2 = g\ell \Rightarrow \end{aligned}$$

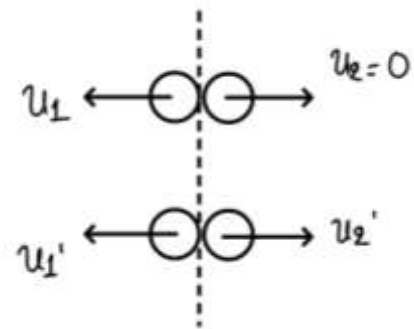
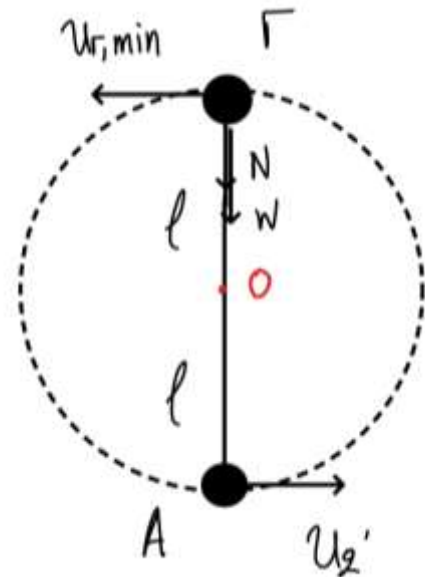
$$u_{\Gamma, \min} = \sqrt{g\ell} = \sqrt{10 \cdot 0,5} = \sqrt{5} \cong 2,236 \text{ m/s}$$

Δ2) **ΑΔΜΕ** ($A \rightarrow \Gamma$): $\frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = m_2 g(2\ell) + \frac{1}{2} m_2 u_{\Gamma, \min}^2 =$
 $> u_2'^2 = 4g\ell + u_{\Gamma, \min}^2 \Rightarrow$

$$u_2' = \sqrt{4g\ell + g\ell} = \sqrt{5g\ell} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 0,5} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την ΑΔΟ: $\overrightarrow{P_{\pi\rho\iota\nu}} = \overrightarrow{P_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}} \overset{(+)}{=} m_1 u_1 + 0 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \Rightarrow$
 $m_1 u_1 = m_1 u_1' + 3m_1 u_2' \Rightarrow 10 = u_1' + 15$

$$\Rightarrow u_1' = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

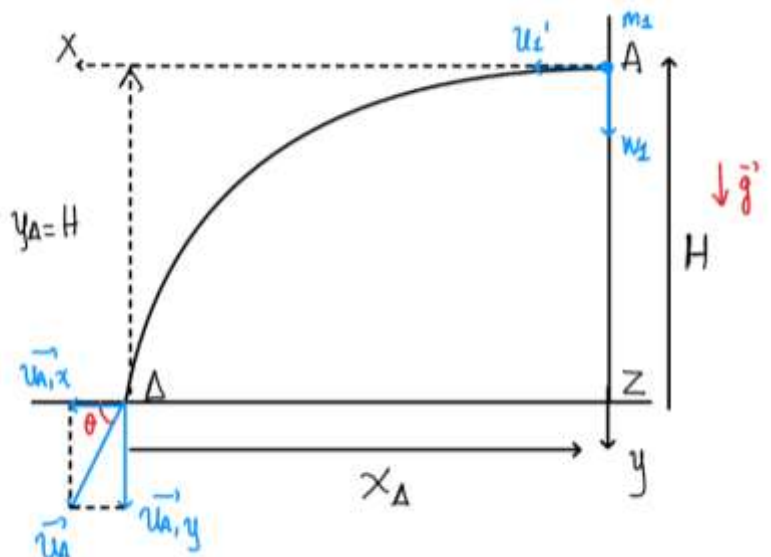


Δ3) Οριζόντια βολή

- Στον άξονα x: Ε.Ο.Κ άρα
 $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow$
 $\overrightarrow{u_1'} = \text{σταθ.}, u_1' = u_x = \text{σταθ.}$

Άρα $x = u_1' t$ (1)

- Στον άξονα y: Ε.Ο.Ε. άρα
 $\Sigma F_y = m_1 g = m_1 a \Rightarrow$
 $\overrightarrow{a_y} = \vec{g} = \text{σταθ.}, u_y =$
 gt (2) και $y = \frac{1}{2} g t^2$ (3)



Εξίσωση τροχιάς: $y = \frac{g}{2u_1'^2} x^2$ (παραβολική τροχιά)

Από (1) $\overset{t=t_{\Delta}}{=} x_{\Delta} = u_1' t_{\Delta} = 5 \cdot 2 = 10\text{m}$, άρα $\Delta(x_{\Delta}, y_{\Delta})$ ή $\Delta(10\text{m}, 20\text{m})$

ΑΔΜΕ ($A \rightarrow \Delta$): $\frac{1}{2} m_2 u_1'^2 + m_1 g H = \frac{1}{2} m_1 u_{\Delta}^2 \Rightarrow u_1'^2 = 2gH + u_{\Delta}^2 \Rightarrow u_{\Delta} = \sqrt{5^2 + 20^2} = \sqrt{425} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{u_{y,\Delta}}{u_{x,\Delta}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \theta = \text{τοξ}\varepsilon\varphi\theta = 75,96^\circ$$

$$\Delta 4) K_{ολ,πριν} = K_{ολ,μετα} + E_{απωλειών} \Rightarrow E_{απωλειών} = K_{ολ,πριν} - K_{ολ,μετα} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1u_1'^2 - \frac{1}{2}3m_1u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1(u_1^2 - u_1'^2 - u_2'^2) = \frac{1}{2}m_1(10^2 - 5^2 - 3 \cdot 5^2) = 0$$

$$\Delta 5) (\Pi\%) = \frac{\frac{1}{2}3m_1u_2'^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2} \cdot 100 = \frac{3 \cdot 5^2}{100} \cdot 100 = 75\%$$

Θέμα 5°

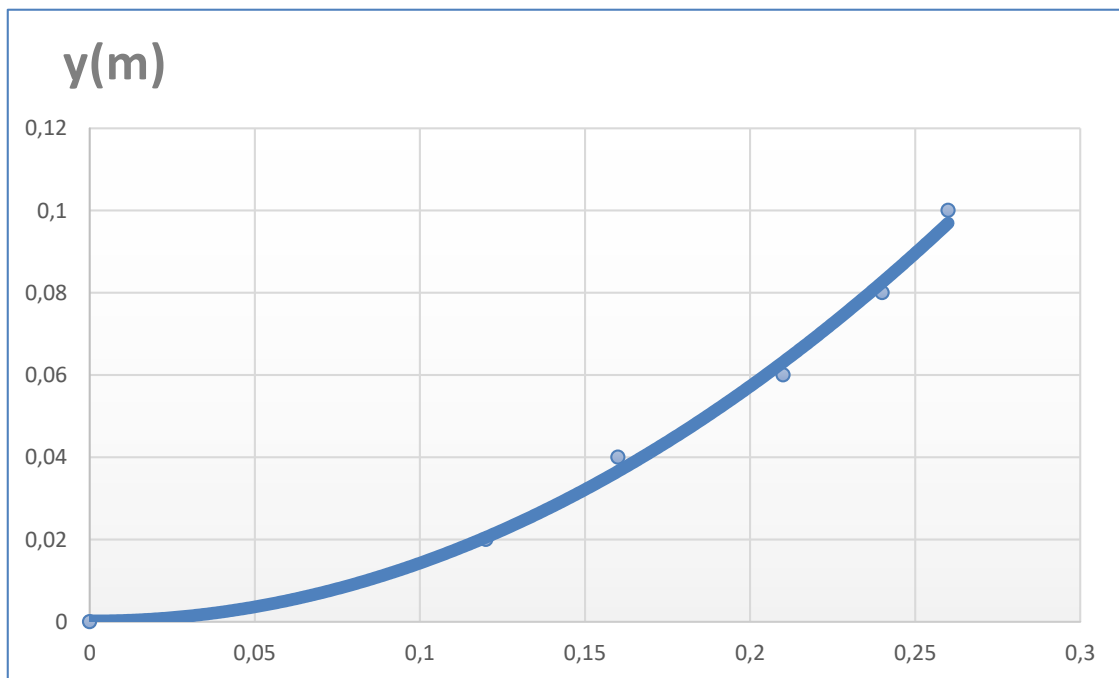
A) $mgy = \frac{1}{2}mu^2$

$x = ut$

$$x = \sqrt{2gy} \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow x = \sqrt{4Hy} \Rightarrow y = \frac{1}{4H}x^2 \Rightarrow y = x^2$$

Παραβολή

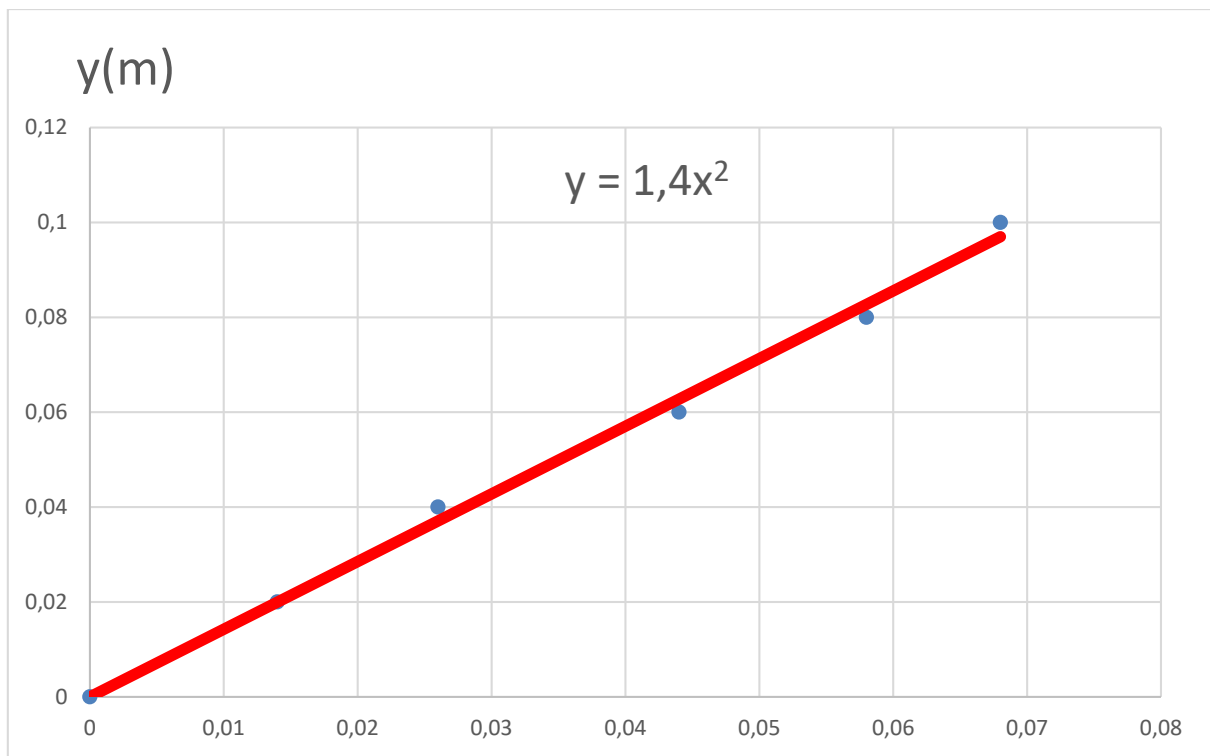
B)



Ναι επιβεβαιώνεται

Γ) Υπολογίζουμε το x^2 με στρογγυλοποίηση σε 3 δεκαδικά ψηφία:

y(m)	x(m)	x ² (m ²)
0,00	0,00	0,000
0,02	0,12	0,014
0,04	0,16	0,026
0,06	0,21	0,044
0,08	0,24	0,058
0,10	0,26	0,068



Δ) Από τη σχέση: $y = \frac{1}{4H} x^2$

Η κλίση ισούται με $1/4H$

Ε) $\frac{1}{4H} = 1,4 \Rightarrow H = 0,18 \text{ m}$

Το $H=0,18 \text{ m}$ διαφέρει από την τιμή $0,25 \text{ m}$ γιατί δεν λάβαμε υπόψη :

- Τριβή
- Αντίσταση του αέρα
- Σφάλματα στις μετρήσεις
- Περιστροφή της σφαίρας

Στα ερωτήματα Γ, Δ και Ε αν ο μαθητής σχεδιάσει το x^2 σε συνάρτηση με το y , να θεωρηθεί σωστό, αρκεί να δώσει στην συνέχεια τις σωστές απαντήσεις.