

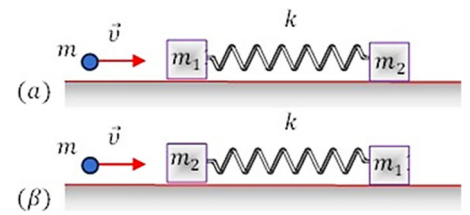
Η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης σε δύο κρούσεις.

Στο διπλανό σχήμα τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 είναι ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι σε επαφή με τα άκρα οριζοντίου ιδανικού ελατηρίου που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Σώμα Σ που έχει ίδια μάζα με το σώμα Σ_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ_1 όπως φαίνεται στο σχήμα (α) και η μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποκτά το ελατήριο είναι U_1 . Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αλλάζοντας τις θέσεις των σωμάτων όπως φαίνεται στο σχήμα (β) και σε αυτή την περίπτωση η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι U_2 . Αν είναι $U_1 = 3U_2$ η σχέση των μαζών m_1 και m_2 είναι:

α. $m_2 = 2m_1$

β. $m_2 = 3m_1$

γ. $m_2 = m_1/3$



Λύση

Σωστό το (α)

Σε κάθε περίπτωση η U γίνεται μέγιστη όταν $u_1 = u_2 = u$

Η αρχική ορμή του σώματος Σ διατηρείται:

$$mv = (m_1 + m_2 + m)u \Rightarrow m_1 v = (2m_1 + m_2)u \Rightarrow u = \frac{m_1}{2m_1 + m_2} v \quad (1)$$

Όταν είναι $U = \max$ τότε η κινητική ενέργεια του συστήματος και στις 2 περιπτώσεις είναι:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}(2m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(2m_1 + m_2)^2} v^2 \\ &\Rightarrow K = \frac{m_1}{(2m_1 + m_2)} \frac{1}{2} m_1 v^2 \end{aligned}$$

(α) Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα V

$$V = \frac{m_1 v}{2m_1} = \frac{v}{2}$$

Και κινητική ενέργεια K_A :

$$K_A = \frac{1}{2} 2m_1 V^2 = \frac{1}{2} 2m_1 \frac{v^2}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_1 v^2$$

Από ΑΔΜΕ:

$$\begin{aligned} U_1 &= K_A - K = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{m_1}{(2m_1 + m_2)} \frac{1}{2} m_1 v^2 \\ &\Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{2m_1 + m_2} \right) \end{aligned}$$

(α) Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα V'

$$V' = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$$

Και κινητική ενέργεια K_B

$$K_B = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow K_B = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{2} m_1 v^2$$

Από ΑΔΜΕ:

$$\begin{aligned} U_2 &= K_B - K = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{m_1}{(2m_1 + m_2)} \frac{1}{2} m_1 v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_2 = \left(\frac{m_1}{(m_1 + m_2)} - \frac{m_1}{2m_1 + m_2} \right) \frac{1}{2} m_1 v^2 \end{aligned}$$

$$U_1 = 3U_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{2m_1 + m_2} \right) = 3 \left(\frac{m_1}{(m_1 + m_2)} - \frac{m_1}{2m_1 + m_2} \right) \frac{1}{2} m_1 v^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{m_1}{2m_1 + m_2} = 3 \left(\frac{m_1}{(m_1 + m_2)} - \frac{m_1}{2m_1 + m_2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = -2 \frac{m_1}{2m_1 + m_2} + 3 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)(2m_1 + m_2) = -4m_1(m_1 + m_2) + 6m_1(2m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow 2m_1^2 + m_1 m_2 + 2m_1 m_2 + m_2^2 = -4m_1^2 - 4m_1 m_2 + 12m_1^2 + 6m_1 m_2$$

$$m_2^2 + m_1 m_2 - 6m_1^2 = 0$$

$$\Delta = m_1^2 + 24m_1^2 = 25m_1^2$$

$$m_2 = \frac{-m_1 + 5m_1}{2} = 2m_1 \Rightarrow m_2 = 2m_1$$