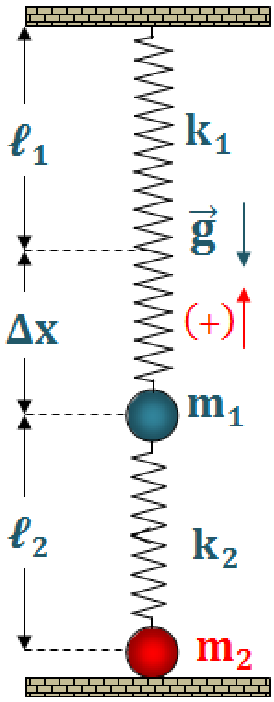
ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

ΘΕΜΑ Δ



Στο σχήμα τα μικρά σφαιρίδια με μάζες $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 3\text{kg}$ του επόμενου σχήματος είναι ακίνητα. Τα ιδανικά ελατήρια με σταθερές $k_1 = 100\text{N/m}$ και $k_2 = 300\text{N/m}$ είναι κατακόρυφα με κοινό άξονα. Το ελατήριο σταθεράς k_1 είναι επιμηκυμένο κατά Δx, ενώ το ελατήριο σταθεράς k_2 βρίσκεται στο φυσικό του μήκος ℓ_2.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω το σφαιρίδιο μάζας m_1 με ταχύτητα μέτρου υ_0, ενώ το σφαιρίδιο μάζας m_2 συνεχίζει να είναι ακίνητο.

Δ₁.Να αποδειχθεί ότι το σφαιρίδιο μάζας m_1 θα εκτελέσει κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$ και να βρεθεί το μέτρο υ_0 αν στην ανώτερη θέση της τροχιάς του σφαιριδίου το ελατήριο σταθεράς k_1 έχει μηδενική δυναμική ενέργεια.

Μονάδες 3+3=6

Δ₂.Έστω F_1, F_2 οι δυνάμεις που το σφαιρίδιο μάζας m_1 δέχεται από τα ελατήρια με σταθερές k_1, k_2 αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι οι δυνάμεις αυτές μεταβάλλονται με την απομάκρυνση x του σώματος μάζας m_1 σύμφωνα με τις σχέσεις:

$F_1 = 10 - 100x$ και $F_2 = -300x$, με $-0{,}1 \le x \le 0{,}1$ (S.I.)

Μονάδες3+3= 6

Δ₃.Να βρεθεί για το σφαιρίδιο μάζας m_1:

α)Η επιτάχυνση του, όταν $F_1 = -F_2$.

Μονάδες 3

β)Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης, όταν $F_1 = F_2$.

Μονάδες 3

Δ₄.Να βρεθεί η χρονική στιγμή που για πρώτη φορά το σφαιρίδιο μάζας m_2 χάνει στιγμιαία την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο καθώς το σφαιρίδιο μάζας m_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Μονάδες 4

Δ₅.Κάποια στιγμή που το σώμα μάζας m_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, απελευθερώνεται από το ελατήριο σταθεράς k_2, εκτελώντας νέα απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης αυτής.

Μονάδες 3

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$ και θετική η φορά προς τα πάνω.

Λύση

Δ1.

Στη θέση ισορροπίας του σφαιριδίου μάζας m_1:

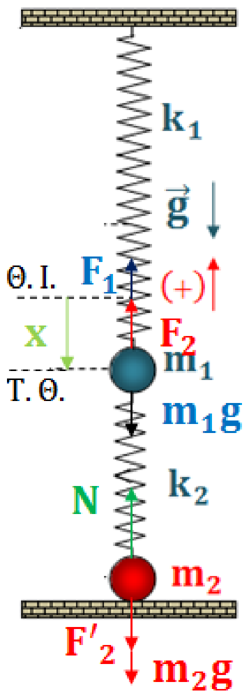
$$\Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow k_1\Delta x - m_1 g = 0 \Leftrightarrow k_1\Delta x = m_1 g \quad (1)$$

Σε μια τυχαία θέση της κίνησης του σφαιριδίου:

$$\Sigma F_1 = F_1 - F_2 - w_1 \Leftrightarrow \Sigma F_1 = k_1(\Delta x - x) - k_2 x - m_1 g \Leftrightarrow$$
$$\Sigma F_1 = k_1\Delta x - k_1 x - k_2 x - m_1 g \Leftrightarrow \Sigma F_1 = -(k_1 + k_2)x \quad (2)$$

Άρα το σφαιρίδιο μάζας m_1 θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς

$$D = k_1 + k_2 \Leftrightarrow D = 400\text{N/m}$$



Η ταχύτητα υ_0, είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} της ταλάντωσης. Άρα ισχύει:

$$\upsilon_0 = \upsilon_{max} \Leftrightarrow \upsilon_0 = \omega A \Leftrightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{D}{m_1}}A \quad (3)$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης συμπίπτει με την επιμήκυνση Δx αφού η ανώτερη ακραία θέση της ταλάντωσης συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα:

$$A = \Delta x \Leftrightarrow A = \frac{m_1 g}{k_1} \Leftrightarrow A = 0{,}1\text{m}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3) προκύπτει: $\upsilon_0 = 2\text{m/s}$

Δ2.

Το σφαιρίδιο μάζας m_1, δέχεται από το ελατήριο σταθεράς k_2 δύναμη:

$$F_2 = -k_2\Delta x_2 \text{ με } \Delta x_2 = x,$$

όπου x η απομάκρυνση της ταλάντωσης του σφαιριδίου μάζας m_1. Άρα:

$$F_2 = -300x, (\text{S.I.}) \text{ με } -0{,}1 \le x \le 0{,}1$$

Για το σφαιρίδιο μάζας m_1:

$$\Sigma F_1 = -(k_1 + k_2)x \Leftrightarrow F_1 + F_2 - m_1 g = -(k_1 + k_2)x \Leftrightarrow$$
$$F_1 - 300x - 10 = -400x \Leftrightarrow$$
$$F_1 = 10 - 100x, (\text{S.I.}) \text{ με } -0{,}1 \le x \le 0{,}1$$

Δ3.α)

1ος τρόπος

$$F_1 = -F_2 \Leftrightarrow 10 - 100x = 300x \Leftrightarrow 400x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{1}{40}\text{m}$$

Για την επιτάχυνση ισχύει: $\alpha = -\omega^2 x \Leftrightarrow \alpha = -10\text{m/s}^2$

2ος τρόπος

$$\Sigma F_1 = m_1\alpha \Leftrightarrow F_1 + F_2 - m_1 g = m_1\alpha \Leftrightarrow -m_1 g = m_1\alpha \Leftrightarrow \alpha = -g$$
$$\Leftrightarrow \alpha = -10\text{m/s}^2$$

β)Είναι:

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow 10 - 100x = -300x \Leftrightarrow x = \frac{1}{20}\text{m}$$

Για τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \Leftrightarrow U = 0{,}5\text{J}$$

Δ4.Για Το σφαιρίδιο μάζας m_1:

$$\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow |N| + F'_2 - m_2 g = 0 \Leftrightarrow |N| = -F'_2 + m_2 g \Leftrightarrow$$
$$|N| = F_2 + m_2 g \Leftrightarrow$$
$$|N| = 30 - 300x\ (\text{S.I.}) \text{ με } -0{,}1 \le x \le 0{,}1$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση υπάρχει θέση της ταλάντωσης του σφαιριδίου μάζας m_1, όπου το σφαιρίδιο μάζας m_2 χάνει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο. Στη θέση αυτή ισχύει:

$$|N| = 0 \Leftrightarrow 30 - 300x = 0 \Leftrightarrow 300x = 30 \Leftrightarrow x = 0{,}1m = +A$$

Εφόσον η ταλάντωση του σφαιριδίου μάζας m_1 αρχίζει από την θέση ισορροπίας με θετική φορά ο ζητούμενος χρόνος είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\pi}{40}s$$

Δ5. Η θέση ισορροπίας και η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης συμπίπτουν με αυτές της αρχικής ταλάντωσης. Όμως η κυκλική συχνότητα μεταβάλλεται, αφού μεταβάλλεται η σταθερά επαναφοράς. Άρα:

$$\upsilon'_{max} = \omega' A' \Leftrightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} A' \Leftrightarrow$$

$$A' = 0{,}2m$$