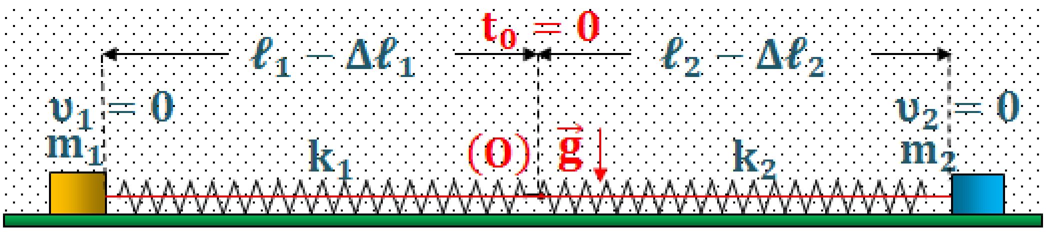
ΘΕΜΑ Β

Δυο απλοί αρμονικοί ταλαντωτές $m_1 - k_1$ και $m_2 - k_2$, έχουν συνδεθεί στο ελεύθερο άκρο (O), των ιδανικών τους ελατηρίων. Με ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα που έχει δεθεί στα σώματα με μάζες m_1 και m_2, έχουμε συσπειρώσει τα ελατήρια με σταθερές k_1, k_2 κατά $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$ αντίστοιχα, όπως δείχνει το σχήμα.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, κόβουμε το νήμα οπότε τα σώματα αρχίζουν να κινούνται λόγω των ελατηριακών δυνάμεων που τους ασκούνται, ενώ το σημείο (O) συνεχίζει να παραμένει ακίνητο.

1) Αν p_1 και p_2 οι ορμές των σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα να δειχθεί ότι ισχύει:

$$p_1 = -p_2$$

2) Αν E_1 και E_2 οι ενέργειες των ταλαντώσεων των σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα να δειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

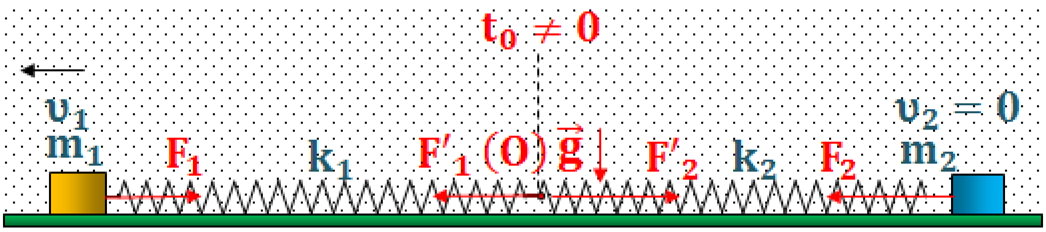
Λύση

1) Το σημείο (O) παραμένοι ακίνητο. Άρα από τον πρώτο νόμο του Newton, έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F'_1 + F'_2 = 0 \Leftrightarrow -F_1 - F_2 = 0 \Leftrightarrow F_1 + F_2 = 0 \Leftrightarrow \Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dP_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \Delta P_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow P_{\sigma\upsilon\sigma\tau(\tau\varepsilon\lambda)} = P_{\sigma\upsilon\sigma\tau(\alpha\rho\chi)} \Leftrightarrow p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1 = -p_2 \quad (1)$$



2) Τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτη $A_1 = \Delta\ell_1$ και $A_2 = \Delta\ell_2$ αντίστοιχα. Άρα έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow p_1 = -p_2 \Leftrightarrow m_1 \upsilon_1 = -m_2 \upsilon_2 \Leftrightarrow$$
$$m_1 \omega_1 \Delta\ell_1 \sigma\upsilon\nu(\omega_1 t + \varphi_1) = -m_2 \omega_2 \Delta\ell_2 \sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \varphi_2) \Leftrightarrow$$
$$m_1 \omega_1 \Delta\ell_1 \sigma\upsilon\nu(\omega_1 t + \varphi_1) = m_2 \omega_2 \Delta\ell_2 \sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \pi + \varphi_2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m_1 \omega_1 \Delta\ell_1 = m_2 \omega_2 \Delta\ell_2 \\ \omega_1 = \omega_2 \\ \varphi_1 = \pi + \varphi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \Delta\ell_1 = m_2 \Delta\ell_2 \\ \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}} \\ \Delta\varphi = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1} \\ \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{k_1}{k_2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1} \quad (2)$$

Για τις ενέργειες των ταλαντώσεων είναι:

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{1}{2} k_1 \Delta\ell_1{}^2 \\ E_2 = \dfrac{1}{2} k_2 \Delta\ell_2{}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_2}{k_1}$$