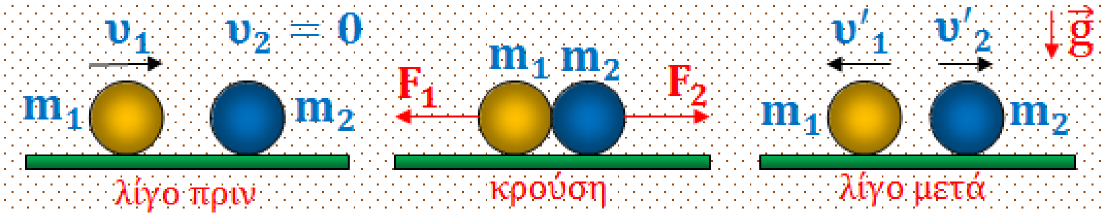
Η ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

ΘΕΜΑ

Μια μικρή σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα υ_1 στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Η σφαίρα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας m_2. Αμέσως μετά την κρούση οι σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 αποκτούν ταχύτητες υ_1' και υ_2' αντίστοιχα.



1) **Να αποδειχθεί ότι κατά την διάρκεια της επαφής των σφαιρών οι ταχύτητες των σφαιρών δίνονται από τις σχέσεις:**

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 + (1 - x)m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (1)$$

$$\upsilon_2' = \frac{x m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (2)$$

με $0 \le x \le 2$

Να βρεθεί η σχέση των ταχυτήτων υ_1' και υ_2' όταν $x = 1$.

2) **Να αποδειχθεί ότι το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας K_1 της σφαίρας μάζας m_1 που μεταφέρθηκε στη σφαίρα μάζας m_2 δίνεται από τη σχέση:**

$$\frac{K_2'}{K_1} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}x^2 \quad (3)$$

και να γίνει το διάγραμμα

$$\frac{K_2'}{K_1} = f(x)$$

3) **Να αποδειχθεί ότι το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας K_1 της σφαίρας μάζας m_1 που μετατράπηκε σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση:**

$$\frac{U}{K_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(-x^2 + 2x) \quad (4)$$

και να γίνει το διάγραμμα:

$$\frac{U}{K_1} = f(x)$$

και να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή του κλάσματος.

4) Να αποδειχθεί ότι τα έργα των δυνάμεων F_1 και F_2 που δέχονται κατά τη διάρκεια της κρούσης οι σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, δίνονται από τις σχέσεις:

$$W_{F_1} = \frac{[(x-2)m_2 - 2m_1]xm_2}{(m_1+m_2)^2}K_1 \quad (5)$$

$$W_{F_2} = \frac{x^2 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}K_1 \quad (6)$$

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $W_{F_1} = -W_{F_2}$

Λύση

1) Εφαρμόζουμε την Α. Δ. Ο. για την κρούση:

$$p_{\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \pi\rho\iota\nu} = p_{\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Leftrightarrow m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) στην (7) έχουμε:

$$m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = m_1\frac{m_1 + (1-x)m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 + m_2\frac{xm_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Leftrightarrow$$

$$m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}[m_1 + (1-x)m_2 + xm_2] \Leftrightarrow$$

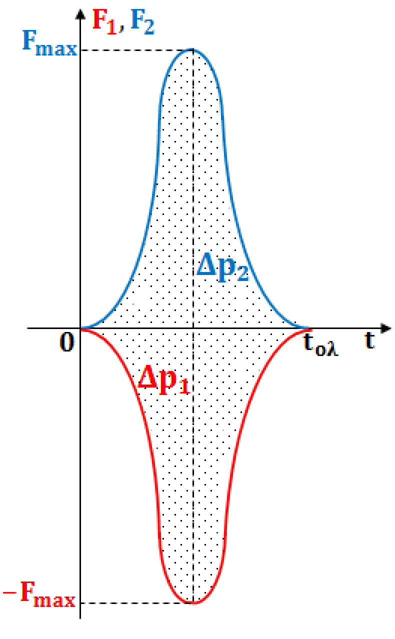
$$m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}(m_1+m_2) \Leftrightarrow$$

$$m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = m_1\upsilon_1$$

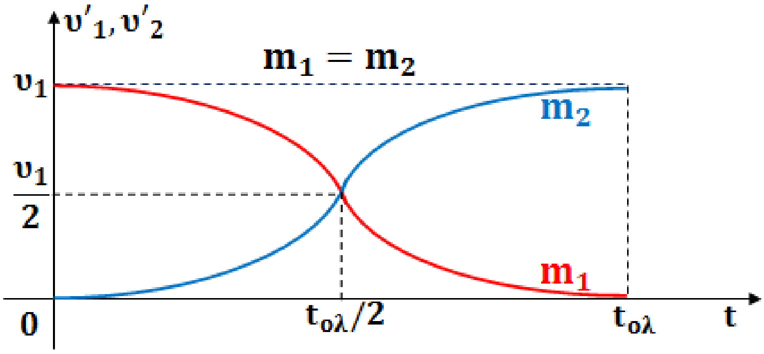
Για $x = 1$ οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:

$$\upsilon_1' = \upsilon_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$$

Στο δοπλανό διάγραμμα βλέπουμε πως μεταβάλλονται οι δυνάμεις F_1 και F_2 σε συνάρτηση με το χρόνο επαφής των σφαιρών.



Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε πως μεταβάλλονται οι ταχύτητες υ_1' και υ_2' σε συνάρτηση με το χρόνο επαφής των σφαιρών όταν $m_1 = m_2$.

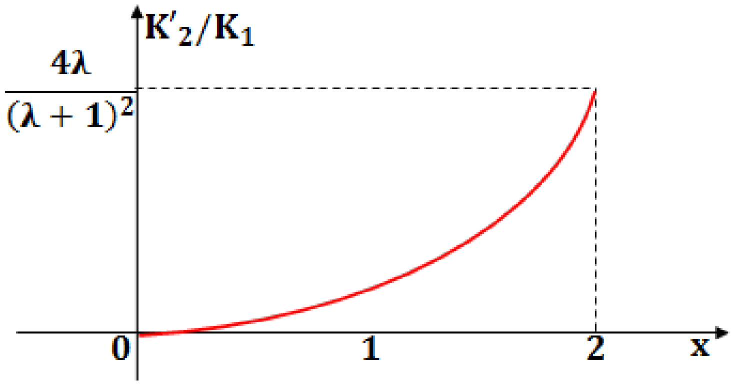


2) Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας K_1 της σφαίρας μάζας m_1 που μεταφέρθηκε στη σφαίρα μάζας m_2 είναι:

$$\frac{K_2'}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}m_2{\upsilon_2'}^2}{\frac{1}{2}m_1{\upsilon_1}^2} \Leftrightarrow \frac{K_2'}{K_1} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{K_2'}{K_1} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{xm_1}{m_1+m_2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{K_2'}{K_1} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}x^2$$

Το ζητούμενο διάγραμμα για $m_1 = \lambda m_2$, είναι:



3) Από την Α. Δ. Μ. Ε. έχουμε:

$$K_1 = K_1' + K_2' + U \Leftrightarrow U = K_1 - K_1' - K_2' \quad (8)$$

Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας K_1 της σφαίρας μάζας m_1 που μετατράπηκε σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης είναι:

$$\frac{U}{K_1} = \frac{K_1 - K_1' - K_2'}{K_1} \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \frac{U}{K_1} = 1 - \frac{K_1'}{K_1} - \frac{K_2'}{K_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{U}{K_1} = 1 - \frac{\frac{1}{2}m_1{\upsilon_1'}^2}{\frac{1}{2}m_1{\upsilon_1}^2} - \frac{\frac{1}{2}m_2{\upsilon_2'}^2}{\frac{1}{2}m_1{\upsilon_1}^2} \Leftrightarrow \frac{U}{K_1} = 1 - \left(\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1}\right)^2 - \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1}\right)^2 \overset{(2),(3)}{\Longleftrightarrow}$$

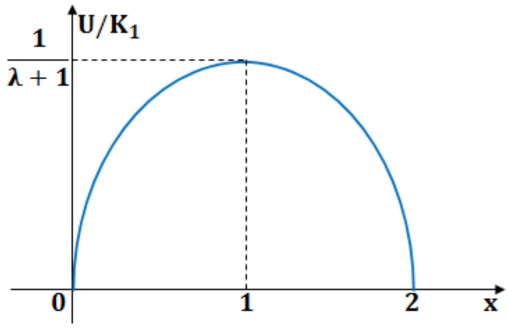
$$\frac{U}{K_1} = 1 - \left(\frac{xm_1}{m_1+m_2}\right)^2 - \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{xm_1}{m_1+m_2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{U}{K_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(-x^2+2x)$$

Για $x = 1$ το κλάσμα μεγιστοποιείται:

$$\left(\frac{U}{K_1}\right)_{max} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \left(\frac{U}{K_1}\right)_{max} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα για $m_1 = \lambda m_2$, είναι:



4) Για το έργο της F_1 έχουμε:

$$W_{F_1} = \Delta K_1 \Leftrightarrow W_{F_1} = K_1' - K_1 \Leftrightarrow W_{F_1} = \frac{1}{2}m_1{\upsilon_1'}^2 - \frac{1}{2}m_1{\upsilon_1}^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$W_{F_1} = \frac{1}{2}m_1{\upsilon_1}^2\frac{[(x-2)m_2 - 2m_1]xm_2}{(m_1+m_2)^2} \Leftrightarrow$$

$$W_{F_1} = \frac{[(x-2)m_2 - 2m_1]xm_2}{(m_1+m_2)^2}K_1$$

$$W_{F_2} = \Delta K_2 \Leftrightarrow W_{F_1} = K_2' - K_2 \Leftrightarrow W_{F_2} = K_2' \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$W_{F_2} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}x^2\,K_1$$

Είναι:

$$W_{F_1} = -W_{F_2} \Leftrightarrow \frac{[(x-2)m_2 - 2m_1]xm_2}{(m_1+m_2)^2}K_1 = -\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}x^2\,K_1 \Leftrightarrow$$

$$[(x-2)m_2 - 2m_1]xm_2 = -m_1 m_2 x^2 \Leftrightarrow x(x-2)(m_1+m_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Συνεπώς στο τέλος της κρούσης τα έργα είναι αντίθετα.

Σχόλιο: Απόδειξη της σχέσης

$$\upsilon_1' + \upsilon_1 = \upsilon_2' + \upsilon_2$$

Με τη βοήθεια των Α. Δ. Ο. και Α. Δ. Μ. Ε. σε μια κεντρική ελαστική κρούση έχουμε:

$$\begin{cases}\Delta p_1 = -\Delta p_2\\ \Delta K_1 = -\Delta K_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta p_1 = -\Delta p_2\\ \frac{1}{2}m_1{\upsilon_1'}^2 - \frac{1}{2}m_1{\upsilon_1}^2 = -\left(\frac{1}{2}m_2{\upsilon_2'}^2 - \frac{1}{2}m_2{\upsilon_2}^2\right)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\Delta p_1 = -\Delta p_2\\ m_1({\upsilon_1'}^2 - {\upsilon_1}^2) = -m_2({\upsilon_2'}^2 - {\upsilon_2}^2)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\Delta p_1 = -\Delta p_2\\ m_1(\upsilon_1' - \upsilon_1)(\upsilon_1' + \upsilon_1) = -m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)(\upsilon_2' + \upsilon_2)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\Delta p_1 = -\Delta p_2\\ \Delta p_1(\upsilon_1' + \upsilon_1) = -\Delta p_2(\upsilon_2' + \upsilon_2)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_1' + \upsilon_1 = \upsilon_2' + \upsilon_2$$