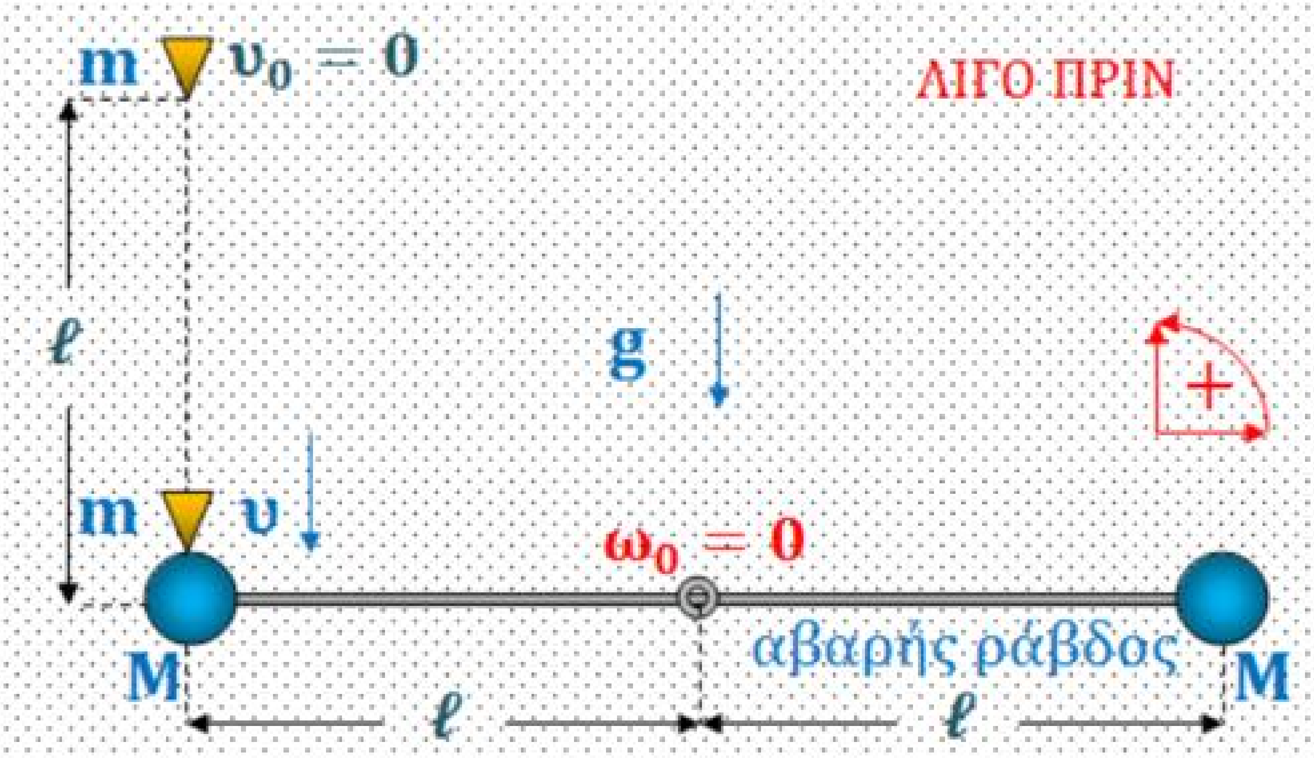
ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

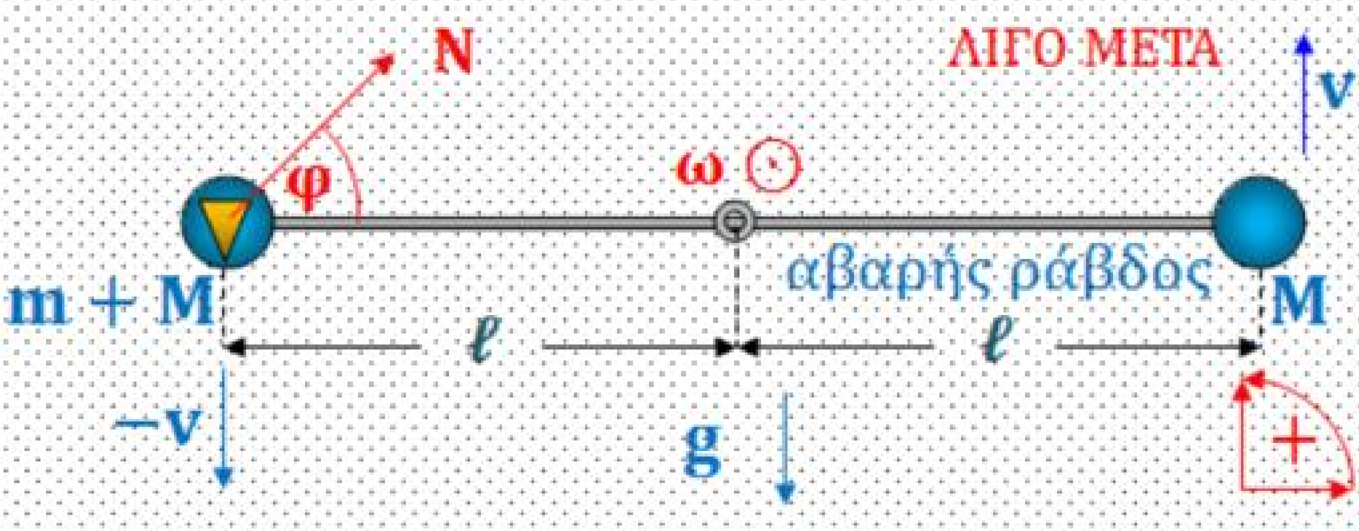
ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

ΘΕΜΑ Β

Στ' άκρα μιας οριζόντιας αβαρούς ράβδου μήκους 2ℓ έχουμε στερεώσει δυο μικρά σφαιρίδια μάζας M. Το σύστημα αυτό ισορροπεί και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Ένα μικρό κωνικό σώμα μάζας m, αφήνεται να κινηθεί από ύψος ℓ πάνω από το αριστερό σφαιρίδιο του συστήματος ράβδος–σφαιρίδια.



Η κρούση είναι πλαστική και ακαριαία. Αμέσως μετά την κρούση και η ράβδος ασκεί στο παραγόμενο συσσωμάτωμα δύναμη μέτρου N, που σχηματίζει γωνία $\varphi = 45°$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται $εφ45° = 1$.



1)Ο λόγος m/M είναι ίσος με:

α) 2 β) 3 γ) 4

2)Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που είχε το κωνικό σώμα λίγο πριν την κρούση και μετατράπηκε σε θερμότητα εξαιτίας της είναι ίσο με:

α) 50% β) 64% γ) 75%

3)Τη στιγμή που το σύστημα ράβδος-σώματα ακινητοποιείται στιγμιαία μετά την κρούση η ράβδος σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία:

α) 30° β) 45° γ) 60°

4)Το ελάχιστο ύψος από το οποίο πρέπει να αφεθεί το κωνικό σώμα, ώστε μετά την κρούση το σύστημα ράβδος-σώματα να εκτελέσει ανακύκλωση είναι:

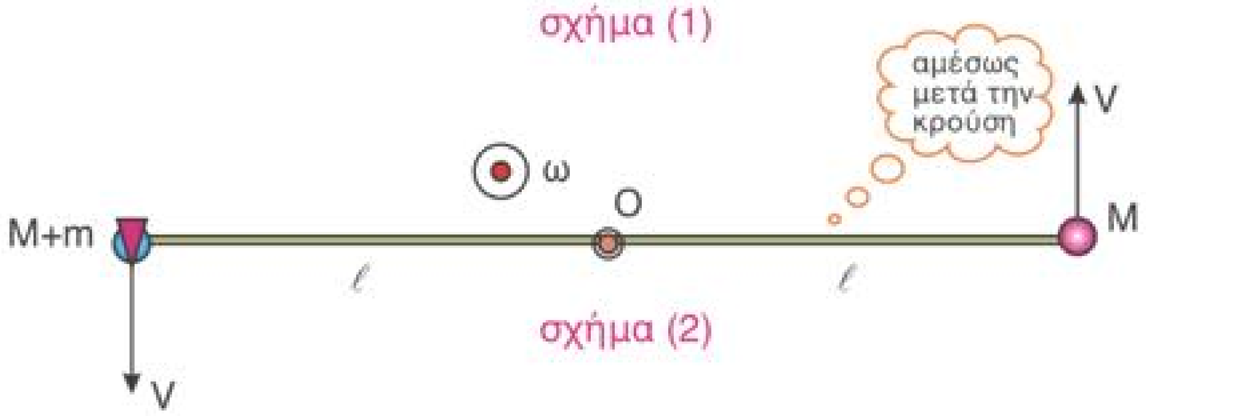
α) 2ℓ β) 4ℓ γ) 8ℓ

απαντήσεις

Δ1. *Υπολογίζουμε το μέτρο u της ταχύτητας του κωνικού σώματος ελάχιστα πριν συγκρουστεί με το σφαιρίδιο που βρίσκεται στο αριστερό άκρο της ράβδου, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας:*

$$\frac{1}{2}mu^2 = mg\ell \Leftrightarrow |u| = \sqrt{2g\ell} \quad (1)$$

σχήμα (1)



σχήμα (2)

Το σύστημα αμέσως μετά την κρούση αρχίζει να περιστρέφεται (anticlock wise), έχοντας αποκτήσει στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Το συσσωμάτωμα και το σφαιρίδιο στο δεξί άκρο της ράβδου, αποκτούν αντίθετες ταχύτητες μέτρου V, επειδή ισχύει:

$$\begin{pmatrix} |V_1| = \omega \cdot \ell \\ |V_2| = \omega \cdot \ell \end{pmatrix} \Leftrightarrow |V_1| = |V_2| = V$$

Για την κρούση, εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής:

$$\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετά} \Leftrightarrow mu\ell = (m+M)V\ell + MV\ell \Leftrightarrow mu = (2M+m)V \quad (2)$$

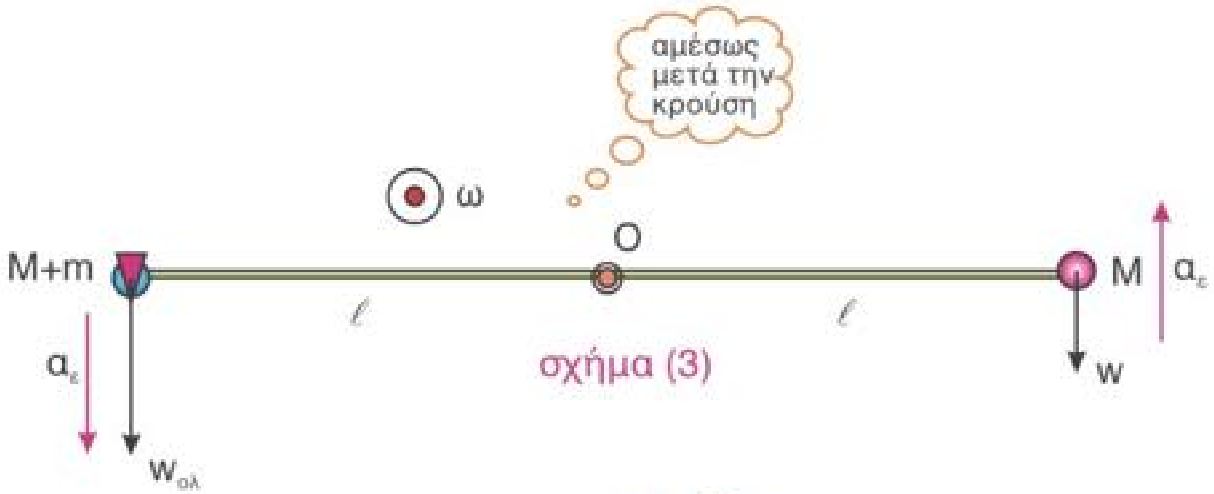
Αμέσως μετά την κρούση, όταν η ράβδος βρίσκεται ακόμη στην οριζόντια διεύθυνσή της, το συσσωμάτωμα και το σφαιρίδιο αποκτούν αντίθετες στιγμιαίες επιτρόχιες επιταχύνσεις μέτρου a_ε:

$$\left|V_1\right|=\left|V_2\right|=V \Leftrightarrow \frac{\left|dV_1\right|}{dt}=\frac{\left|dV_2\right|}{dt}=\frac{dV}{dt} \Leftrightarrow \left|a_1\right|=\left|a_2\right|=a_\varepsilon$$

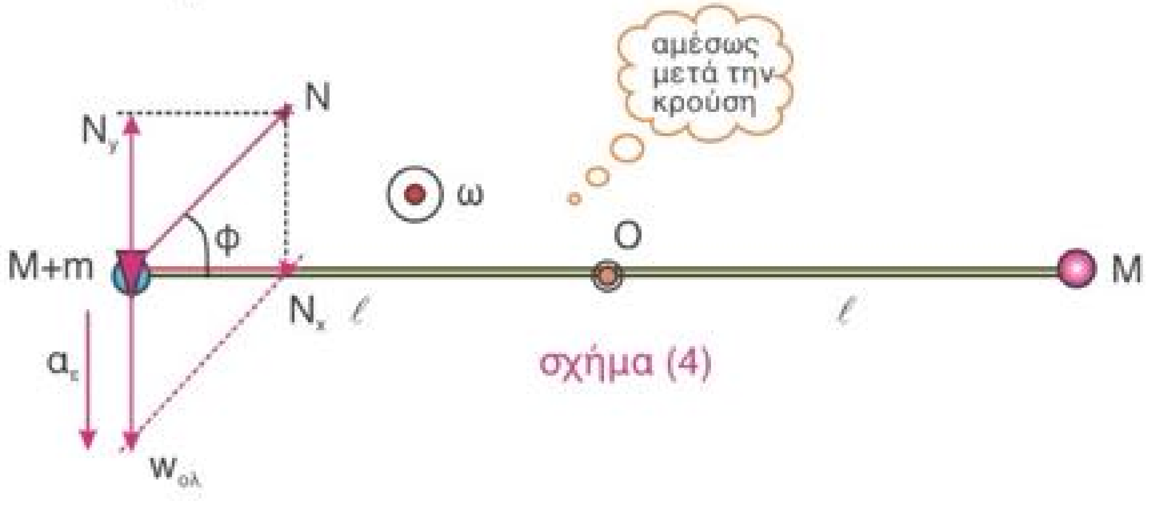
Αφού λοιπόν σχεδιάσουμε τις <u>εξωτερικές δυνάμεις</u> που ασκούνται στο σύστημα ράβδου-συσσωμάτωμα–σφαιρίδιο, εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής <u>για σύστημα</u>, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα (3):

$$\Sigma F=\left(M+m\right)a_\varepsilon+Ma_\varepsilon \Leftrightarrow w_{o\lambda}-w=\left(2M+m\right)a_\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\left(M+m\right)g-Mg=\left(2M+m\right)a_\varepsilon \Leftrightarrow a_\varepsilon=\frac{mg}{2M+m} \quad (3)$$



σχήμα (3)



σχήμα (4)

Στη συνέχεια, μελετάμε χωριστά το <u>συσσωμάτωμα</u>. Παρατηρούμε λοιπόν ότι δέχεται δύο δυνάμεις το βάρος του μέτρου $w_{o\lambda}$ και τη δύναμη από τη ράβδο μέτρου N, η οποία σχηματίζει γωνία φ με τη διεύθυνση της ράβδου. Αναλύουμε τη δύναμη N σε δύο συνιστώσες μέτρου N_x και N_y.

Στην οριζόντια διεύθυνση (x) της ράβδου η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με την κεντρομόλο:

$$\Sigma F_x = (M+m)a_k \Leftrightarrow N_x = (M+m)a_k \xrightarrow{(3)} N_x = (M+m)\cdot\frac{mg}{2M+m} \quad (4)$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση (y) ισχύει:

$$\Sigma F_y = (M+m)a_\varepsilon \Leftrightarrow (M+m)g - N_y = (M+m)a_\varepsilon \quad (5)$$

Αφού όμως:

$$|N_x| = |N_y| = N\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Από τις σχέσεις (3), (4) και (5) καταλήγουμε στη σχέση:

$$(M+m)g - N_x = (M+m)a_\varepsilon \Leftrightarrow (M+m)g - (M+m)\cdot\frac{mg}{2M+m} = (M+m)\cdot\frac{mg}{2M+m} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{m}{2M+m} = \frac{m}{2M+m} \Leftrightarrow M(2M+m) = m^2 \Leftrightarrow \boxed{2M^2 + Mm - m^2 = 0}$$

Όμως από το τριώνυμο προκύπτει:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = m^2 + 8m^2 \Leftrightarrow \Delta = 9m^2$$

και τελικά:

$$M = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow M = \frac{-m+3m}{4} \Leftrightarrow M = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \boxed{m = 2M}$$

Δ2. *Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση και από τη σχέση (2) καταλήγουμε ότι:*

$$mu = (2M+m)V \Leftrightarrow V = \frac{mu}{2M+m} \Leftrightarrow V = \frac{u}{2}$$

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}mu^2 \Leftrightarrow K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}2Mu^2 \Leftrightarrow K_{\pi\rho\iota\nu} = Mu^2 \Leftrightarrow K_{\pi\rho\iota\nu} = K$$

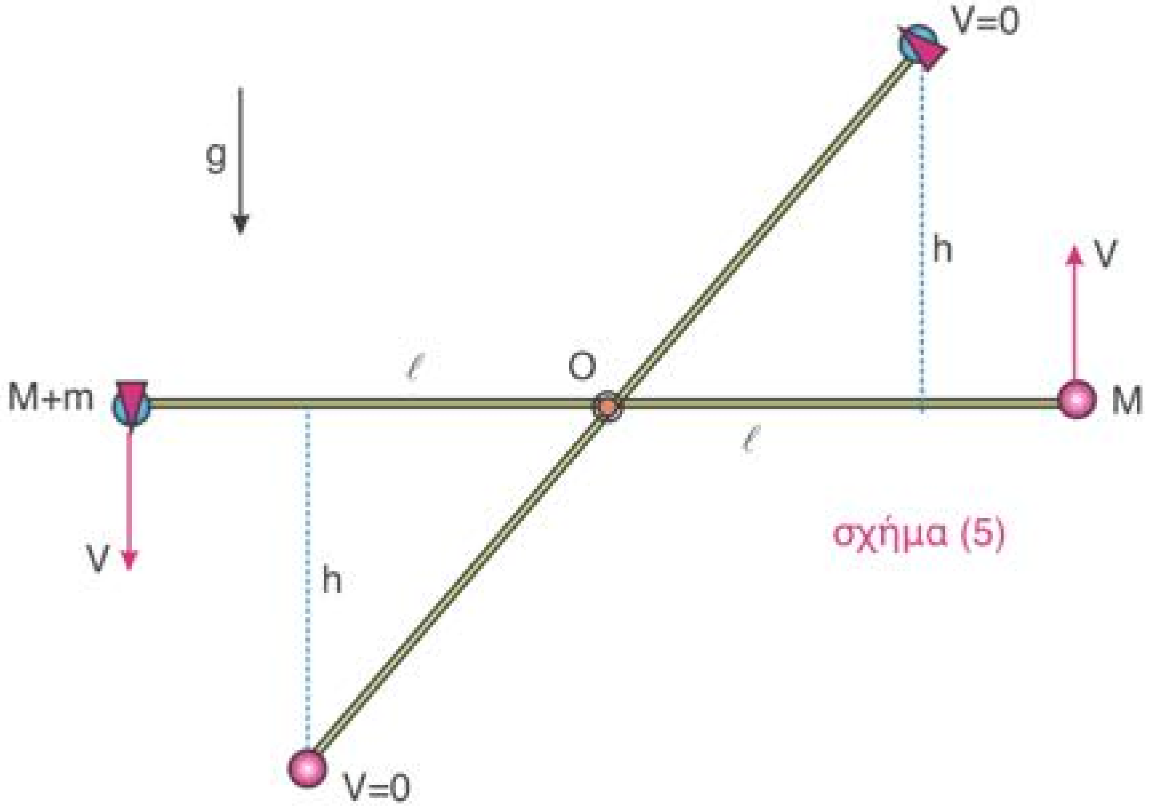
$$K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}MV^2 \xrightarrow{m=2M} K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}\cdot 3MV^2 + \frac{1}{2}\cdot MV^2 = 2MV^2$$

$$K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 2MV^2 \Leftrightarrow K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 2M\frac{u^2}{4} \Leftrightarrow K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{K}{2}$$

Οπότε

$$\frac{E_{\alpha\pi\omega\lambda}}{K_{\pi\rho\iota\nu}}100\% = \frac{|\Delta K|}{K_{\pi\rho\iota\nu}}100\% = \frac{\frac{K}{2}}{K}100\% = 50\% \Leftrightarrow \boxed{E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 50\%\cdot K_{\pi\rho\iota\nu}}$$

Δ3. *Στο επόμενο σχήμα (5) θεωρούμε ότι το σύστημα ακινητοποιείται στιγμιαία όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την αρχική οριζόντια διεύθυνσή της. Οπότε εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ:*



σχήμα (5)

$$K_{\tau\varepsilon\lambda,\sigma\upsilon\sigma\tau.} - K_{\alpha\rho\chi,\sigma\upsilon\sigma\tau.} = W_{\sigma\upsilon\sigma/\tau o\varsigma} + W_{\sigma\varphi} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}MV^2 = Mg\ell\cdot\eta\mu\varphi - (M+m)g\ell\cdot\eta\mu\varphi \xrightarrow{m=2M}$$

$$-\frac{1}{2}3M\cdot V^2 - \frac{1}{2}MV^2 = Mg\ell\cdot\eta\mu\varphi - 3Mg\ell\cdot\eta\mu\varphi \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}3M\cdot\frac{u^2}{4} - \frac{1}{2}M\frac{u^2}{4} = -2Mg\ell\cdot\eta\mu\varphi \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}Mu^2 = 2Mg\ell\cdot\eta\mu\varphi \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2}\cdot 2g\ell = 2g\ell\cdot\eta\mu\varphi \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\varphi = 30^o}$$

Παρατήρηση: *Δηλαδή η ράβδος θα στραφεί συνολικά μέχρι να ακινητοποιηθεί κατά γωνία* ***210°.***

Δ4. *Στο επόμενο σχήμα (6), θέλουμε το σύστημα μόλις που να καταφέρει να εκτελέσει ανακύκλωση. Για το σκοπό αυτό ακινητοποιείται στιγμιαία όταν η ράβδος βρίσκεται στη κατακόρυφη διεύθυνσή της, δηλαδή σχηματίζει ορθή γωνία με την αρχική οριζόντια διεύθυνσή της. Οπότε εφαρμόζοντας και πάλι το ΘΜΚΕ:*

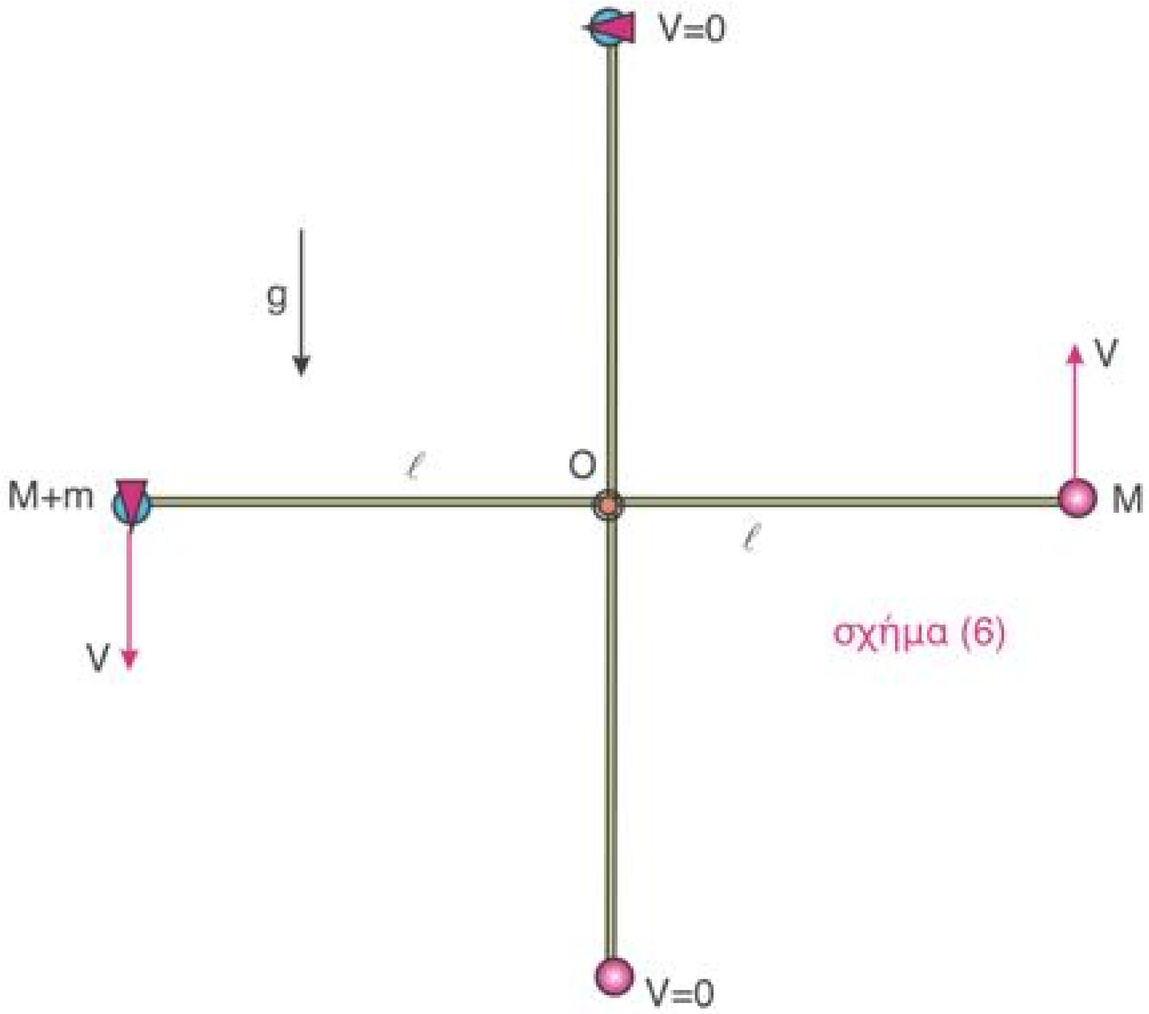
$$K_{\tau\varepsilon\lambda,\sigma\upsilon\sigma\tau.} - K_{\alpha\rho\chi,\sigma\upsilon\sigma\tau.} = W_{\sigma\upsilon\sigma/\tau o\varsigma} + W_{\sigma\varphi} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left(M+m\right)V^2 - \frac{1}{2}MV^2 = Mg\ell - \left(M+m\right)g\ell \xrightarrow{m=2M}$$

$$-\frac{1}{2}3M\cdot V^2 - \frac{1}{2}MV^2 = Mg\ell - 3Mg\ell \xrightarrow{V=\frac{u}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}3M\cdot\frac{u^2}{4} - \frac{1}{2}M\frac{u^2}{4} = -2Mg\ell \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}Mu^2 = 2Mg\ell \quad (6)$$



σχήμα (6)

Αν το αρχικό σφαιρίδιο αφεθεί να πέσει ελεύθερα από ύψος h τότε με το ΘΜΚΕ καταλήγουμε ότι το μέτρο της ταχύτητάς του u είναι:

$$\frac{1}{2}mu^2 = mgh \Leftrightarrow \left|u\right| = \sqrt{2gh} \quad (7)$$

Οπότε

$$\frac{1}{2}Mu^2 = 2Mg\ell \Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}gh = 2g\ell \Leftrightarrow \boxed{h=2\ell}$$