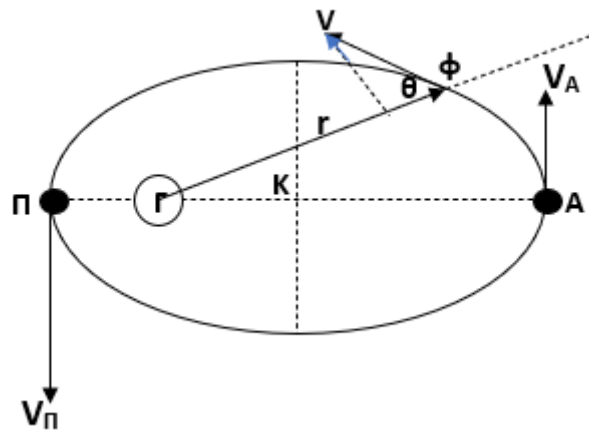




Ελλειπτική τροχιά δορυφόρου γύρω από τη γη. Γ η γη στη μία εστία και Ε η άλλη εστία.

Μεγάλος ημιάξονας $KΠ = KΑ = α$, $γ = KΓ$, Γ η γη στη μία εστία , Π το περίγειο της τροχιάς του δορυφόρου ή η πιο κοντινή απόσταση του δορυφόρου στη γη, Α το απόγειο της τροχιάς του δορυφόρου ή η πιο μακρινή απόσταση του δορυφόρου από τη γη, $ΓΠ = r_Π$, $ΓΑ = r_Α$.

Α.Δείξτε ότι $r_Π = α(1-e)$ και $r_Α = α(1+e)$ όπου e η εκκεντρότητα της έλλειψης.

Β. Γιατί κατά την κίνηση του δορυφόρου ισχύουν η αρχή διατήρησης της μηχανικής του ενέργειας και η αρχή διατήρησης της στροφορμής;

Γ. Εργαζόμενοι στο περίγειο και στο απόγειο δείξτε ότι η μηχανική ενέργεια E του δορυφόρου δίνεται από τη σχέση $E = -\frac{GMm}{2a}$, η ταχύτητα

από τη σχέση $V = \sqrt{GM(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})}$ και η στροφορμή του από τη σχέση

$L = m \sqrt{GMa(1 - e^2)}$ όπου M η μάζα της γης και m η μάζα του δορυφόρου.

Δ. Τεχνητός δορυφόρος πρόκειται να τοποθετηθεί στο περίγειο Π μιας ελλειπτικής τροχιάς σε ύψος $h = 329$ km από την επιφάνεια της γης. Τι ταχύτητα $V_Π$ πρέπει να έχει στο περίγειο ώστε η τροχιά του να έχει εκκεντρότητα $e = 0,2$; Ακτίνα γης $R = 6371$ km, $GM = 4 \times 10^{14}$ Nm²/kg

Ε. Κάποια στιγμή που ο δορυφόρος πλησιάζει προς τη γη το διάνυσμα θέσης r και η ταχύτητα V σχηματίζουν γωνία $\phi = 100^\circ$. Να βρεθούν το r και η V .

ΛΥΣΗ

A. $\Gamma K = \gamma$, $e = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = e\alpha$, $\Gamma\Pi = K\Pi - K\Gamma = \alpha - \gamma = \alpha - e\alpha \Rightarrow r_{\Pi} = \alpha(1-e)$ (1)

$\Gamma A = K A + K\Gamma = \alpha = \alpha e \Rightarrow r_A = \alpha(1+e)$ (2)

B. Η ελκτική δύναμη της γης στον δορυφόρο είναι συντηρητική με αποτέλεσμα η μηχανική του ενέργεια να διατηρείται. Επίσης η δύναμη αυτή διέρχεται από το σημείο περιστροφής του δορυφόρου και εφόσον δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις η συνισταμένη των ροπών να είναι μηδέν με αποτέλεσμα η στροφορμή του δορυφόρου να διατηρείται σταθερή.

Γ. $E = K + U = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r} \Rightarrow V^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}$ (3)

$L_{\Pi} = L_A \Rightarrow mV_{\Pi}r_{\Pi} = mV_Ar_A \Rightarrow V_{\Pi}^2r_{\Pi}^2 = V_A^2r_A^2$ (4)

(3)(4) $\Rightarrow (\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r_{\Pi}})r_{\Pi}^2 = (\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r_A})r_A^2 \Rightarrow$

$\frac{2E}{m}(r_{\Pi}^2 - r_A^2) = 2GM(r_A - r_{\Pi}) \Rightarrow \frac{2E}{m}(r_{\Pi} - r_A)(r_{\Pi} + r_A) = -2GM(r_{\Pi} - r_A) \Rightarrow$

$\frac{2E}{m}2a = -2GM \Rightarrow E = -\frac{GMm}{2a}$ (5)

(5) $\Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow V = \sqrt{GM(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})}$ (6)

$L = mV_{\Pi}r_{\Pi} = m\sqrt{GM(\frac{2}{r_{\Pi}} - \frac{1}{a})}r_{\Pi} = m\sqrt{GM(\frac{2}{r_{\Pi}} - \frac{1}{a})a^2(1-e)^2} =$

$m\sqrt{GM(\frac{2a-a+ae}{a(1-e)})a^2(1-e)^2} \Rightarrow L = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$ (7)

Δ. $r_{\Pi} = R + h = 6700 \text{ km} = 6.700.000 \text{ m}$, $r_{\Pi} = \alpha(1-e) \Rightarrow \alpha = 8375 \text{ km} = 8.375.000 \text{ m}$

(6) $\Rightarrow V_{\Pi} = 8464 \text{ m/s}$

Ε. Η κάθετη στο r συνιστώσα της ταχύτητας είναι $V_k = V\eta\mu\theta = V\eta\mu\phi = 0,9848V$, οπότε $L = 0,9848 mVr$ (8)

Όπου $L = m\sqrt{GMa(1-e^2)} = m56.709.787.515 \Rightarrow$ (8)

$Vr = \Rightarrow V = 57.584.627.397,2/r$ (9)

(6) $\Rightarrow (57.584.627.397,2/r)^2 = 4 \times 10^{14}(2/r - 1/8.375.000) \Rightarrow$

$8.290.000/r^2 = 2/r - 1,194 \times 10^{-7} \Rightarrow 1,194 \times 10^{-7}x^2 - 2x + 8.290.000 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 9120000 \text{ m} = 9120 \text{ km}$, $x_2 = 7530 \text{ km}$

Αποδεκτή η $r = 9120 \text{ km}$ κοντά στο απόγειο $r_A = \alpha(1+e) = 10.050 \text{ km}$

Η $r = 7530 \text{ km}$ που είναι κοντά στο περίγειο και αντιστοιχεί σε γωνία $\phi = 80^\circ$ καθώς παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο.

(6) $\Rightarrow$ για $r = 9.120.000 \text{ m}$ **$V = 6321 \text{ m/s} = 6,321 \text{ km/s}$**