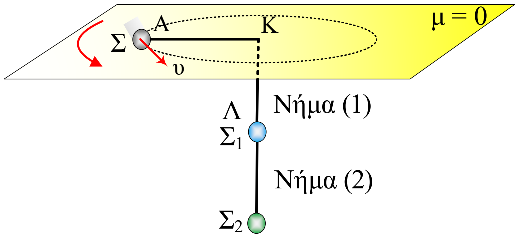
Μία ιδιόμορφη ταλάντωση.



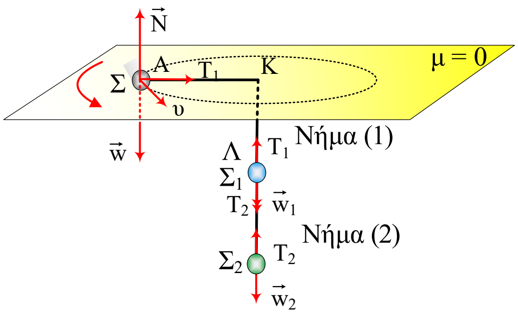
Το σφαιρίδιο Σ μάζας m κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο τραπέζι εκτελώντας κυκλική ομαλή κίνηση ακτίνας (ΚΑ) $= \ell = 0{,}4$ m, δεμένο στο άκρο Α αβαρούς και μη εκτατού νήματος (1) μήκους $L = 3\ell$ που περνάει από λεία τρύπα του τραπεζιού. Στο άλλο άκρο Λ του νήματος (1) έχουμε στερεώσει σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1{,}5m$. Το σώμα $Σ_1$ είναι δεμένο με αβαρές μη εκτατό νήμα (2) με το σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 2{,}5m$. Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι ακίνητα. Αντιστάσεις αέρα αμελούνται και $g = 10\ m/s^2$. Οι διαστάσεις του τραπεζιού είναι μεγάλες. Την $t_0 = 0$ κόβεται το νήμα (2). Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα που αποκτάει το σφαιρίδιο Σ κατά την κίνησή του και η μέγιστη ανύψωση του σώματος $Σ_1$.

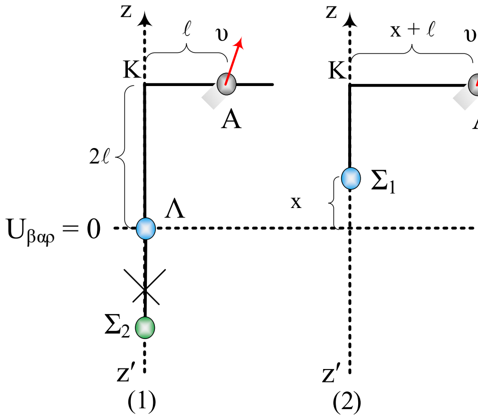
Λύση

$Σ_2$: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow T_2 = w_2$

$Σ_1$: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow T_1 = w_1 + T_2 \Rightarrow T_1 = w_1 + w_2 \Rightarrow T_1 = m_1 g + m_2 g \Rightarrow \mathbf{T_1 = 4mg}$.

$$Σ:\ \Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_κ \Rightarrow T_1 = \frac{mυ^2}{(ΚΑ)} \Rightarrow 4mg = \frac{mυ^2}{\ell} \Rightarrow \mathbf{υ = 2\sqrt{g\ell}}\ \ (1)$$





(Σχήμα 1): Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος (2).

(Σχήμα 2): Η στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$, την ίδια στιγμή μηδενίζεται και η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας του σφαιριδίου Σ.

$$ΑΔΣ\ (1 \rightarrow 2)\ ως\ προς\ z'z:\ \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \Rightarrow mυ\ell = m(\ell + x)υ' \overset{(1)}{\Rightarrow} 2\sqrt{g\ell}\cdot\ell = \ell υ' + xυ' \Rightarrow x = \frac{(2\sqrt{g\ell} - υ')\ell}{υ'}\ \ (2)$$

ΑΔΜΕ: $(1 \rightarrow 2)$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mg2\ell + \frac{1}{2}mυ^2 = m_1 gx + mg2\ell + \frac{1}{2}mυ'^2 \Rightarrow 2mg\ell + \frac{1}{2}m\cdot 4g\ell = 1{,}5mgx + 2mg\ell + \frac{1}{2}mυ'^2 \Rightarrow$$

$$0 = -2g\ell + 1{,}5gx + \frac{υ'^2}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = -2g\ell + 1{,}5g\frac{(2\sqrt{g\ell} - υ')\ell}{υ'} + \frac{υ'^2}{2} \Rightarrow 0 = -4g\ell υ' + 6g\ell\sqrt{g\ell} - 3υ'\ell g + υ'^3 \Rightarrow$$

$0 = -7g\ell\upsilon' + 6g\ell\sqrt{g\ell} + \upsilon'^3 \Rightarrow 0 = -28\upsilon' + 48 + \upsilon'^3 \Rightarrow 0 = -24(\upsilon' - 2) + \upsilon'(\upsilon'^2 - 4) \Rightarrow$

$0 = -24(\upsilon' - 2) + \upsilon'(\upsilon' - 2)(\upsilon' + 2) \Rightarrow 0 = (\upsilon' - 2)[-24 + \upsilon'(\upsilon' + 2)] \Rightarrow 0 = (\upsilon' - 2)[-24 + \upsilon'(\upsilon' + 2)] \Rightarrow$

$0 = (\upsilon' - 2)(\upsilon' - 4)(\upsilon' + 6)$

Άρα	$\upsilon' = 2$ m/s	(δεκτή)
	$\upsilon' = 4$ m/s	(η αρχική)
	$\upsilon' = -6$ m/s	(απορρίπτεται)

Από (2) $\Rightarrow$ **x = ℓ = 0,4 m**.