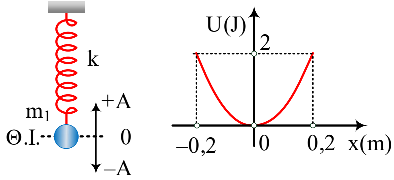
Α.Α.Τ. και Πλαστική κρούση.



Το ιδανικό ελατήριο του σχήματος σταθεράς k είναι κατακόρυφο, έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο και στο κάτω του άκρο δεμένο σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 = 2 kg, το οποίο εκτελεί ααt με σταθερά επαναφοράς D = k. Στο διάγραμμα φαίνεται η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή του. Όταν το $Σ_1$ διέρχεται από τη θέση που το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά d = 0,4 m συγκρούεται πλαστικά με δεύτερο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 = 2 kg που κινείται προς τα πάνω, με ταχύτητα $υ_2$ = 4 m/s. Δίνεται g = 10 m/s^2 και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

α. Να βρεθεί η σταθερά k του ελατηρίου

β. Να γραφεί η συνάρτηση της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ με την απομάκρυνση της ταλάντωσης που εκτελεί πριν την κρούση με το $Σ_2$.

Θεωρούμε t_0 = 0 τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση και θετική την φορά προς τα πάνω.

γ. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα με τον χρόνο

δ. Να βρεθεί το μέτρο της μέγιστης δύναμης του ελατηρίου

ε. Να βρεθεί η απομάκρυνση του συσσωματώματος όταν πρώτη φορά ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι dK/dt = –40 J/s.

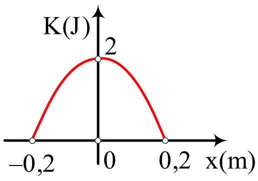
Λύση

α. Από την γραφική παράσταση προκύπτουν A = 0,2 m και E = 2 J. Άρα:

$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow D = \frac{2E}{A^2} \Rightarrow$ **D = 100 N/m**, οπότε και **k = D = 100 N/m**.

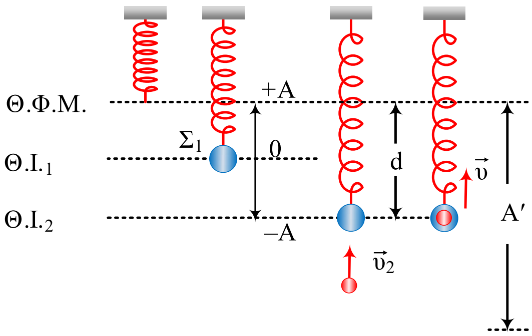
β. $K = E - U \Rightarrow K = E - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow$

$\mathbf{K = 2 - 50x^2}$ (SI) $\quad (-0{,}2\ \text{m} \le x \le 0{,}2\ \text{m})$



γ. Στη (Θ.Ι.$_1$): $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_{ελ} = m_1 g \Rightarrow$

$k\Delta\ell_0 = m_1 g \Rightarrow$ $\mathbf{\Delta\ell_0 = 0{,}2\ m = A}$.



(Η θέση x = +A συμπίπτει με την Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου)

Η κρούση γίνεται στη θέση x = –A = –0,2 m επειδή d = 0,4 m.

(Α.Δ.Ο.): $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ \Rightarrow$ **υ = 2 m/s**.

Το συσσωμάτωμα εκτελεί ααt με νέα θέση ισορροπίας (Θ.Ι.$_2$)

Στη (Θ.Ι.$_2$): $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_{ελ} = (m_1 + m_2)g \Rightarrow k\Delta\ell_1 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$ $\mathbf{\Delta\ell_1 = 0{,}4\ m = d}$.

Άρα την t_0 = 0 το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη (Θ.Ι.$_2$) και έχει ταχύτητα υ = 2 m/s = $+υ_{max}$

$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow$ **ω′ = 5 rad/s**. $\qquad υ'_{max} = \omega' A' \Rightarrow$ **A′ = 0,4 m**.

Τελικά: $x' = A'ημ(ω't) \Rightarrow \mathbf{x' = 0,4ημ(5t)}$ (SI)

δ. $\Delta\ell_{max} = 2A' \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_{max} = 0,8\ m}$.

$F_{ελ,max} = k\Delta\ell_{max} \Rightarrow F_{ελ,max} = 100 \cdot 0,8\ N \Rightarrow \mathbf{F_{ελ,max} = 80\ N}$.

ε. $\frac{dK}{dt} = \Sigma F υ \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -kx'υ' \Rightarrow x'υ' = 0,4 \Rightarrow υ'^2 = \frac{0,16}{x'^2} \qquad (1)$

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_{ολ}υ'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \Rightarrow \frac{kA'^2}{m_{ολ}} = υ'^2 + \frac{kx'^2}{m_{ολ}} \Rightarrow \frac{100 \cdot 0,4^2}{4} = \frac{0,16}{x'^2} + \frac{100x'^2}{4} \Rightarrow$$

$$4x'^2 = 0,16 + 25x'^4 \Rightarrow 25x'^4 - 4x'^2 + 0,16 = 0$$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 25 \cdot 0,16 \Rightarrow \Delta = 0$ Άρα: $x'^2 = \frac{4}{50} \Rightarrow \mathbf{x' = \pm 0,2\sqrt{2}\ m}$

1η φορά δεκτή η $\mathbf{x' = 0,2\sqrt{2}\ m}$.