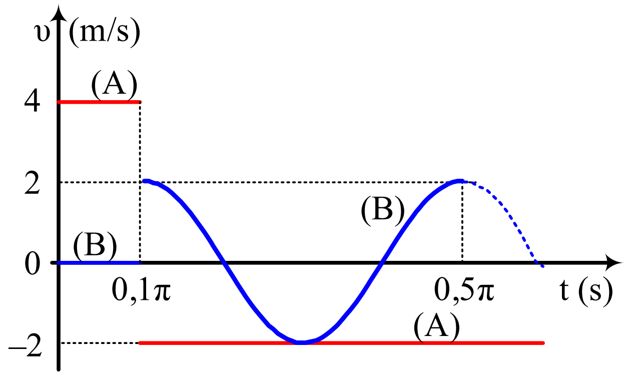
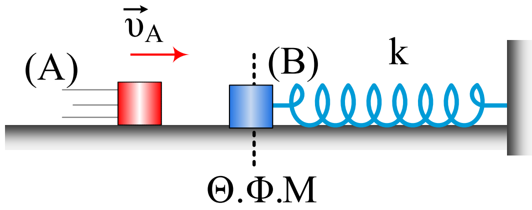
Κρούση - Ταλάντωση.



Σώμα Α κινούμενο σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ_A$ συγκρούεται με σώμα Β που είναι δεμένο σε οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Η κρούση είναι κεντρική και η χρονική της διάρκεια αμελητέα. Στο διάγραμμα φαίνονται οι ταχύτητες των σωμάτων Α και Β πριν και μετά την κρούση σε συνάρτηση με το χρόνο.

α. Να βρεθεί η απόσταση των σωμάτων την χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}2π$ s

β. Να ελέγξετε αν η κρούση είναι ελαστική.



Αριστερά του Α και σε απόσταση d από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου υπάρχει λείος ακλόνητος τοίχος. Το σώμα Α μετά την κρούση του με το σώμα Β κάποια στιγμή ξανασυγκρούεται με το σώμα Β τη στιγμή που αυτό περνά από τη Θ.Ι. για $2^η$ φορά έχοντας αντίθετη φορά κίνησης με το επερχόμενο σώμα Α. Να βρεθούν:

γ. Πόσο απέχει ο τοίχος από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

δ. Η περίοδος του φαινομένου.

Αν εκτοξεύαμε το σώμα Α με την ίδια αρχική ταχύτητα αλλά δεξιά της Θ.Φ.Μ. υπήρχε τραχύ έδαφος με συντελεστής τριβής στατικής και ολίσθησης μ = 0,75. Να βρείτε:

ε. Σε ποια θέση σταματά το σώμα Β μετά την κρούση αν $m_2 = 2$ kg.

στ. μετά από πόσο χρόνο θα γίνει η $2^η$ κρούση.

Δίνεται π = 3,14 και η διάρκεια της κρούσης του σώματος Α με τον τοίχο θεωρείται αμεληταία.

Λύση

α. Το σώμα Β μετά την κρούση εκτελεί α.α.τ με D = k.

Η περίοδος Τ της ταλάντωσης είναι (από το διάγραμμα): $T = 0{,}5π – 0{,}1π = 0{,}4π$ s

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0{,}1π$ s γίνεται η κρούση και τα σώματα βρίσκονται στην ίδια θέση.

Ισχύει: $ω = \dfrac{2π}{T} \Rightarrow \mathbf{ω = 5\ rad/s}$.

Από το διάγραμμα: $υ_{max} = 2$ m/s $\Rightarrow ωA = 2$ m/s $\Rightarrow \mathbf{A = 0{,}4\ m}$.

Την χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}2π$ s η ταχύτητα του σώματος Β είναι μηδέν άρα βρίσκεται σε ακραία θέση για πρώτη φορά και $s_2 = A = 0{,}4$ m.

$s_1 = |υ_A'|Δt \Rightarrow s_1 = |υ_A'|\cdot(t_1 – t_0) \Rightarrow s_1 = 0{,}2π\ m \Rightarrow \mathbf{s_1 = 0{,}628\ m}$.

Συνεπώς $s_{ολ} = s_1 + s_2 \Rightarrow \mathbf{s_{ολ} = 1{,}028\ m}$.

β. πρέπει να ικανοποιείται η σχέση $υ_A + υ'_A = υ_B + υ'_B$ για τις αλγεβρικές τιμές.

$\upsilon_A + \upsilon'_A = 4\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_A + \upsilon'_A = 2\frac{m}{s}$

$\upsilon_B + \upsilon'_B = 0 + 2\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_B + \upsilon'_B = 2\frac{m}{s}$

Όπως βλέπουμε ισχύει, άρα η κρούση είναι ελαστική.

γ. Το σώμα Α κινείται μετά την κρούση του με τον τοίχο, όπως αρχικά. Άρα το σώμα Β θα πρέπει να βρίσκεται στη Θ.Φ.Μ για 2η φορά με φορά κίνησης προς τα αριστερά (δηλαδή με ταχύτητα $\upsilon_B = -\upsilon_{max}$).

Άρα το σώμα Β έκανε 1,5 ταλαντώσεις, ενώ στον ίδιο χρόνο το σώμα Α διάνυσε την απόσταση τοίχος Θ.Φ.Μ 2 φορές. Άρα:

$2d = |\upsilon'_A| \cdot 1{,}5T \Rightarrow \mathbf{d = 0{,}6\pi\ m}$.

δ. Από την πρώτη κρούση έχουμε: $\upsilon'_B = \frac{2m_1\upsilon_A}{m_1+m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbf{m_2 = 3m_1}$.

Τη στιγμή της 2ης κρούσης το σώμα Α θα έχει ταχύτητα μέτρου $V_A = |\upsilon_A'|$ και το σώμα Β $V_B = \upsilon_B'$ (φοράς προς τα αρνητικά).

$V'_B = \frac{2m_1V_A}{m_1+m_2} + \frac{(m_2-m_1)V_B}{m_1+m_2} = \frac{2m_1(2)}{4m_1} + \frac{2m_1(-2)}{4m_1} = 0$ και

$V_A + V'_A = V_B + V'_B \Rightarrow \mathbf{V'_A = -4\ m/s}$.

Μόλις ανακλαστεί στον τοίχο και λίγο πριν την 3η κρούση έχουμε τις ίδιες συνθήκες με αυτές πριν την πρώτη κρούση. Η όλη διαδικασία διαρκεί 1,5T μέχρι να γίνει η δεύτερη κρούση και 0,75T μέχρι να γίνει η 3η κρούση (η διάρκεια για να διανύσει το σώμα Α απόσταση 2d είναι η μισή της πρώτης φοράς αφού κινείται με ταχύτητα διπλάσιου μέτρου). Άρα T_φ (η περίοδος του φαινομένου) θα είναι ίση με $\mathbf{T_\varphi = 2{,}25T = 0{,}9\pi\ s}$.

ε. Ισχύει: $k = m_2\omega^2 \Rightarrow \mathbf{k = 50\ N/m}$.

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ αμέσως μετά την κρούση μέχρι το σώμα Β να σταματήσει.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_B^2 = -\mu m_2 g\Delta\ell - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \Rightarrow 25\Delta\ell^2 + 15\Delta\ell - 4 = 0$$

Η Διακρίνουσα είναι $\Delta = 625$ και έχουμε λύσεις: $\Delta\ell = \frac{-15 \pm 25}{50}$ m, με αποδεκτή την $\mathbf{\Delta\ell = 0{,}2\ m}$.

Στη θέση αυτή $F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 10$ N και $T_{\sigma\tau,\max} = \mu m_2 g \Rightarrow T_{\sigma\tau,\max} = 15$ N. Άρα η τριβή θα έχει μέτρο 10 N και το σώμα Β θα μείνει μονίμως ακίνητο σε αυτή τη θέση.

στ. Το σώμα Α μετά την πρώτη κρούση θα επιστρέψει (αφού συγκρουστεί με τον τοίχο) στην Θ.Φ.Μ. έχοντας ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 2$ m/s σε χρόνο $\Delta t_1 = 1{,}5T = 0{,}6\pi$ s (όπως και πιο πάνω, όπου T η περίοδος της αμείωτης ταλάντωσης).

Στη συνέχεια στο τραχύ έδαφος όταν διανύσει την απόσταση $\Delta\ell$ θα έχει ταχύτητα:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_1V^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 = -\mu m_1 g\Delta\ell \Rightarrow V^2 - \upsilon^2 = -2\mu g\Delta\ell \Rightarrow V = \sqrt{\upsilon^2 - 2\mu g\Delta\ell} \Rightarrow \mathbf{V = 1\ m/s}.$$

Για τη χρονική διάρκεια της κίνησης στο τραχύ δάπεδο έχουμε:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta p}{\Sigma F} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{m_1(V-\upsilon)}{-\mu m_1 g} \Rightarrow \mathbf{\Delta t_2 = 2/15\ s}.$$

Άρα η 2^{η} κρούση των σωμάτων γίνεται τη στιγμή $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = (0{,}6\pi + 2/15)$ s