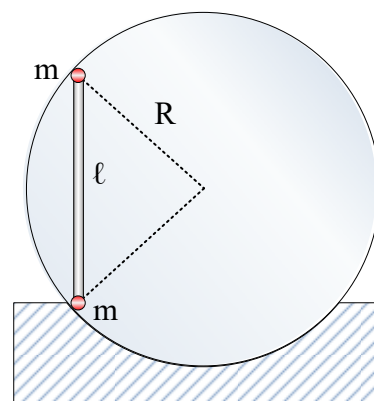


Στροφορμή και ρυθμός μεταβολής στροφορμής συστήματος.

Η διάταξη του σχήματος είναι κατακόρυφη. Η λεία σφαιρική επιφάνεια έχει ακτίνα $R = 0,5 \text{ m}$ και είναι ακλόνητα στερεωμένη. Η ράβδος είναι αβαρής άκαμπτη έχει μήκος $\ell = 0,6 \text{ m}$ και φέρει στα άκρα της στερεωμένα δύο ίδια σφαιρίδια μάζας $m = 0,2 \text{ kg}$. Αρχικά η ράβδος είναι κατακόρυφη και το σφαιρίδια σε επαφή με την σφαιρική επιφάνεια όπως το σχήμα. Κάποια στιγμή αφήνουμε το σύστημα ράβδος – σφαιρίδια ελεύθερο.



α. βρείτε το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς το κέντρο K της σφαιρικής επιφάνειας του συστήματος ράβδος – σφαιρίδια κατά την διάρκεια της κίνησής του.

β. βρείτε τη μέγιστη στροφορμή του συστήματος ως προς το σημείο K (κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας). Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

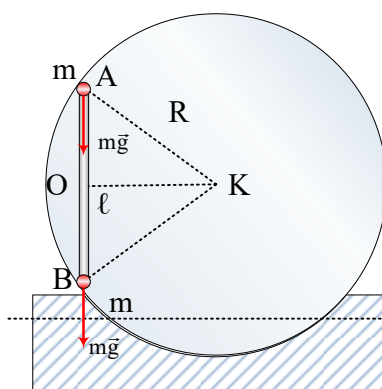
Λύση

α. Ισχύει: $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_K = \Sigma \vec{\tau}$, αλλά

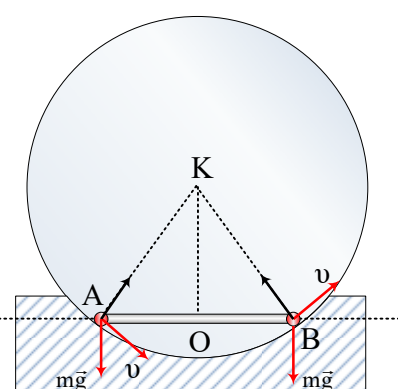
στην αρχική θέση η ροπή είναι μέγιστη.

Έτσι: $\Sigma \vec{\tau}_{(K)} = \Sigma \vec{\tau}_{\max, (K)}$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\max, (K)} = mg(OK) + mg(OK) = 2mg(OK) \quad (1)$$

Από πυθαγόρειο στο τρίγωνο OKA έχουμε: $(OK) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} \Rightarrow (OK) = 0,4 \text{ m}$.

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\max, (K)} = 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 0,4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\max, (K)} = 1,6 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

β. Όλα τα σημεία του συστήματος ράβδος – σφαιρίδια εκτελούν κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο K άρα το σύστημα εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από το K .

$$L_{\text{συστ}, (K)} = mvR + mvR \Rightarrow L_{\text{συστ}, (K)} = 2mvR \quad (2)$$

Επίσης $L_{\text{συστ}, (K)} = L_{\text{συστ}, (K), \max}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2 (θέση ελάχιστης βαρυτικής ενέργειας)

ΑΔΜΕ (1→2)

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow U_1 = K_2 \Rightarrow mg[(OK) + (OA)] + mg[(OK) - (OB)] = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$2mg(\text{OK}) = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g(\text{OK})} \Rightarrow v = \sqrt{8} \text{ m/s} \Rightarrow v = 2\sqrt{2} \text{ m/s}.$$

$$\text{Άρα: (2)} \Rightarrow L_{\sigma\upsilon\sigma\tau, (K)} = 2mvR \Rightarrow L_{\sigma\upsilon\sigma\tau, (K)} = 0,4\sqrt{2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$