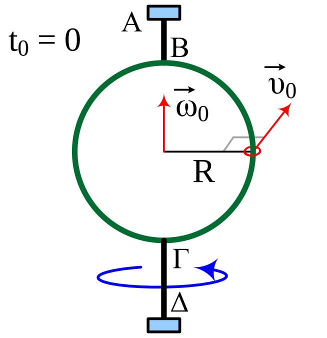
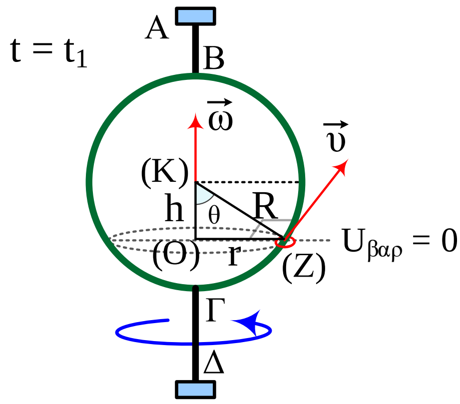
Α.Δ.Σ.- Α.Δ.Μ.Ε.

Ο δακτύλιος του σχήματος είναι αβαρής, έχει ακτίνα R = 0,9 m και μπορεί να στρέφεται γύρω από μία κατακόρυφη διάμετρο του χωρίς τριβές. Τα κατακόρυφα στηρίγματα ΑΒ και ΓΔ είναι αβαρή. Μία μικρή χάντρα μάζας m, μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος του δακτυλίου. Την $t_0 = 0$ το σύστημα δακτύλιος χάντρα τίθεται σε περιστροφή με την χάντρα να βρίσκεται στη θέση Ε (βλέπε σχήμα) με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ rad/s. Δίνεται $g = 10$ m/s^2. Να βρεθεί η θέση και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της χάντρας τη χρονική στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος γίνεται μέγιστη.



Λύση

Στο σύστημα δακτύλιος – χάντρα δρουν δυνάμεις εξωτερικές στον άξονα από τα σημεία στήριξης και το βάρος της χάντρας, οι ροπές των οποίων, ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν. Οι δυνάμεις στα σημεία στήριξης δεν παράγουν έργο αφού δεν μετατοπίζουν το σημείο εφαρμογής τους και το βάρος είναι συντηρητική δύναμη. Συνεπώς διατηρείται η στροφορμή και η μηχανική ενέργεια. Η χάντρα λόγω του βάρους της αμέσως μετά την $t_0 = 0$, αρχίζει να κατέρχεται ολισθαίνοντας πάνω στο δακτύλιο. Την στιγμή $t = t_1$ πού μηδενίζεται η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της χάντρας η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος γίνεται μέγιστη.



Α.Δ.Σ.: $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow m\upsilon_0 R = m\upsilon r \Rightarrow \upsilon_0 R = \upsilon R ημθ \Rightarrow \omega_0 R = \upsilon ημθ \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot 0,9 = \upsilon ημθ \Rightarrow$

$$27 = \upsilon^2 - \upsilon^2 συν^2θ \;\; (1)$$

Α.Δ.Μ.Ε.: (Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το σημείο που ισορροπεί τελικά η χάντρα).

$$K_0 + U_0 = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon_0^2 + 2gh = \upsilon^2 \Rightarrow (\omega_0 R)^2 + 2gRσυνθ = \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$27 + 18συνθ = \upsilon^2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $18συνθ = \upsilon^2συν^2θ \Rightarrow \upsilon^2 συνθ = 18 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{18}{συνθ}$ (3).

Με αντικατάσταση της (3) στην (1), προκύπτει:

$$27 = 18συνθ - \frac{18}{συνθ}\cdot συν^2θ \Rightarrow 3συνθ = 2 - 2συν^2θ \Rightarrow 2συν^2θ + 3συνθ - 2 = 0$$

Οι λύσεις είναι συνθ = ½ δεκτή (άρα **θ = 60^o**) και συνθ = –2 που απορρίπτεται.

Από την (2) παίρνουμε **υ = 6 m/s**.