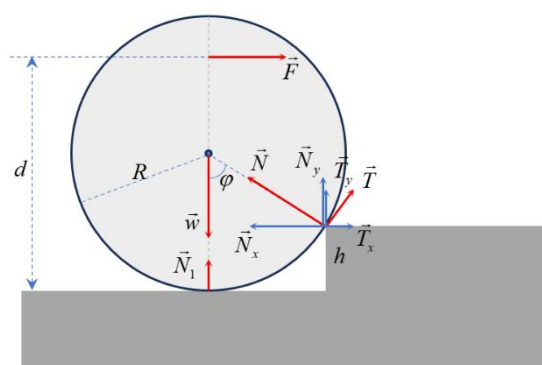


Ανεβαίνοντας ένα σκαλοπάτι

Έστω το κυλινδρικό σώμα ακτίνας R του σχήματος το οποίο βρίσκεται μπροστά σε σκαλοπάτι ύψους h . Ασκώντας οριζόντια δύναμη μέτρου F προς τα δεξιά, της οποίας ο φορέας απέχει από το οριζόντιο δάπεδο απόσταση d , να διερευνηθεί η εξέλιξη του φαινομένου.

Μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου δαπέδου δεν υπάρχει τριβή, ενώ μεταξύ του σώματος και του σκαλοπατιού θεωρούμε ίσους τον συντελεστή οριακής στατικής τριβής και τον συντελεστή τριβής ολίσθησης, με κοινή τιμή μ .

Συνοπτική λύση:



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα έχουν σημειωθεί στο σχήμα. Οι δυνατές περιπτώσεις για την εξέλιξη του φαινομένου είναι οι εξής:

A. Ισορροπία.

B. Περιστροφή και ολίσθηση, χωρίς υπερπήδηση του σκαλοπατιού.

Γ. Υπερπήδηση του σκαλοπατιού.

Σε κάθε περίπτωση θα υπολογίσουμε την οριακή τιμή της δύναμης $\vec{F}$ ώστε το στερεό να μην υπερπηδά το σκαλοπάτι, η οποία όπως θα δούμε εξαρτάται εν γένει από τις υπόλοιπες παραμέτρους του προβλήματος.

Για ευκολία εισάγουμε την παράμετρο $\lambda = \frac{d}{R}$.

A. Ισορροπία

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F + T \sigma \nu \nu \varphi - N \eta \mu \varphi = 0} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 + T \eta \mu \varphi + N \sigma \nu \nu \varphi - w = 0} \quad (2)$$

$$\sum \tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow TR - F(d - R) = 0 \Rightarrow \boxed{T = F(\lambda - 1)} \quad (3)$$

Από (1) και (3) προκύπτει,

$$N = F \frac{1 + (\lambda - 1) \sigma \nu \varphi}{\eta \mu \varphi} \quad (4)$$

και αντικαθιστώντας στην (2),

$$N_1 = w - F \frac{\lambda - 1 + \sigma \nu \varphi}{\eta \mu \varphi} \quad (5)$$

Αλλά, $|T| \leq \mu N$. Άρα,

$$\mu \geq \frac{|\lambda - 1| \eta \mu \varphi}{1 + (\lambda - 1) \sigma \nu \varphi} = \mu_1 \quad (6)$$

Για την ισορροπία πρέπει επίσης το στερεό να μην χάνει την επαφή του με το δάπεδο, δηλαδή $N_1 \geq 0$.

Σύμφωνα με την εξίσωση (5) για, $\lambda - 1 + \sigma \nu \varphi \leq 0$, προκύπτει το ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι η συνθήκη ισχύει **για οποιαδήποτε τιμή του μέτρου της $\vec{F}$** .

Η σχέση, $\lambda - 1 + \sigma \nu \varphi \leq 0$, ισχύει όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται κάτω από την ακμή του σκαλοπατιού, δηλαδή $d \leq h$.

Για, $1 - \lambda - \sigma \nu \varphi < 0$, προκύπτει, $F \leq w \frac{\eta \mu \varphi}{\lambda - 1 + \sigma \nu \varphi}$.

Συνοψίζοντας, το στερεό ισορροπεί αν,

$$\mu \geq \frac{|\lambda - 1| \eta \mu \varphi}{1 + (\lambda - 1) \sigma \nu \varphi} = \mu_1 \quad \text{και} \quad \begin{cases} F \leq w \frac{\eta \mu \varphi}{\lambda - 1 + \sigma \nu \varphi} & \alpha \nu \quad \lambda - 1 + \sigma \nu \varphi > 0 \quad (d > h) \\ \text{ανεξαρτήτως της } F & \alpha \nu \quad \lambda - 1 + \sigma \nu \varphi \leq 0 \quad (d \leq h) \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι η οριακή τιμή του συντελεστή τριβής δεν εξαρτάται από το μέτρο της δύναμης αλλά από την παράμετρο λ . **Ειδικά για την περίπτωση $\lambda = 1$ (η δύναμη ασκείται στο κέντρο μάζας), το στερεό ισορροπεί ανεξάρτητα από τη φύση των επιφανειών και αρκεί η συνθήκη $F \leq w \cdot \epsilon \varphi \varphi$.**

Β. Περιστροφή με ολίσθηση στο σημείο επαφής χωρίς έναρξη ανόδου.

Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (1) και (2) εξακολουθούν να ισχύουν αφού το κέντρο μάζας παραμένει ακίνητο, αλλά για την τριβή ισχύει, $T = \mu N$, με $\mu < \mu_1$.

Επομένως από την (1) έχουμε,

$$N = \frac{F}{\eta \mu \varphi - \mu \sigma \nu \varphi}$$

και αντικαθιστώντας στην (2),

$$N_1 = w - F \frac{\mu \varepsilon \varphi \varphi + 1}{\varepsilon \varphi \varphi - \mu}$$

Για $\lambda < 1$ το μόνο που αλλάζει είναι η κατεύθυνση της τριβής. Η προηγούμενη ανάλυση θα είναι πανομοιότυπη και το αποτέλεσμα θα προκύψει με την αντικατάσταση, $\mu \rightarrow -\mu$.

Άρα,

$N_1 = w - F \frac{\mu \varepsilon \varphi \varphi + 1}{\varepsilon \varphi \varphi - \mu} \text{ για } \lambda > 1 \quad \text{και} \quad N_1 = w - F \frac{1 - \mu \varepsilon \varphi \varphi}{\varepsilon \varphi \varphi + \mu} \text{ για } \lambda < 1$
--

Πρέπει, $N_1 \geq 0$. Άρα,

- Για $\lambda > 1$, $F \leq w \frac{\varepsilon \varphi \varphi - \mu}{\mu \varepsilon \varphi \varphi + 1}$ αφού $\mu < \mu_1 \leq \varepsilon \varphi \varphi$
- Για $\lambda < 1$ και $\mu < \frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi}$ πρέπει, $F \leq w \frac{\varepsilon \varphi \varphi + \mu}{1 - \mu \varepsilon \varphi \varphi}$
- Για $\lambda < 1$ και $\frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi} \leq \mu < \mu_1$ το σώμα περιστρέφεται χωρίς να υπερπηδά το σκαλοπάτι αφού $N_1 > 0$, **για οποιαδήποτε τιμή του μέτρου της δύναμης !**.
Για να υπάρχει τέτοια περίπτωση θα πρέπει ασφαλώς να ισχύει,

$$\frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi} < \mu_1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi} < \frac{(1 - \lambda) \eta \mu \varphi}{1 + (\lambda - 1) \sigma \nu \nu \varphi} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{1 - \lambda - \sigma \nu \nu \varphi > 0}$$
 δηλαδή όταν $d < h$.

Συνοψίζοντας, για στροφική κίνηση χωρίς υπερπήδηση του σκαλοπατιού.

$$\left[\begin{array}{lll} F \leq w \frac{\varepsilon \varphi \varphi - \mu}{\mu \varepsilon \varphi \varphi + 1} & \text{για } \lambda > 1 & \text{και } \mu < \mu_1 \\ F \leq w \frac{\varepsilon \varphi \varphi + \mu}{1 - \mu \varepsilon \varphi \varphi} & \text{για } \lambda < 1 & \text{και } \mu < \min\left(\frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi}, \mu_1\right) \\ \text{ανεξαρτήτως της } F & \text{για } \lambda < 1 & \text{και } \frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi} \leq \mu < \mu_1^* \end{array} \right]$$

(*) είναι δυνατόν αν $d < h$.

Γ. Υπερπήδηση του σκαλοπατιού.

Από την ανάλυση των προηγούμενων περιπτώσεων για υπερπήδηση του σκαλοπατιού πρέπει:

$$\text{Για } \mu \geq \mu_1 = \frac{|\lambda - 1| \eta \mu \varphi}{1 + (\lambda - 1) \sigma \nu \varphi}$$

$$F > w \frac{\eta \mu \varphi}{\lambda - 1 + \sigma \nu \varphi} \text{ και } \lambda - 1 + \sigma \nu \varphi > 0 \Leftrightarrow d > h$$

$$\text{Για } \mu < \mu_1 \text{ και } \lambda > 1,$$

$$F > w \frac{\varepsilon \varphi \varphi - \mu}{\mu \varepsilon \varphi \varphi + 1}$$

$$\text{Για } \mu < \min\left(\frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi}, \mu_1\right) \text{ και } \lambda < 1,$$

$$F > w \frac{\varepsilon \varphi \varphi + \mu}{1 - \mu \varepsilon \varphi \varphi}$$

Παρατήρηση: Η υπερπήδηση μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με ταυτόχρονη ολίσθηση στο σκαλοπάτι είτε με περιστροφή γύρω από την γωνία του σκαλοπατιού ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων.

Στο αρχείο του Interactive Physics που θα βρείτε στον [σύνδεσμο](#) μπορείτε να δοκιμάσετε διάφορους συνδυασμούς και να παρατηρήσετε τα αποτελέσματα. Η οριζόντια δύναμη, του φορέα της οποίας η απόσταση από το οριζόντιο δάπεδο καθορίζεται από την παράμετρο λ , αντικαθίσταται ισοδύναμα από μια δύναμη ίδιου μέτρου που ασκείται στο κέντρο μάζας και μια ροπή ζεύγους, $\tau = F(d - R)$ ίση με τη ροπή της δύναμης ως προς το κέντρο μάζας.

Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή ισχύουν:

$$\eta \mu \varphi = \frac{3}{5}, \sigma \nu \varphi = \frac{4}{5}, w = 1 \text{ N} \text{ οπότε, } \mu_1 = \frac{3|\lambda - 1|}{1 + 4\lambda} \text{ και η συνθήκες υπερπήδησης είναι.}$$

$$\text{Για } \mu > \frac{3|\lambda - 1|}{1 + 4\lambda}, F > \frac{3}{5\lambda - 1}, \text{ και } \lambda > \frac{1}{5}$$

$$\text{Για } \mu < \frac{3|\lambda - 1|}{1 + 4\lambda} \text{ και } \lambda \geq 1, F > \frac{3 - 4\mu}{3\mu + 4}$$

$$\text{Για } \mu < \min\left(\frac{4}{3}, \frac{3 - 3\lambda}{1 + 4\lambda}\right) \text{ και } \lambda < 1, F > \frac{3 + 4\mu}{4 - 3\mu}$$

Λευκάδα, Σεπτέμβριος 2026

Σπύρος Χόρτης