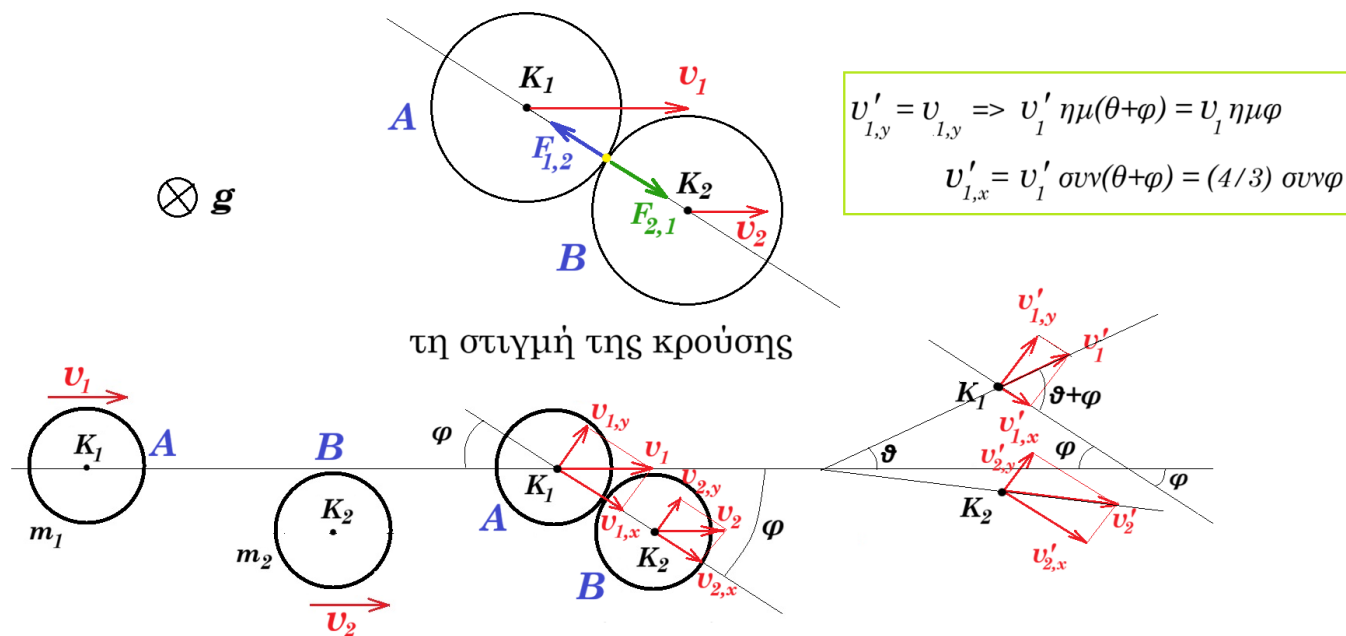


Σφαιρίδιο A μάζας $m_1=0,02\text{Kg}$ κινείται πάνω λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_1=12\text{m/s}$ συγκρούεται ελαστικά μη κεντρικά με σφαιρίδιο B μάζας $m_2=0,04\text{Kg}$, που κινείται στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου $v_2=4\text{m/s}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τα σφαιρίδια είναι λεία και δεν στρέφονται και οι ακτίνες τους είναι ίσες, πολύ μικρές. Να βρεθεί η μέγιστη γωνία απόκλισης του σφαιριδίου A μετά την κρούση $\theta_{\max}$, ως προς την οριζόντιο.

μία επίλυση



οι σφαίρες κινούνται οριζόντια και έστω ότι η διάκεντρος των σφαιρών σχηματίζει με την οριζόντιο γωνία φ **τη στιγμή της κρούσης**

η σφαίρα A τη στιγμή που συγκρούεται με τη σφαίρα B δέχεται από αυτή, στο σημείο επαφής, δύναμη $F_{1,2}$ κατά την διάκεντρο K_1K_2 των δύο σφαιρών, όπως στο σχήμα

η σφαίρα B την ίδια στιγμή δέχεται από τη σφαίρα A, στο σημείο επαφής, δύναμη $F_{2,1}$ αντίθετη της $F_{1,2}$ (δράση-αντίδραση)

η κρούση είναι ελαστική οπότε έχουμε διατήρηση της ενέργειας, επίσης θεωρούμε το

σύστημα των σφαιρών μονωμένο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στις σφαίρες είναι μηδέν, οπότε έχουμε διατήρηση της ορμής

αναλύουμε τις ταχύτητες v_1 και v_2 των σφαιρών σε δύο άξονες :

(x) κατά την διάκεντρο των σφαιρών **τη στιγμή της κρούσης** :

$$v_{1,x} = v_1 \cos\varphi = 12 \cos\varphi, \quad v_{2,x} = v_2 \cos\varphi = 4 \cos\varphi$$

και (y) κάθετο σ'αυτή : $v_{1,y} = v_1 \sin\varphi = 12 \sin\varphi, \quad v_{2,y} = v_2 \sin\varphi = 4 \sin\varphi$

κατά τον άξονα (y) δεν ασκούνται δυνάμεις οπότε οι συνιστώσες ταχύτητες $v'_{1,y}$ και $v'_{2,y}$ μετά την κρούση θα είναι ίσες με τις αντίστοιχες πριν την κρούση

δηλαδή : $v_{1,y} = v'_{1,y}$ και $v_{2,y} = v'_{2,y}$

κατά τον άξονα (x) έχουμε :

$$v'_{1,x} = v_{1,x} (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2) + 2 v_{2,x} m_2 / (m_1 + m_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'_{1,x} = 12 \cos\varphi (0,02 - 0,04) / (0,02 + 0,04) + 2 \cdot 4 \cos\varphi \cdot 0,04 / (0,02 + 0,04) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'_{1,x} = -4 \cos\varphi + 16/3 \cos\varphi \Rightarrow v'_{1,x} = (4/3) \cos\varphi$$

$$v'_{2,x} = v_{2,x} (m_2 - m_1) / (m_1 + m_2) + 2 v_{1,x} m_1 / (m_1 + m_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'_{2,x} = 4 \cos\varphi (0,04 - 0,02) / 0,06 + 2 \cdot 12 \cos\varphi \cdot 0,02 / 0,06 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'_{2,x} = 4/3 \cos\varphi + 24/3 \cos\varphi \Rightarrow v'_{2,x} = (28/3) \cos\varphi$$

έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα v'_1 με την οριζόντιο, από το σχήμα φαίνεται ότι η v'_1 σχηματίζει γωνία $(\theta + \varphi)$ με την παράλληλο της διακέντρου των σφαιρών την στιγμή της κρούσης (εξωτερική γωνία τριγώνου) η ανάλυση της v'_1 στους άξονες (x) και (y) δίνει : $v'_{1,x} = v'_1 \sin(\theta + \varphi)$ και $v'_{1,y} = v'_1 \cos(\theta + \varphi)$

από τις σχέσεις : $v'_{1,y} = v_{1,y}$ και $v'_{1,x} = (4/3) \cos\varphi$ έχουμε:

$$v'_{1,y} = v_{1,y} \Rightarrow v'_1 \cos(\theta + \varphi) = 12 \sin\varphi$$

$$v'_{1,x} = (4/3) \cos\varphi \Rightarrow v'_1 \sin(\theta + \varphi) = (4/3) \cos\varphi$$

διαιρώντας κατά μέλη : $\epsilon\varphi(\theta+\varphi) = 9 \epsilon\varphi\varphi \Rightarrow (\epsilon\varphi\theta + \epsilon\varphi\varphi)/(1 - \epsilon\varphi\theta \epsilon\varphi\varphi) = 9 \epsilon\varphi\varphi \Rightarrow$
 $\epsilon\varphi\theta + \epsilon\varphi\varphi = 9 \epsilon\varphi\varphi - 9 \epsilon\varphi\theta \epsilon\varphi^2\varphi \Rightarrow 9 \epsilon\varphi\theta \epsilon\varphi^2\varphi - 8 \epsilon\varphi\varphi + \epsilon\varphi\theta = 0$

αυτό είναι τριώνυμο ως προς $\epsilon\varphi\varphi$ με $\alpha = 9 \epsilon\varphi\theta$, $\beta = -8$, $\gamma = \epsilon\varphi\theta$

διακρίνουσα : $\Delta = 64 - 36 \epsilon\varphi^2\theta$ το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές λύσεις όταν $\Delta \geq 0$
 $\Rightarrow 64 - 36 \epsilon\varphi^2\theta \geq 0 \Rightarrow (\epsilon\varphi\theta + 4/3)(\epsilon\varphi\theta - 4/3) \leq 0 \Rightarrow -4/3 \leq \epsilon\varphi\theta \leq +4/3$

η μεγαλύτερη τιμή της γωνίας θ είναι όταν $\epsilon\varphi\theta = 4/3$

