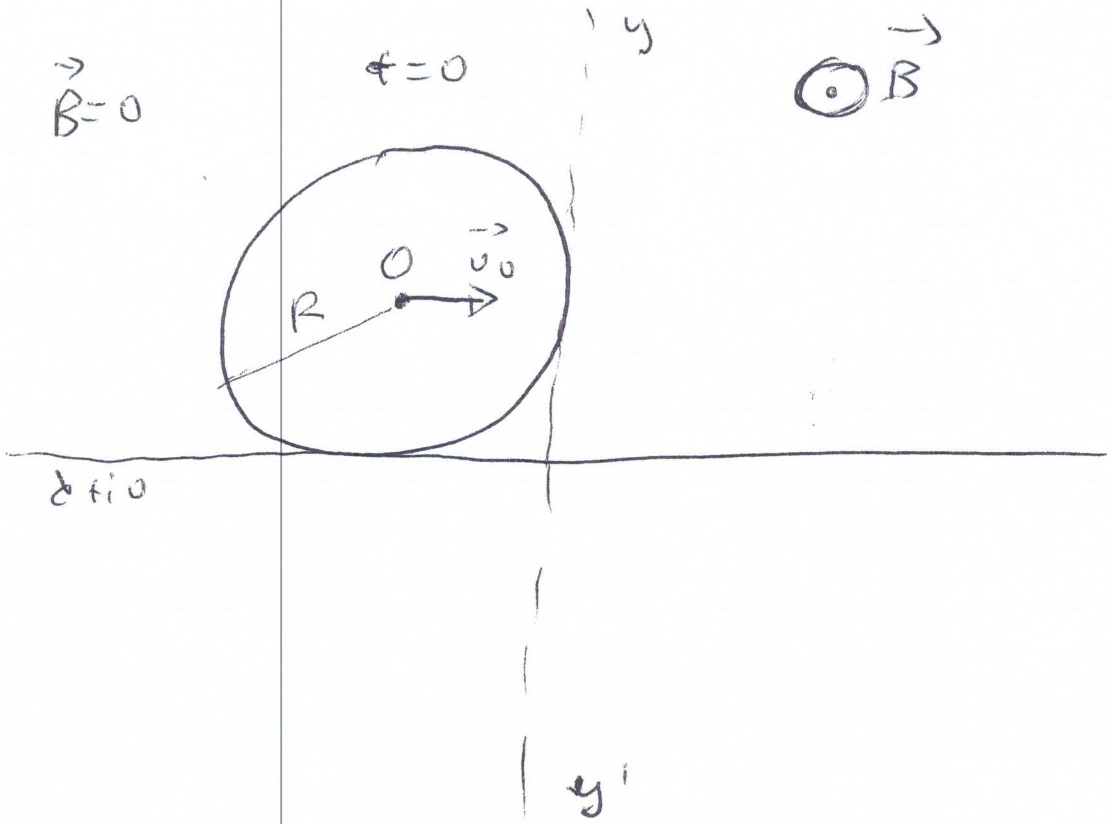
Πρόβλημα

(1)



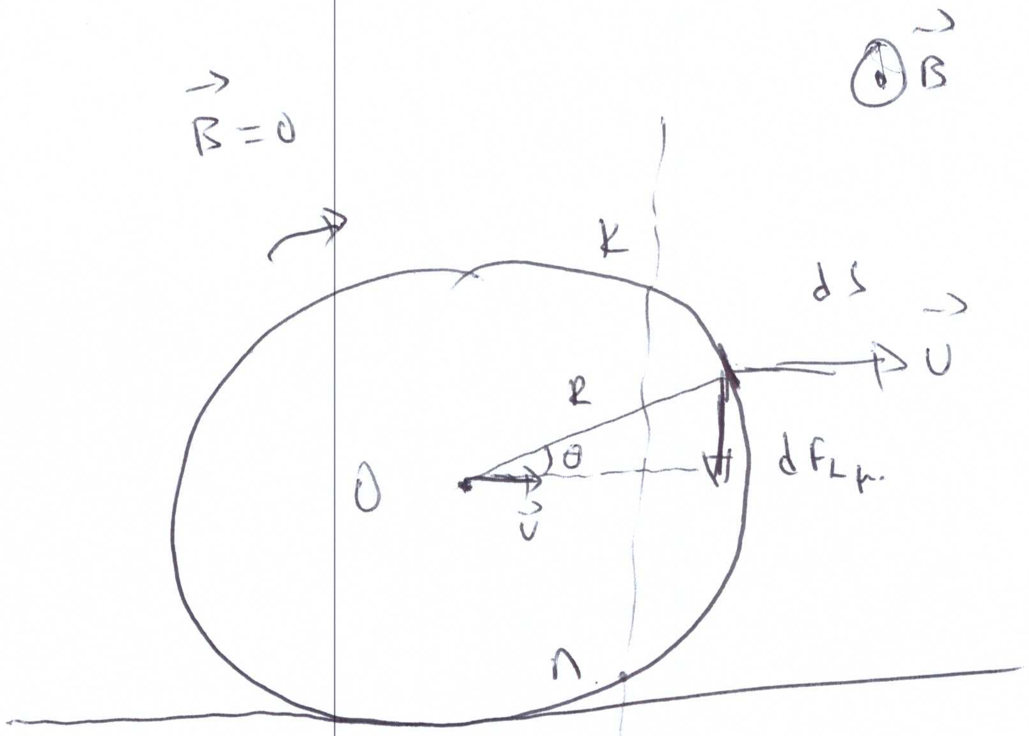
Ομογενής λεπτή στεφάνη κινείται μεταφορικά σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου υ_0. Η μάζα της στεφάνης είναι M και η ακτίνα της R. Η στεφάνη είναι κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό και φέρει θετικό φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο με γραμμική πυκνότητα λ. Το επίπεδο της στεφάνης είναι κατακόρυφο και τη στιγμή $t=0$ εισέρχεται στο οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.
Η ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς άξονα διερχόμενο του κέντρου της O και καθετα σε αυτή είναι $I=MR^2$.

②

α) Να γραφούν οι εξισώσεις $\omega - x$ και $\upsilon_{cm} - x$ όπου ω η γωνιακή ταχύτητα της στεφάνης, υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας της και x η απόσταση που διανύει το κέντρο μάζας της από τη στιγμή $t=0$ και μετά. μέχρι την είσοδο στο Ο.Μ.Π

β) Να βρεθεί το ελάχιστο μέτρο της $\vec{\upsilon}_0$ ώστε η στεφάνη να μπορεί να εισέλθει ολόκληρη στο μαγνητικό πεδίο.

Λύση

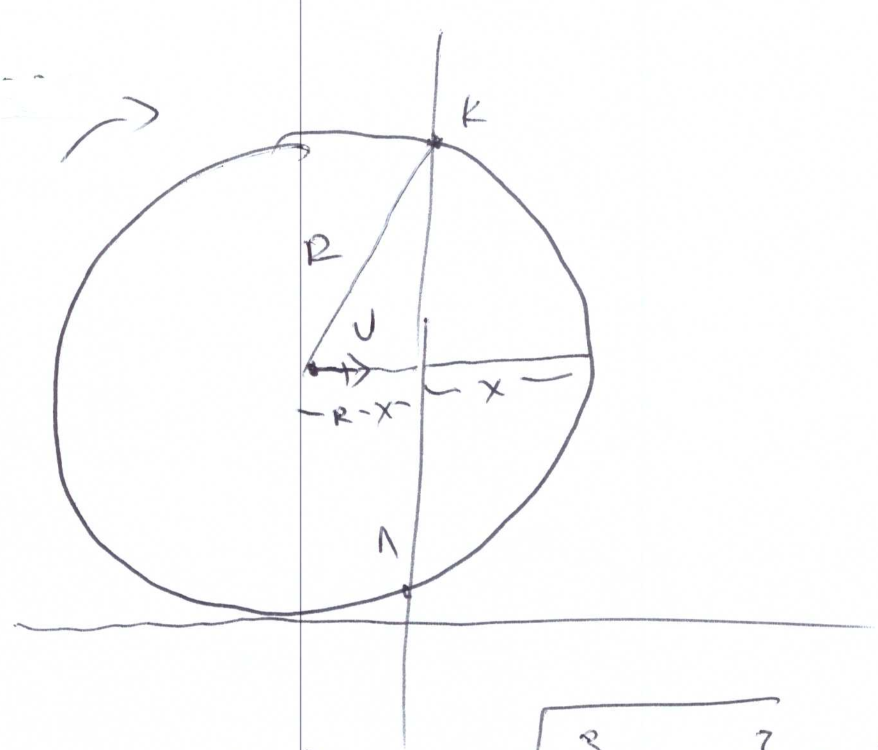


Η στοιχειώδης δύναμη Lorentz dF_L που ασκείται εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης σε στοιχειώδες τμήμα μήκους ds του στεφανιού έχει κατεύθυνση κατακόρυφη επομένως επηρεάζει στροφικά τη στεφάνη. Η στοιχειώδης ροπή που παράγει αυτή η δύναμη ως προς το Ο είναι

$$d\tau = B\,dq\,v\,R\cos\theta = BvR\lambda\,ds\cos\theta$$

Όμως $ds\cos\theta = dy$ η προβολή του ds στη ΚΛ. Άρα $d\tau = BvR\lambda\,dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau = BvR\lambda\,(K\Lambda)$$



Όμως $(K\Lambda) = 2\sqrt{R^2-(R-x)^2} = 2\sqrt{R^2-R^2+2Rx-x^2}$

$\Rightarrow (K\Lambda)=2\sqrt{2Rx-x^2}$

Άρα $\tau = 2B\upsilon R\lambda\sqrt{2Rx-x^2}$

Παρατήρηση

Προφανώς υπάρχει και δύναμη $dF_{L\sigma}$ που οφείλεται στη στροφική κίνηση της στεφάνης και αυτή έχει φορά προς το κέντρο O και δε παράγει ροπή. Άρα δεν επηρεάζει στροφικά τη στεφάνη. (Τη επηρεάζει όμως μεταφορικά επιβραδύνοντάς την)

Η στεφάνη στροφικά επιταχύνεται και μεταφορικά επιβραδύνεται.

Από θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης παίρνουμε

$$I\frac{d\omega}{dt} = 2B\upsilon\lambda R\sqrt{2Rx-x^2} \Rightarrow$$

$$mR^2\frac{d\omega}{dx}\frac{dx}{dt} = 2B\upsilon\lambda R\sqrt{2Rx-x^2} \Rightarrow$$

$$mR^2\frac{d\omega}{dx}\cdot\upsilon = 2B\upsilon\lambda R\sqrt{2Rx-x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{2B\lambda}{mR}\sqrt{2Rx-x^2} \Rightarrow$$

$$d\omega = \frac{2B\lambda}{mR}\sqrt{2Rx-x^2}\,dx \Rightarrow$$

$$d\omega = \frac{2B\lambda}{mR}\int\sqrt{2Rx-x^2}\,dx + C$$

$$\omega = \frac{2B\lambda}{mR}\left[\frac{x-R}{2}\sqrt{2Rx-x^2}+\frac{R^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-R}{R}\right)\right]+C$$

Για $x=0 \Rightarrow \omega=0$

Άρα $0 = \frac{2B\lambda}{mR}\frac{R^2}{2}\sin^{-1}(-1)+C \Rightarrow$

$$0 = \frac{B\lambda R}{m}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+C \Rightarrow C = \frac{B\lambda R\pi}{2m}$$

Άρα

$$\omega = \frac{2B\lambda}{mR}\left[\frac{x-R}{2}\sqrt{2Rx-x^2}+\frac{R^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-R}{R}\right)\right]+\frac{B\lambda R\pi}{2m}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{B\lambda}{m}\left[\frac{x-R}{R}\sqrt{2Rx-x^2}+R\sin^{-1}\left(\frac{x-R}{R}\right)\right]+\frac{B\lambda R\pi}{2m}$$

$$\omega = \frac{B\lambda}{m}\left[\frac{x-R}{R}\sqrt{2Rx-x^2}+R\sin^{-1}\left(\frac{x-R}{R}\right)+\frac{\pi R}{2}\right]$$

Αφού στο πρόβλημα η $\vec{F}_L$ προφανώς δε παράγει έργο θα έχουμε

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$v^2=v_0^2-\omega^2R^2 \Rightarrow$$

$$v^2=v_0^2-\frac{B^2\lambda^2}{m^2}\left[\frac{x-R}{R}\sqrt{2Rx-x^2}+R\sin^{-1}\left(\frac{x-R}{R}\right)+\frac{\pi R}{2}\right]^2\cdot R^2$$

και

$$v=\left[v_0^2-\frac{B^2\lambda^2}{m^2}\left[\frac{x-R}{R}\sqrt{2Rx-x^2}+R\sin^{-1}\left(\frac{x-R}{R}\right)+\frac{\pi R}{2}\right]^2R^2\right]^{1/2}$$

θ) Πρέπει για $X = 2R$ $U = 0$

Άρα $\frac{1}{2} m U_0^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \Rightarrow U_0^2 = \omega^2 R^2$

$\Rightarrow U_0 = \omega R$

Για $X = 2R$ $\omega = \frac{B\lambda}{m}\left[R \sin^{-1}(1) + \frac{\pi R}{2}\right] \Rightarrow$

$\omega = \frac{B\lambda}{m}\left[\frac{R\pi}{2} + \frac{\pi R}{2}\right] \Rightarrow$ $\omega = \frac{B\lambda R\pi}{m}$

Άρα $U_{0(min)} = \frac{B\lambda \pi R^2}{m}$