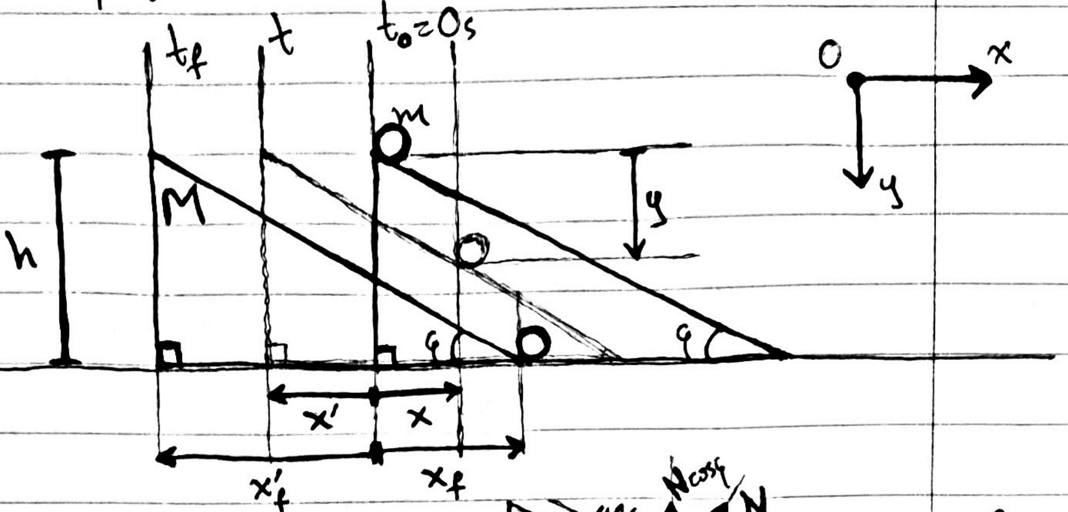
Πρίντζιος Λάμπρος

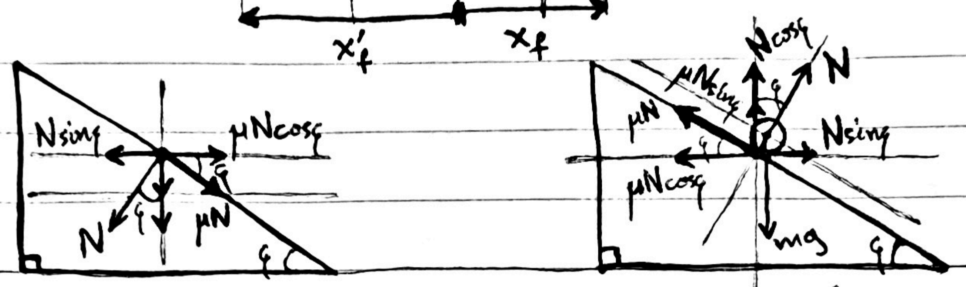
- Δεξιά στην εικόνα σχεδιάζω την αρχική κατάσταση ($t_0=0s$), την τελική (t_f) και μία ενδιάμεση (t).

λείο δάπεδο



μηδενικές αρχικές συνθήκες:
$x(0)=x'(0)=0$
$\dot{x}(0)=\dot{x}'(0)=0$

-



για τη σφήνα

για τη μάζα m

ανάλυση δυνάμεων στα δύο σώματα

1) Η σφήνα ασκεί στη μάζα m την κάθετη στην κλίση της δύναμη N και τη δύναμη τριβής ολίσθησης μέτρου μN. Συμβολίζω τη συνισταμένη δύναμη "δράσης" της σφήνας πάνω στη m ως $F^{M\to m}$, και η συνιστώσα της στον άξονα x γράφεται ως εξής:

- $$F_x^{M\to m} = N\sin\varphi - \mu N\cos\varphi$$

Από τον νόμο δράσης-αντίδρασης, η μάζα m ασκεί πάνω στη σφήνα αντίθετη δύναμη "αντίδρασης" $F^{m\to M} = -F^{M\to m}$, οπότε στον άξονα x θα είναι:

$$F_x^{m\to M} = -F_x^{M\to m} = \mu N\cos\varphi - N\sin\varphi$$

Έτσι βάσει της εικόνας, η μάζα m κινείται προς τα δεξιά, ενώ η σφήνα κινείται προς τα αριστερά, που σημαίνει ότι

$$f_x^{M\to m} > 0 \to N\sin\varphi > \mu N\cos\varphi \to \mu < \tan\varphi \quad (\tan\varphi - \mu > 0)$$

(Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί και με την εξής λογική: Έστω ότι η μάζα m ίσα που ισορροπεί πάνω στη σφήνα, δεχόμενη στατική τριβή $\mu_s N$, οπότε θα είχαμε: $N\sin\varphi - \mu_s N\cos\varphi = 0 \to \mu_s = \tan\varphi$. Όμως ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ είναι μικρότερος του στατικού μ_s, άρα $\mu < \tan\varphi$.)

Άρα από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$f_x^{M\to m} = -f_x^{m\to M} \to m\ddot{x} = -M\ddot{x}' \xrightarrow{\text{μηδενικές αρχικές ταχύτητες}}$$

$$\to m\dot{x} = -M\dot{x}' \xrightarrow[\text{θέσεις}]{\text{μηδενικές αρχικές}} \boxed{mx = -Mx'} \quad (1)$$

(Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x, δηλαδή: $p_x^{αρχ} = p_x^{τελ} \to 0 = mu + Mu' \to mu = -Mu' \to m\dot{x} = -M\dot{x}'$.)

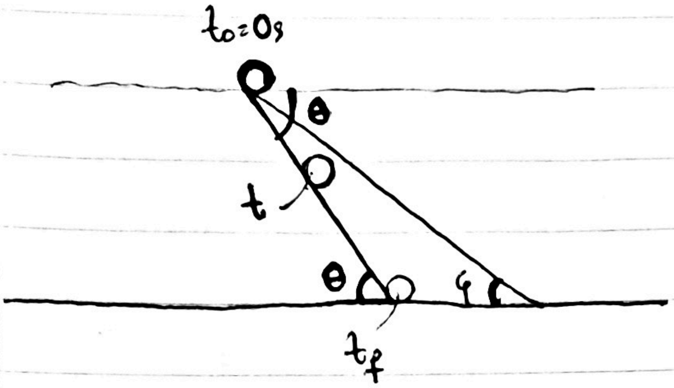
Ακόμα, βάσει του σχήματος, κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

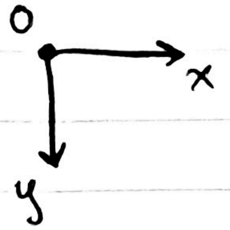
$$\boxed{x' = x - \frac{y}{\tan\varphi}} \overset{(1)}{\Longrightarrow} -\frac{m}{M}x = x - \frac{y}{\tan\varphi} \to$$

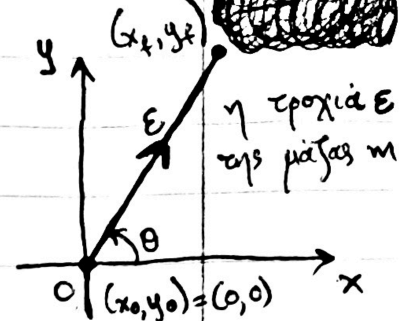
$$\to \boxed{y = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\varphi \cdot x} \quad \forall t$$

είναι η τροχιά (ε) (ευθεία) της μάζας m

(2)



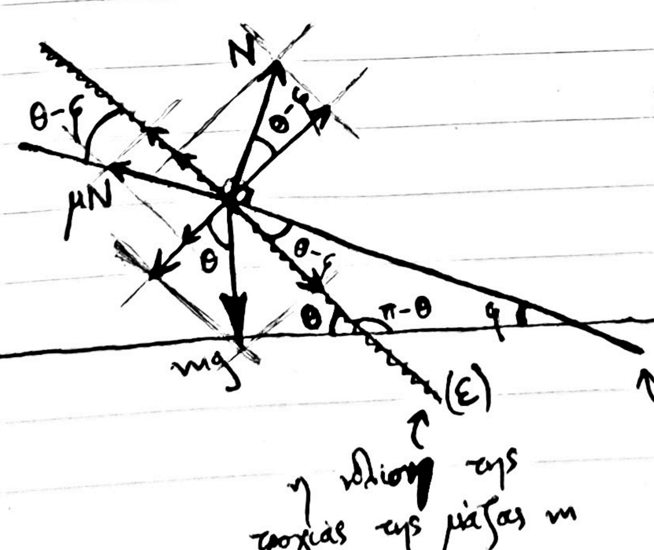




Άρα, βάσει της εικόνας και του ορισμένου συστήματος συντεταγμένων, η μάζα m κινείται πάνω στην ευθεία $y=\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\varphi\cdot x$, κλίσης $\tan\theta=\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\varphi$, από το σημείο $(x_0,y_0)=(0,0)$ έως το $(x_f,y_f)=\left(\frac{M}{m+M}\cdot\frac{h}{\tan\varphi}, h\right)$.

Παρατηρούμε ότι $\tan\theta>\tan\varphi \rightarrow \theta>\varphi$ για $\theta,\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ rad. Ακόμα, για $M>>m \rightarrow \tan\theta\approx\tan\varphi \rightarrow \theta\approx\varphi$, αφού η σφήνα δεν κινείται και η μάζα m ακολουθεί την κλίση της. Τέλος, για $m>>M \rightarrow \tan\theta\simeq\infty \rightarrow \theta\simeq\frac{\pi}{2}$ rad, δηλαδή η μάζα m είναι σαν να μην καταλαβαίνει την ύπαρξη της σφήνας και απλά εκτελεί κατακόρυφη ελεύθερη πτώση (μη ρεαλιστικό φυσικά, το αναφέρω για πληρότητα).

2)



Για την εύρεση της κάθετης δύναμης N μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τροχιά της μάζας m. Αφού γνωρίζουμε ότι είναι ευθεία, μπορούμε να αναλύσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα m με τον έναν άξονα να είναι η ευθεία και τον άλλον άξονα να είναι η διεύθυνση κάθετα στην ευθεία, όπως φαίνεται στο αριστερό διάγραμμα.

Τότε, η συνισταμένη των δυνάμεων στον κάθετο στην ευθεία άξονα θα είναι μηδέν, επειδή η κίνηση της m συμβαίνει μονάχα στη διεύθυνση της ευθείας. Άρα:

$$\Sigma F^{m}_{\perp\varepsilon} = N\cos(\theta-\varphi) - \mu N\sin(\theta-\varphi) - mg\cos\theta = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow N\cdot\left(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi - \mu\sin\theta\cos\varphi + \mu\cos\theta\sin\varphi\right) - mg\cos\theta = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow N = \frac{mg}{\cos\varphi + \tan\theta\sin\varphi - \mu\tan\theta\cos\varphi + \mu\sin\varphi} \xrightarrow[\text{②}]{\tan\theta = \left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\varphi}$$

$$\rightsquigarrow N = \frac{mg}{\cos\varphi + \left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} - \mu\left(1+\frac{m}{M}\right)\sin\varphi + \mu\sin\varphi} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow N = \frac{mg\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \frac{m}{M}\sin^2\varphi - \cancel{\mu\sin\varphi\cos\varphi} - \mu\frac{m}{M}\sin\varphi\cos\varphi + \cancel{\mu\sin\varphi\cos\varphi}} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow N = \frac{mg\cos\varphi}{1 + \frac{m}{M}\sin^2\varphi - \mu\frac{m}{M}\sin\varphi\cos\varphi} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \boxed{N = \frac{mg\cos\varphi}{1 + \frac{m}{M}\sin\varphi\left(\sin\varphi - \mu\cos\varphi\right)}} \quad ③$$

η σταθερού μέτρου δύναμη N

Παρατηρούμε ότι:

α) για $M \gg m$ η σφήνα παραμένει πρακτικά ακίνητη και είναι $N = mg\cos\varphi$ (αφού $\frac{m}{M} \to 0$)

β) για $\varphi = 0$: $N = mg$ (δεν υπάρχει καθόλου κλίση)

γ) για $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad: $N = 0$ (δεν υπάρχει επαφή με τη σφήνα, αφού είναι κάθετα στο δάπεδο)

3) Για τον χρόνο κίνησης της μάζας m, μπορούμε να εργαστούμε με την επιτάχυνσή της στον άξονα y, αφού γνωρίζουμε ότι η απόσταση που διανύει μέχρι το τέλος της κίνησής της είναι h. Έχουμε από την ανάλυση δυνάμεων που κάναμε στην αρχή:

$$\Sigma F_y = m\ddot{y} \rightarrow m\ddot{y} = mg - N\cos\varphi - \mu N \sin\varphi \xrightarrow[\text{από τη (3)}]{\text{αντικαθιστώ τη } N}$$

$$\rightarrow \ddot{y} = g - \frac{g\cos\varphi\,(\cos\varphi + \mu\sin\varphi)}{1 + \frac{m}{M}\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ddot{y} = g \cdot \frac{1 + \frac{m}{M}\sin^2\varphi - \frac{m}{M}\sin\varphi \cdot \mu \cdot \cos\varphi - \cos^2\varphi - \mu\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{1 + \frac{m}{M}\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)} =$$

$$\overset{\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi}{=\!=\!=} g \cdot \frac{\frac{m+M}{M}\sin^2\varphi - \frac{m+M}{M}\mu\sin\varphi\cos\varphi}{1 + \frac{m}{M}\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)} =$$

$$\xrightarrow[\text{και } \pm M\sin\varphi(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)]{\text{πολλαπλασιάζω με } M} g \cdot \frac{(m+M)\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)}{M + m\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) \pm M\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)} =$$

$$= g \cdot \frac{(m+M)\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)}{(m+M)\sin\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) + M\left(1 - \sin^2\varphi + \mu\sin\varphi\cos\varphi\right)} \longleftrightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\ddot{y}} = \frac{1}{g}\cdot\left(1 + \frac{M}{m+M}\cdot\frac{\cos^2\varphi + \mu\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi - \mu\sin\varphi\cos\varphi}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\ddot{y}} = \frac{1}{g}\cdot\left(1 + \frac{M}{m+M}\cdot\frac{1 + \mu\tan\varphi}{\tan^2\varphi - \mu\tan\varphi}\right) = \frac{1}{g}\cdot\left(1 + \frac{M}{m+M}\cdot\frac{\cot\varphi + \mu}{\tan\varphi - \mu}\right) \quad (4)$$

Η επιτάχυνση είναι σταθερού μέτρου άρα:

$$y=\frac{1}{2}\ddot{y}t^2 \xrightarrow[y_f=h]{t=t_f} t_f=\sqrt{2h\frac{1}{\ddot{y}}} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \boxed{t_f=\sqrt{\frac{2h}{g}\cdot\left(1+\frac{M}{m+M}\cdot\frac{\cot\varphi+\mu}{\tan\varphi-\mu}\right)}}$$

• συνολικός χρόνος κίνησης της μάζας m

Παρατηρούμε ότι για $\mu<\tan\varphi$, όπως αναφέρθηκε στην αρχή, ισχύει $t_f \geq \sqrt{\frac{2h}{g}}$, με τον ελάχιστο χρόνο $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ να επιτυγχάνεται θεωρητικά για $m \gg M$, οπότε η μάζα m εκτελεί πρακτικά ελεύθερη πτώση. Επίσης, για την ειδική περίπτωση $M \gg m$, $\mu=0$, είναι $t_f=\sqrt{2\frac{h/\sin\varphi}{g\sin\varphi}}$, όπως αναμένουμε από την κίνηση της μάζας m πάνω σε μια λεία και ακίνητη ράμπα.